Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.242

AUFGABE 08

Ansatz für den Mittelpunkt M(m/m), d.h. y=x für M.

Damit lautet der Ansatz für die Kreise:

$(x-m)^2+(y-m)^2=(3-m)^2+(0-m)^2=(3-m)^2+m^2$.

Der Radius ist $c=\sqrt{(3-m)^2+m^2}$.

```
seq(m,m,-3,3,1)→m
                                  {-3,-2,-1,0,1,2,3}
DelVar x,y
                                                done
```

künstlicher Stoppbefehl

Kurvenschar für c=seq(m,m,-3,3,1)	Y1:… Y2:…

Hinweis:

Für m→∞ (unendlich großer Radius) entarten die Kreise zu einer Geraden durch A und B:

y=-x+3 (Grenzfall)

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.242

AUFGABE 09

a) Der Punkt P(-5/0,5) liegt im II. Quadranten. Da der kreis die Koordinatenachsen berühren soll, muß M auf der Winkelhalbierenden y=-x liegen.

Ansatz mit M(-m,m) und c=m>0 als Radius:

```
DelVar m,c
                                                done
```

$(-5+m)^2+(0.5-m)^2=m^2$→Gl1

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+(m-5)^2=m^2$$

solve(Gl1,m)

$$\left\{m=-\sqrt{5}+\frac{11}{2},m=\sqrt{5}+\frac{11}{2}\right\}$$

approx(ans)

{m=3.263932023,m=7.736067978}

Es gibt zwei Lösungen.

$\left\{-\sqrt{5}+\frac{11}{2},\sqrt{5}+\frac{11}{2}\right\}$→m

$$\left\{-\sqrt{5}+\frac{11}{2},\sqrt{5}+\frac{11}{2}\right\}$$

künstlicher Stoppbefehl

Skizze zu a)	Y1:··· Y2:···

b) Die Punkte P und Q liegen oberhalb der x-Achse. R(r,0) sei der Berührpunkt des gesuchten Kreises an die x-Achse. Der Kreismittelpunkt hat damit die Gestalt M(r/m) mit m>0. Es ergeben sich die Ansatzgleichungen (Radius c>0)

DelVar r,m,c

done

$(2-r)^2+(1-m)^2=c^2$→Gl2

$$(m-1)^2+(r-2)^2=c^2$$

$(-3-r)^2+(2-m)^2=c^2$→Gl3

$$(m-2)^2+(r+3)^2=c^2$$

$(r-r)^2+(0-m)^2=c^2$→Gl4

$$m^2=c^2$$

Somit gilt offensichtlich c=m.

solve({Gl2,Gl3,c=m},{r,m,c})

$$\{\{c=-10\cdot\sqrt{13}+39,m=-10\cdot\sqrt{13}+39,r=-2\cdot\sqrt{13}+7\},\{c=▸$$

approx(ans)
{{c=2.944487245,m=2.944487245,r=-0.2111025509},▸

Es gibt zwei Lösungen und zwar
{c=2.94,m=2.94,r=-0.21}
bzw.
{c=75.06,m=75.06,r=14.21}, d.h.
M(-0.21/2.94) und c=2.94
bzw.
M(14.21/75.06) und c=75.06

$-2\cdot\sqrt{13}+7 \Rightarrow r_1$

$$-2\cdot\sqrt{13}+7$$

$2\cdot\sqrt{13}+7 \Rightarrow r_2$

$$2\cdot\sqrt{13}+7$$

$-10\cdot\sqrt{13}+39 \Rightarrow c_1$

$$-10\cdot\sqrt{13}+39$$

$10\cdot\sqrt{13}+39 \Rightarrow c_2$

$$10\cdot\sqrt{13}+39$$

künstlicher Stoppbefehl

Skizze zu b) Y1:… Y2:…

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.242

AUFGABE 10

a) Der Berührpunkt sei Q(a/b/0) und der
Mittelpunkt ist damit M(a/b/m) mit m>0,
da P(-5/0/5) eine positive z-Koordinate hat.
Es ergeben sich die Ansatzgleichungen mit Radius
c=m=10

DelVar a,b,c,m

done

$(-5-a)^2+(0-b)^2+(5-m)^2=m^2 \rightarrow G15$

$(a+5)^2+b^2+(m-5)^2=m^2$

Gleichung G15 ist nicht eindeutig lösbar.
Wir geben einfach den Berührpunkt vor und berechnen m:

