Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 01

Auf S.227 und im **Satz 5.9** auf S. 228 haben wir die Transformationsgleichungen
$x=r\times\cos(\theta)\times\sin(\phi)$, $y=r\times\sin(\theta)\times\sin(\phi)$, $z=r\times\cos(\phi)$

Umgekehrt gilt nun für r als Länge des Ortsvektors von O nach P:

$$\mathbf{r}=\left\|\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$ (mit $r\geq0$) und

$$\boldsymbol{\phi}=\mathbf{arccos}\left(\frac{r}{z}\right)=\mathbf{arccos}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\right)$$ (mit $0\leq\phi\leq\pi$, Wertebereich der arccos-Funktion!) sowie

$$\frac{y}{x}=\frac{r\times\sin(\theta)\times\sin(\phi)}{r\times\cos(\theta)\times\sin(\phi)}=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\tan(\theta),$$ d.h.

$$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$ **für** $\mathbf{x>0}$ (mit $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, Wertebereich der arctan-Funktion!)

bzw.

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\pi}+\mathbf{arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$ **für** $\mathbf{x<0}$ (mit $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$, Wertebereich der arctan-Funktion beachten!)

Im Fall $x=0$ gilt $\boldsymbol{\theta}=\frac{\pi}{2}\times\mathbf{signum(y)}$ (mit $y\neq0$).

Im Fall $x=y=0$ ist θ nicht bestimmt und

$$\phi=\arccos\left(\frac{|z|}{z}\right)=\arccos(\text{signum}(z))$$ (mit $z\neq0$).

Im Fall $x=y=z=0$ sind beide Winkel nicht bestimmt und $r=0$.

Die Darstellung von θ kann zusammengefaßt werden:

$$\boldsymbol{\theta=-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\pi}{2}\times \mathrm{signum}(y)}$$ für $y\neq 0$ und

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2}\times(1-\mathrm{signum}(x))}$$ für $y=0$ und $x\neq 0$.

Die zuletzt genannte arctan-Darstellung beruht auf einem Additionstheorem für arctan-Funktionen:

$$\boldsymbol{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\pi}{2}\times \mathrm{signum}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 02

a) $x^2+y^2=7^2=49$

b) $\left\|\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right\|=7$ bzw. als Skalarprodukt $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}^2=7^2$

(Satz 5.4 S. 219)

c) $r=r(\theta)=7$ mit $0\le\theta<2\pi$

d) $x(t)=7\times\cos(t)$, $y(t)=7\times\sin(t)$ mit $0\le t<2\pi$

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 03

a) $x^2+y^2+z^2=8^2=64$

b) $\left\|\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\|=8$ bzw. als Skalarprodukt $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}^2=8^2$

(Satz 5.8 S. 225)

c) $r=r(\theta,\phi)=8$ mit $0\le\theta<2\pi$ und $0\le\phi\le\pi$

d) $x(s,t)=8\times\cos(t)\times\sin(s)$, $y(s,t)=8\times\sin(t)\times\sin(s)$,

$z(s,t)=8\times\cos(s)$ mit $0\le t<2\pi$ und $0\le s\le\pi$

AUFGABE 04

Wir nutzen die quadratische Ergänzung:

a) $x^2-2\times4x+4^2+y^2+2\times5y+5^2=4^2$, d.h.

$(x-4)^2+(y+5)^2=4^2$ und $z=0$,

somit gilt $M=M(4,-5,0)$ und $c=4$ (Kreisgleichung im R^3 in x-y-Ebene)

b) $x^2-2\times4x+4^2+y^2+2\times5y+5^2+z^2=4^2$, d.h.

$(x-4)^2+(y+5)^2+z^2=4^2$,

somit gilt $M=M(4,-5,0)$ und $c=4$ (Kugelgleichung im R^3)

c) $x^2-2\times4x+4^2+z^2+2\times5z+5^2=4^2$, d.h.

$(x-4)^2+(z+5)^2=4^2$ und $y=0$,

somit gilt $M=M(4,0,-5)$ und $c=4$ (Kreisgleichung im R^3 in x-z-Ebene)

d) $3x^2+3y^2+3z^2-8x+10y-3z+3=0 \quad |:3$

$x^2+y^2+z^2-\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}y-z+1=0$ ergibt nun

$$x^2-2\times\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2+y^2+2\times\frac{5}{3}y+\left(\frac{5}{3}\right)^2+z^2-2\times\frac{1}{2}z+\left(\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$-1+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{137}{36}, \text{ denn}$$

$$-1+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{137}{36}$$

somit gilt $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{137}}{6}\right)^2$,

d.h.