$\text{solve}\left((a+5)^2+b^2+(m-5)^2=m^2 \mid a=1 \text{ and } m=10,b\right)$

$\left\{b=-\sqrt{39},b=\sqrt{39}\right\}$

$\text{solve}\left((a+5)^2+b^2+(m-5)^2=m^2 \mid a=0 \text{ and } m=10,b\right)$

$\left\{b=-5\cdot\sqrt{2},b=5\cdot\sqrt{2}\right\}$

usw.
Damit ist z.B. folgende Kugel eine Lösung:

$(x-0)^2+\left(y-5\cdot\sqrt{2}\right)^2+(z-10)^2=10^2$

b) $(-5-a)^2+(0-b)^2+(5-10)^2=10^2$ ist eine Kreisgleichung, vereinfacht

$\text{simplify}\left((-5-a)^2+(0-b)^2+(5-10)^2=10^2\right)$

$a^2+b^2+10\cdot a+50=100$

d.h. mit quadratischer Ergänzung:

$(a+5)^2+b^2=75$

Damit ist der gesuchte geometrische Ort aller Mittelpunkte ein Kreis in der Ebene z=10 mit M(-5/0/10) und $c=\sqrt{75}$.

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.242

AUFGABE 11

a) Es gilt für den Radius c:

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}\right)\Rightarrow c$$

3

Der Kugelradius beträgt 3.

b) Die Kugelgleichung lautet

$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3^2$

c) Q(0/0/4) oder R(6/0/0) oder S(0/5/0) (jeweils zwei Koordinaten mit 0 vorgegeben.)

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.242

AUFGABE 12

Die Kreisgleichung für den gegebenen Halbkreis lautet mit quadratischer Ergänzung

$x^2+(y-11)^2=11^2$

a) Es gilt c=11.

b) Es gilt $c=\sqrt{11^2+11^2}=11\times\sqrt{2}$ für den Umkreisradius.

c) Die Kantenlänge beträgt 22=2×11.

d) $Q_1(11/11)$, $Q_2(-11/11)$, $Q_3(-11/-11)$, $Q_4(11/-11)$

e) $M_1(11/0)$, $M_2(0/11)$, $M_3(-11/0)$, $M_4(0/-11)$ und $M_5(0/0)$ für den Umkreis.

f) $x=11+\sqrt{121-y^2}$ für den rechten Halbkreis

$x=-11-\sqrt{121-y^2}$ für den linken Halbkreis

$y=11+\sqrt{121-x^2}$ für den oberen Halbkreis

$y=-11-\sqrt{121-x^2}$ für den unteren Halbkreis

g) $x^2+y^2=\left(11\times\sqrt{2}\right)^2=242$

h) Umkreisinhalt=242π, Quadratinhalt=22^2=484,

$\frac{1}{4}\times\text{Differenz}=\frac{242\pi-484}{4}=\frac{121\pi-242}{2}$

Halbkreisinhalt=$\frac{1}{2}121\pi$ ergibt das Endergebnis:

Inhalt von M = $\frac{1}{2}121\pi - \frac{121\pi-242}{2}$ = 121 = 11^2.

Interpretation: Der Inhalt von M entspricht dem Quadratanteil im I. Quadranten.

DelVar x,y

done

künstlicher Stoppbefehl

Skizze zu Aufgabe 12

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.242

AUFGABE 13

a) $r=r(\theta)=11\times\sqrt{2}$ mit $0\le\theta<2\pi$

b) mit $x=r(\theta)\times\cos(\theta)$ und $y=r(\theta)\times\sin(\theta)$ ergibt sich durch Einsetzen und Auflösen nach r:

$r(\theta)\times\cos(\theta)=11+\sqrt{121-(r(\theta)\times\sin(\theta))^2}$ für den rechten Halbkreis mit $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, d.h.

$$\text{solve}\left(r \times \cos(\theta)=11+\sqrt{121-(r \times \sin(\theta))^2}, r\right)$$

$$\left\{r=\frac{22 \cdot \cos(\theta)}{(\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\right\}$$

simplify(ans)

$$\{r=22 \cdot \cos(\theta)\}$$

$r(\theta) \times \cos(\theta)=-11-\sqrt{121-(r(\theta) \times \sin(\theta))^2}$ für den

linken Halbkreis mit $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$, d.h.

$$\text{solve}\left(r \times \cos(\theta)=-11-\sqrt{121-(r \times \sin(\theta))^2}, r\right)$$

$$\left\{r=\frac{-22 \cdot \cos(\theta)}{(\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\right\}$$

simplify(ans)

$$\{r=-22 \cdot \cos(\theta)\}$$

$r(\theta) \times \sin(\theta)=11+\sqrt{121-(r(\theta) \times \cos(\theta))^2}$ für den

oberen Halbkreis mit $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$, d.h.

$$\text{solve}\left(r \times \sin(\theta)=11+\sqrt{121-(r \times \cos(\theta))^2}, r\right)$$

$$\left\{r=\frac{22 \cdot \sin(\theta)}{(\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\right\}$$

simplify(ans)

$$\{r=22 \cdot \sin(\theta)\}$$

$r(\theta) \times \sin(\theta)=-11-\sqrt{121-(r(\theta) \times \cos(\theta))^2}$ für den

unteren Halbkreis mit $-\frac{3\pi}{4} \le \theta \le -\frac{\pi}{4}$, d.h.

$$\text{solve}\left(r \times \sin(\theta)=-11-\sqrt{121-(r \times \cos(\theta))^2}, r\right)$$

$$\left\{r=\frac{-22\cdot\sin(\theta)}{(\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\right\}$$

simplify(ans)

$$\{r=-22\cdot\sin(\theta)\}$$

c) $x=11$ geht über in $r(\theta)=\frac{11}{\cos(\theta)}$ mit $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$,

$x=-11$ geht über in $r(\theta)=\frac{-11}{\cos(\theta)}$ mit $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$,

$y=11$ geht über in $r(\theta)=\frac{11}{\sin(\theta)}$ mit $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$,

$y=-11$ geht über in $r(\theta)=\frac{-11}{\sin(\theta)}$ mit $-\frac{3\pi}{4}\le\theta\le-\frac{\pi}{4}$.

künstlicher Stoppbefehl

Skizze zu Aufgabe 13

Intervalle in Altgrad:

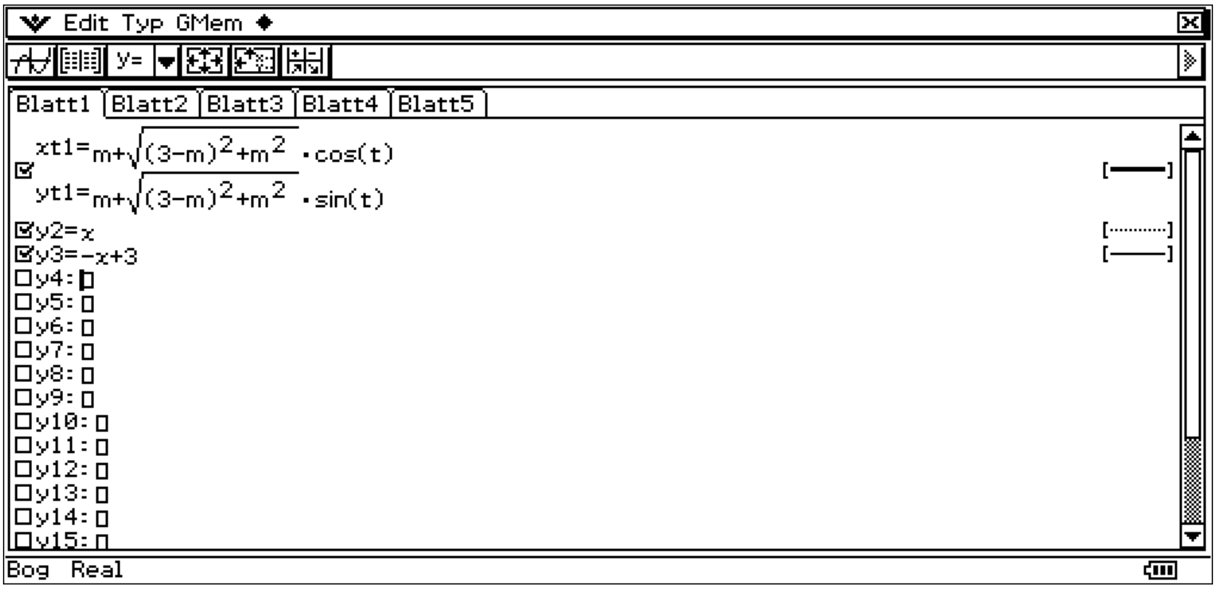
$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ entspricht $-45°\le\theta\le45°$, $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$ entspricht $135°\le\theta\le225°$,