$M=M(\frac{4}{3},-\frac{5}{3},-\frac{1}{2})$ und $c=\frac{\sqrt{137}}{6}=1,95$

(Kugelgleichung im R^3), denn

$\text{approx}\left(\frac{\sqrt{137}}{6}\right)$

1.950783318

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 05

a) Wir betrachten die Länge der Differenzvektoren von M zu A, B, C

$\text{approx}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)\right)$

13.19090596

$\text{approx}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)\right)$

8.246211251

$\text{approx}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)\right)$

0

damit liegen B (8.25<12) und C=M innerhalb und A (13.19>12) außerhalb der Kugel.

b) Die linear abhängigen Vektoren von P(x/y/z) zu

A, B, C bilden eine Null-Determinante:

$$\det\left(\operatorname{augment}\left(\operatorname{augment}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)\right)=\blacktriangleright$$

$$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0$$

Damit haben wir eine parameterfreie Gleichung der Ebene erhalten.

Eine Parameterdarstellung kann z.B. mit

$$\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}+s\times\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}\right)+t\times\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}-2\cdot s+2\cdot t+4\\s+7\cdot t+3\\7\cdot s+11\cdot t+8\end{bmatrix}$$

erhalten werden, d.h.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\7\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\7\\11\end{bmatrix},\ s,t\in R.$$

c) Wir ermitteln den Abstand h des Kugelmittelpunktes zur Ebene mit dem Normaleneinheitsvektor und dem Ansatz (Vektor, der in die Ebene führt)

$$\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}+h\times\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\times\frac{1}{\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{19\cdot\sqrt{749}\cdot h}{749}+2 \\ \frac{-18\cdot\sqrt{749}\cdot h}{749}-4 \\ \frac{8\cdot\sqrt{749}\cdot h}{749}-3 \end{bmatrix}$$

Einsetzen dieses Vektors in die Ebenengleichung ergibt h:

$$\text{solve}\left(38\cdot\left(\frac{19\cdot\sqrt{749}\cdot h}{749}+2\right)-36\cdot\left(\frac{-18\cdot\sqrt{749}\cdot h}{749}-4\right)+16\cdot\left(\blacktriangleright\right.\right.$$

$$\{h=0\}$$

Damit verläuft die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, wie die Probe zeigt:

$38\cdot2-36\cdot(-4)+16\cdot(-3)-172=0$

$$0=0$$

d) Die Schnittkurve beider Flächen im Raum ist ein Großkreis mit dem Radius c=12, da M in der Ebene liegt.

Die Parameterdarstellung ergibt sich als mehrdeutige Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

DelVar x,y,z,a

done

$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0 \rightarrow Gl1$

$$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0$$

und

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=12^2 \rightarrow Gl2$

$$(x-2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=144$$

(z eliminieren, die entstehende Ellipsengleichung in der x-y-Ebene in Parameterdarstellung bringen.)

solve(Gl1,z)

$$\left\{z=\frac{-(19\cdot x-18\cdot y-86)}{8}\right\}$$

G12 | $z=\dfrac{-(19\cdot x-18\cdot y-86)}{8}$

$$(x-2)^2+(y+4)^2+\left(\frac{19\cdot x-18\cdot y-86}{8}-3\right)^2=144$$

simplify((ans−144)×64)⇒G13

$$425\cdot x^2+388\cdot y^2-684\cdot x\cdot y-4436\cdot x+4472\cdot y+4164=0$$

Für x und y wählen wir unter Beachtung der Mittelpunktskoordinaten die Ansätze
x(t)=2+a(t)×cos(t), y(t)=−4+a(t)×sin(t)
und bestimmen a(t) aus der quadratischen Gleichung:

G13 | x=2+a×cos(t)⇒G14

$$388\cdot y^2+425\cdot(a\cdot\cos(t)+2)^2-684\cdot y\cdot(a\cdot\cos(t)+2)+4472 \blacktriangleright$$