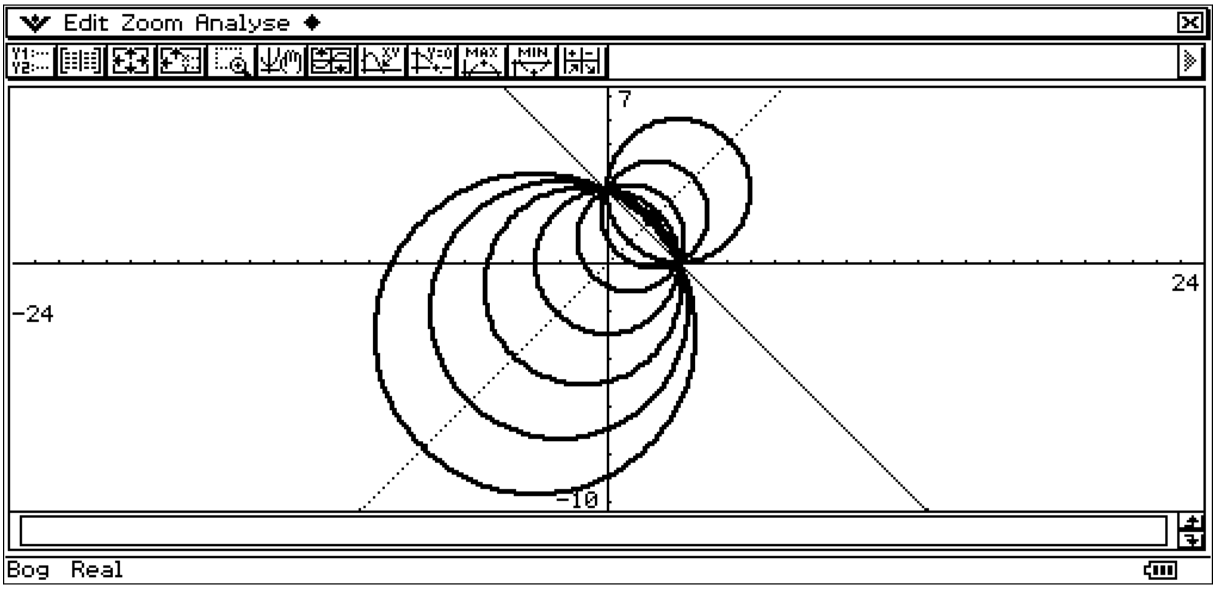
$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ entspricht $45°\le\theta\le135°$, $-\frac{3\pi}{4}\le\theta\le-\frac{\pi}{4}$ entspricht $-135°\le\theta\le-45°$.

Für den Umkreis: $0\le\theta<2\pi$ entspricht $0°\le\theta<360°$.

Download dieser eActivity:

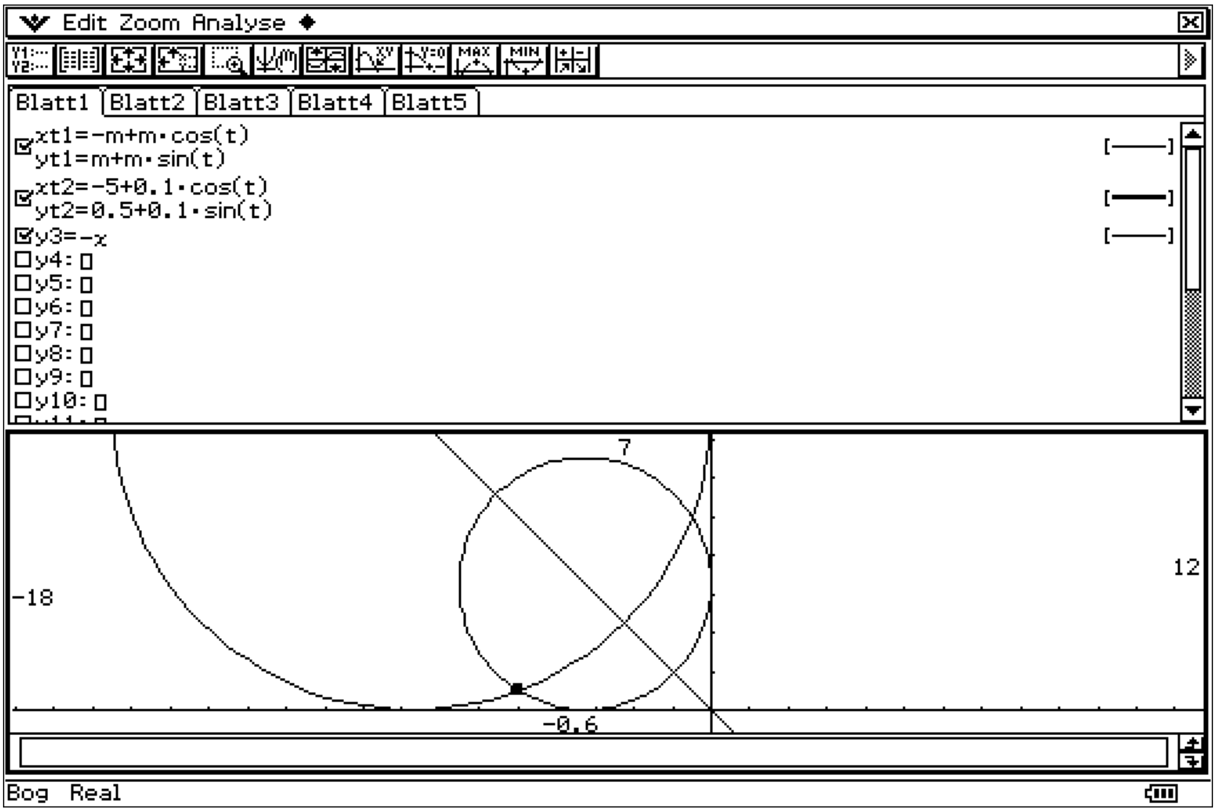
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/BVEINS_Loesungen_13NT.vcp