G14 | y=−4+a×sin(t)⇒G15

$$425\cdot(a\cdot\cos(t)+2)^2+388\cdot(a\cdot\sin(t)-4)^2-684\cdot(a\cdot\cos(t)\cdot \blacktriangleright$$

tCollect(G15)⇒G16

$$\frac{37\cdot a^2\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot a^2\cdot\sin(2\cdot t)+813\cdot a^2-18432}{2}=0$$

collect(G16,a)⇒G17

$$a^2\cdot\left(-342\cdot\sin(2\cdot t)+\frac{37\cdot\cos(2\cdot t)}{2}+\frac{813}{2}\right)-9216=0$$

Wir benutzen eine der beiden Lösungen und zwar die mit der positven Wurzel:

Define $a(t)=\sqrt{\dfrac{9216}{-342\cdot\sin(2\cdot t)+\dfrac{37\cdot\cos(2\cdot t)}{2}+\dfrac{813}{2}}}$

done

simplify(a(t))

$$96\cdot\sqrt{\frac{2}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}$$

Define $a(t)=96\cdot\sqrt{\frac{2}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}$

done

und erhalten mit $0\le t<2\pi$ eine Parameterdarstellung für den Großkreis:

Define x(t)=2+a(t)×cos(t)

done

Define y(t)=-4+a(t)×sin(t)

done

Define $z(t)=\frac{-19\cdot x(t)+18\cdot y(t)+86}{8}$

done

Kontrolle:

x(t)

$$96\cdot\cos(t)\cdot\sqrt{\frac{2}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}+2$$

y(t)

$$96\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{\frac{2}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}-4$$

simplify(z(t))

$$-3\cdot(76\cdot\cos(t)-72\cdot\sin(t))\cdot\sqrt{\frac{2}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)}}\blacktriangleright$$

Define $z(t)=-3\cdot(76\cdot\cos(t)-72\cdot\sin(t))\cdot\sqrt{\frac{}{37\cdot\cos(2\cdot t)-}}\blacktriangleright$

done

z(t) als Textzeile (mit Zeilenumbruch):

$z(t)=-3\cdot(76\cdot\cos(t)-72\cdot\sin(t))\cdot$

$$\sqrt{\frac{2}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}-3$$

grafische Darstellungen im 3D-Menü:

grafische Darstellungen im 3D-Menü	Z1:... Z2:...

Kontrollberechnung von Kurvenpunkten:

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \mid t=0\right)$$

$$\begin{bmatrix} 6.656684001 \\ -4 \\ -14.0596245 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \mid t=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0.8736615926 \\ 7.965738583 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \mid t=\pi\right)$$

$$\begin{bmatrix} -2.656684001 \\ -4 \\ 8.059624502 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \mid t=\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -8.873661593 \\ -13.96573858 \end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}2\\-8.873661593\\-13.96573858\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)\right)$$

12

Abschließend sehen wir uns die Projektion der Raumkurve als Ellipse in der x-y-Ebene an:

Kegelschnittdarstellung zur Gleichung G13	f(xy)

Download dieser eActivity:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/BVEINS_Loesungen_13NT.vcp

Achsenabschnitte der Schnittebene:

approx(solve(38·x−36·0+16·0−172=0,x))