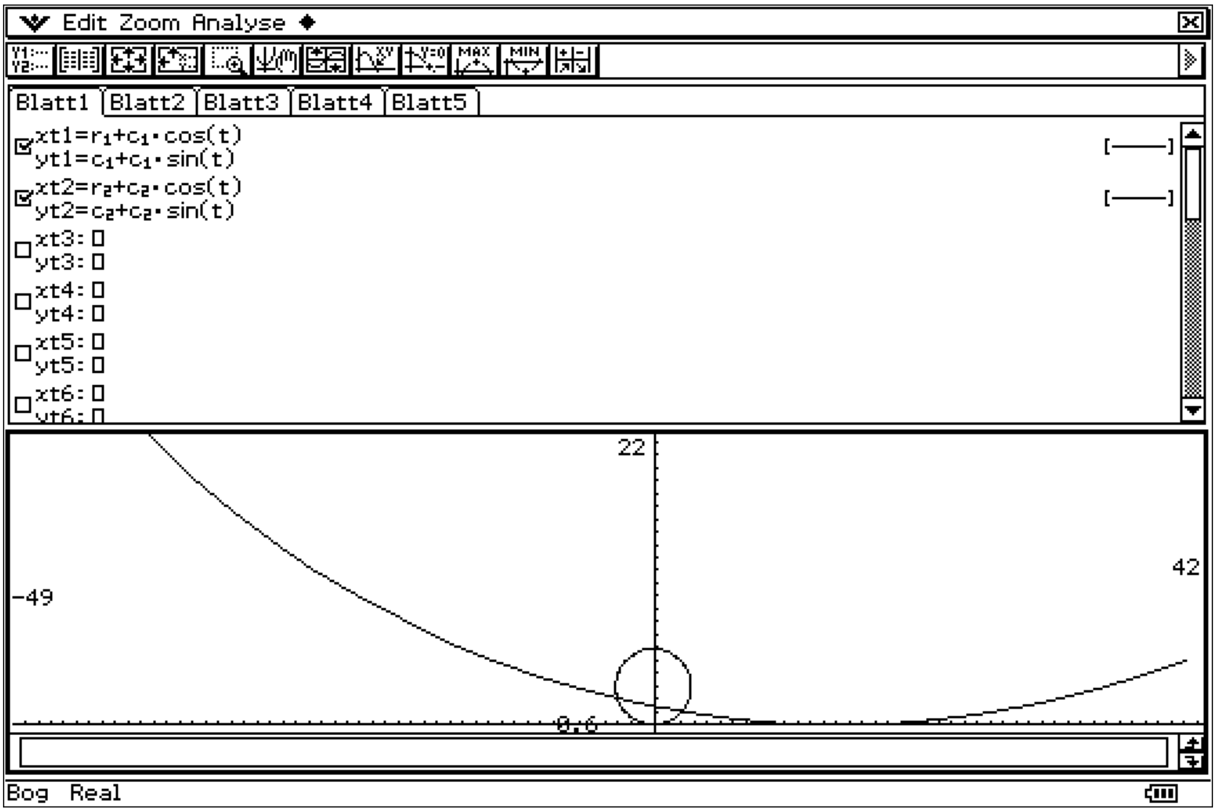


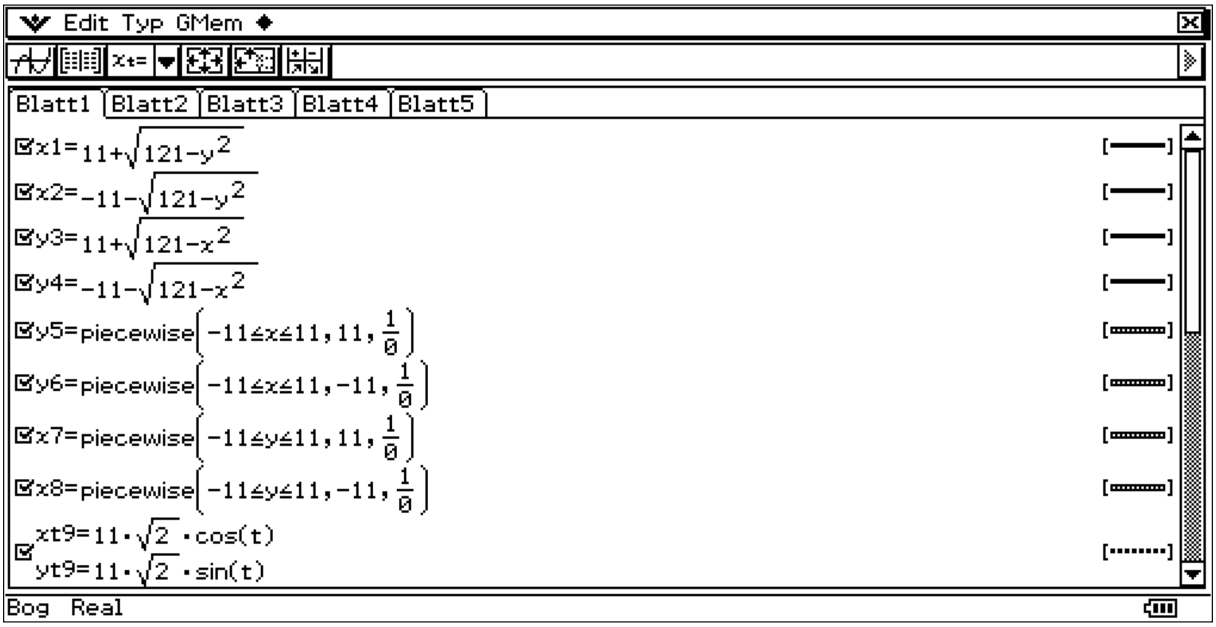
Hinweis:
Um die Grafikzeile zu öffnen, wurde zuvor der „künstliche Stoppbefehl“ als Berechnungszeile eingefügt, da andernfalls alle Aufgaben durchlaufen und das definierte m wieder gelöscht ist.