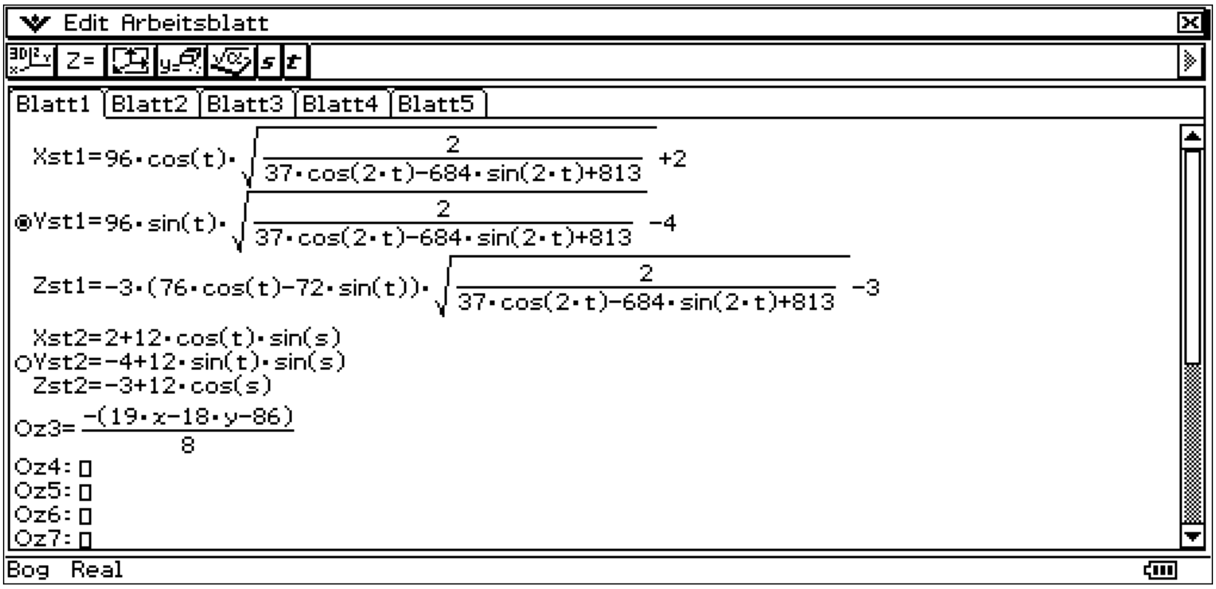
{x=4.526315789}

approx(solve(38·0−36·y+16·0−172=0,y))

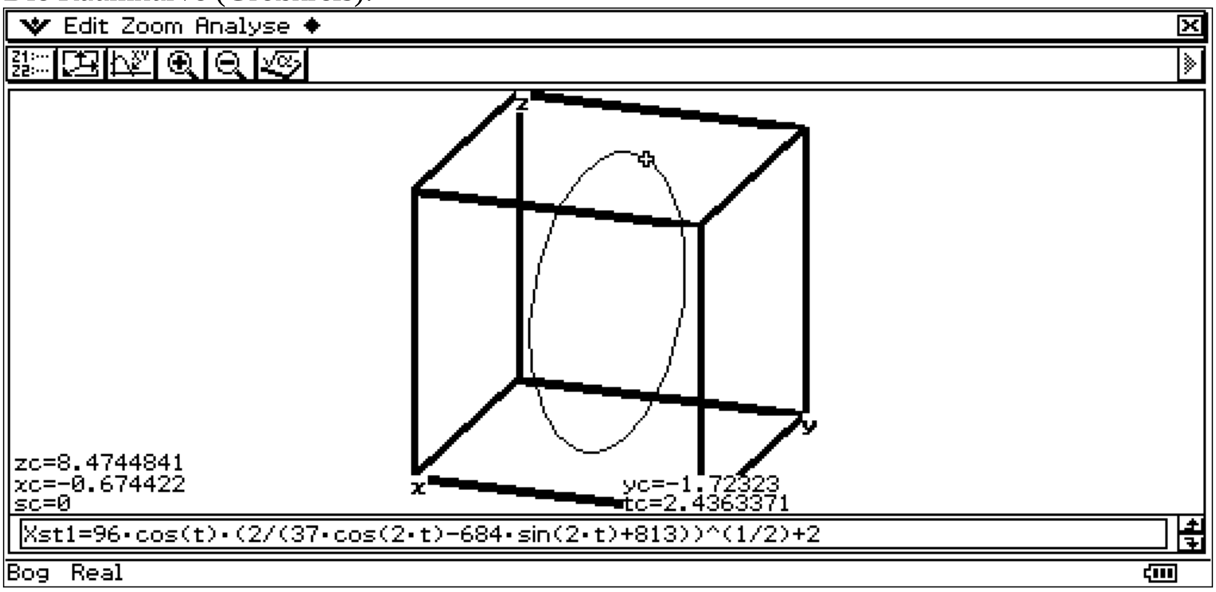
{y=−4.777777778}

approx(solve(38·0−36·0+16·z−172=0,z))