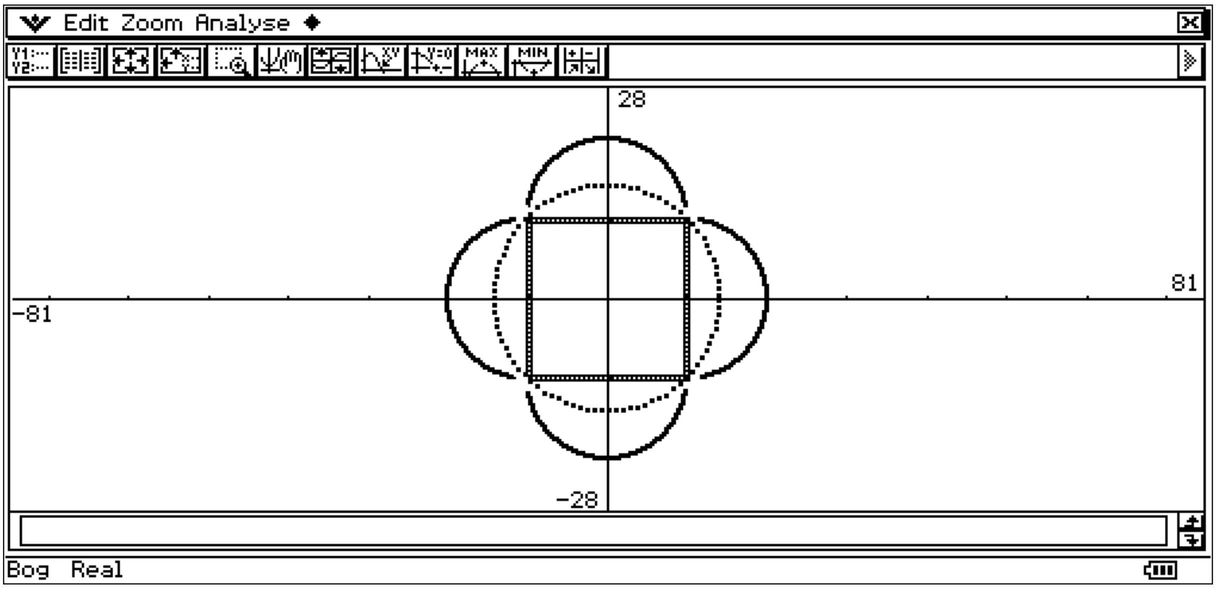
Prof. Dr. L. Paditz Sachsen 13NT S.242 AUFGABE 09 a) 2D-Grafikmenü

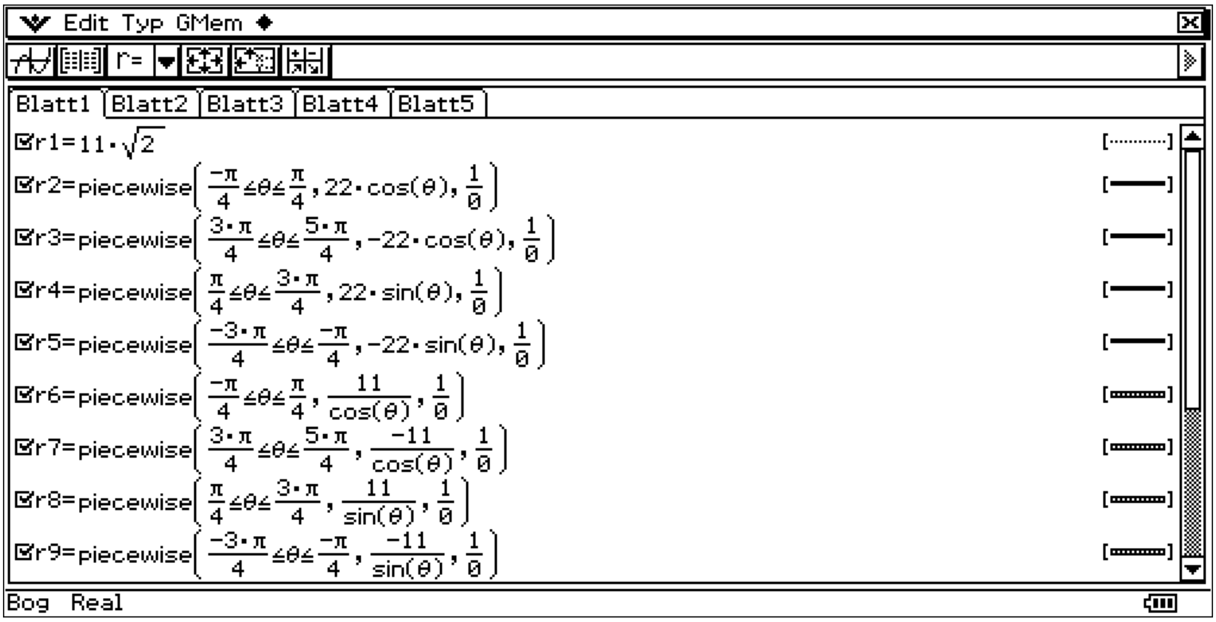


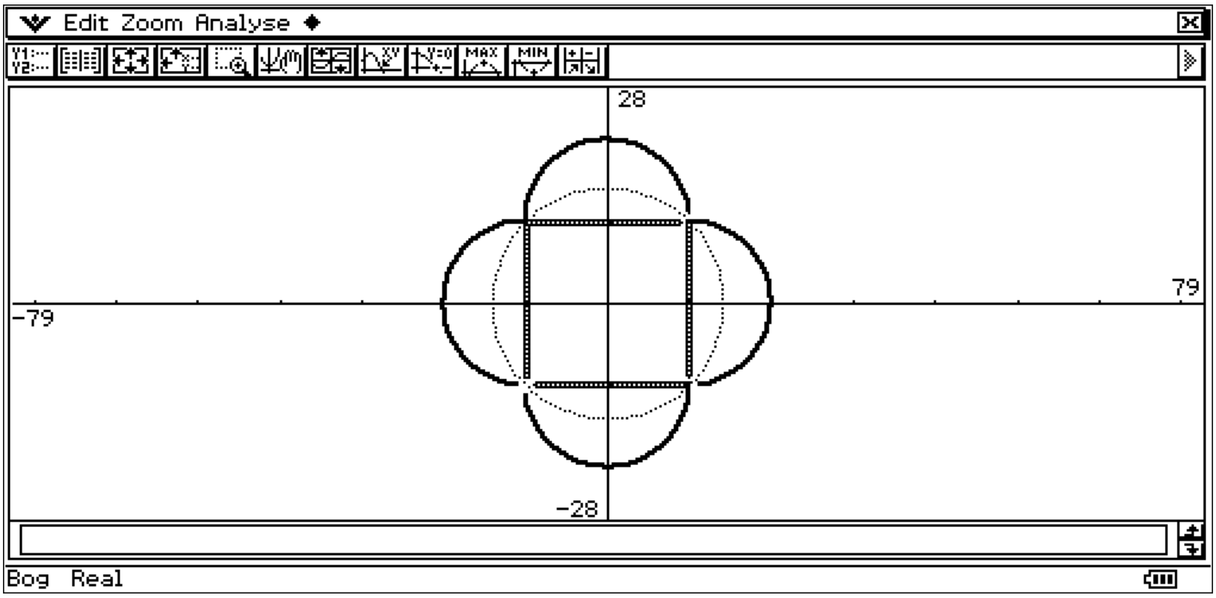
Prof. Dr. L. Paditz Sachsen 13NT S.242 AUFGABE 09 b) 2D-Grafikmenü




Edit Typ GMem
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
x1=11+√(121-y^2)
x2=-11-√(121-y^2)
y3=11+√(121-x^2)
y4=-11-√(121-x^2)
y5=piecewise(-11≤x≤11,11,1/0)
y6=piecewise(-11≤x≤11,-11,1/0)
x7=piecewise(-11≤y≤11,11,1/0)
x8=piecewise(-11≤y≤11,-11,1/0)
xt9=11·√2·cos(t)
yt9=11·√2·sin(t)
Bog Real


Edit Zoom Analyse
28
81
-81
-28
Bog Real


Edit Typ GMem
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
r1=11·√2
r2=piecewise(−π/4≤θ≤π/4, 22·cos(θ), 1/0)
r3=piecewise(3·π/4≤θ≤5·π/4, −22·cos(θ), 1/0)
r4=piecewise(π/4≤θ≤3·π/4, 22·sin(θ), 1/0)
r5=piecewise(−3·π/4≤θ≤−π/4, −22·sin(θ), 1/0)
r6=piecewise(−π/4≤θ≤π/4, 11/cos(θ), 1/0)
r7=piecewise(3·π/4≤θ≤5·π/4, −11/cos(θ), 1/0)
r8=piecewise(π/4≤θ≤3·π/4, 11/sin(θ), 1/0)
r9=piecewise(−3·π/4≤θ≤−π/4, −11/sin(θ), 1/0)
Bog Real


Edit Zoom Analyse
28
79
−79
−28
Bog Real