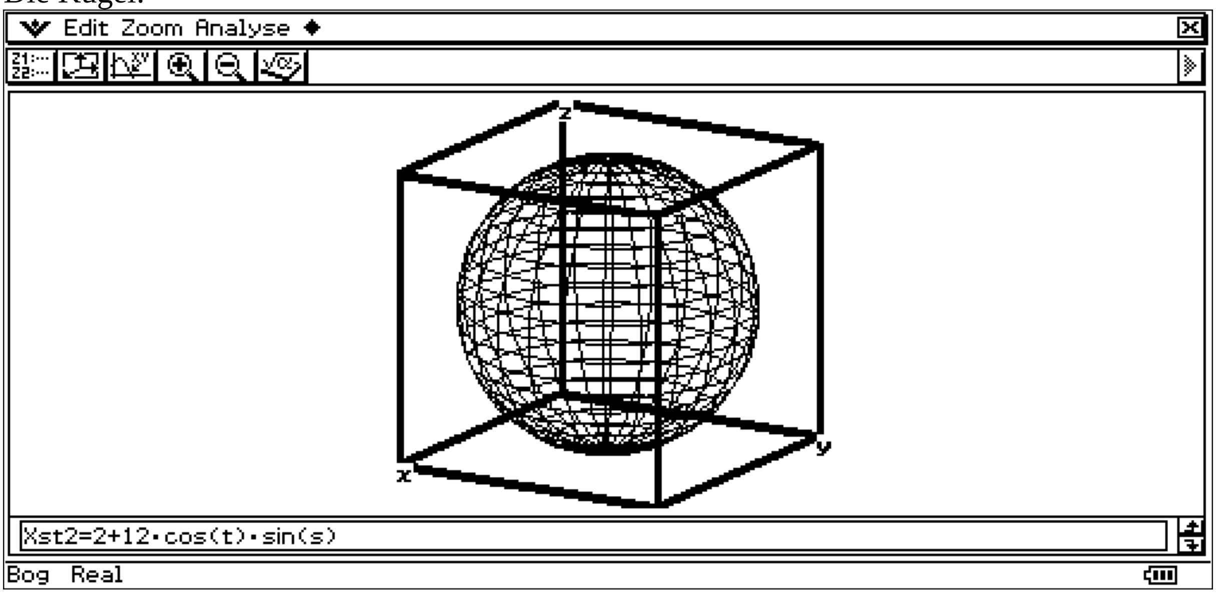
{z=10.75}



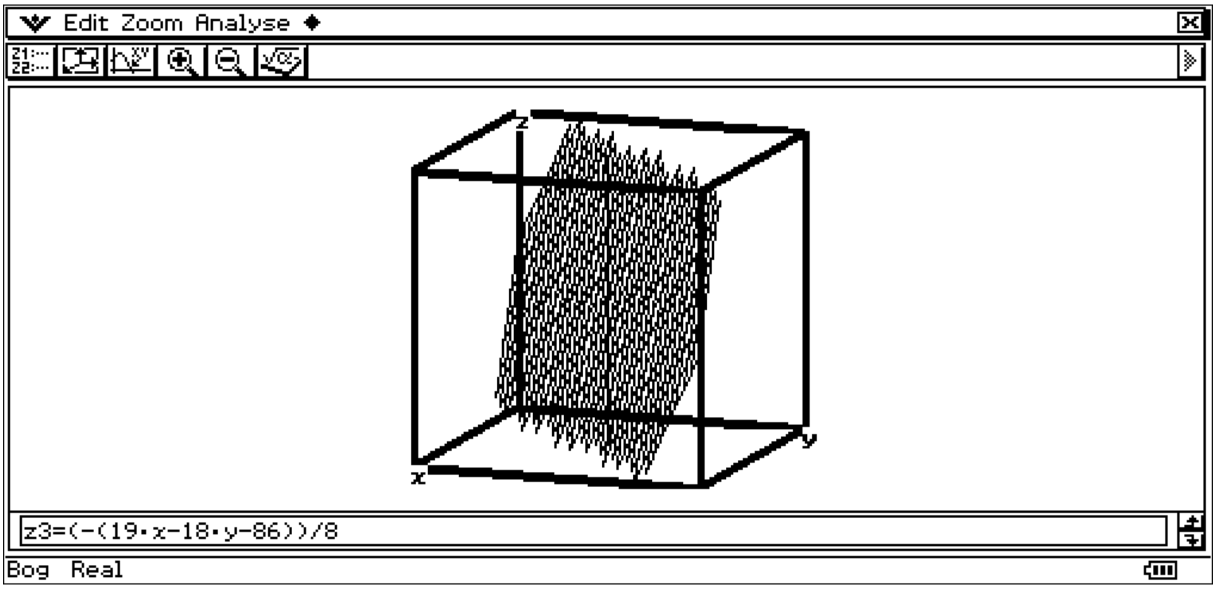
Die Raumkurve (Großkreis):



Die Kugel:



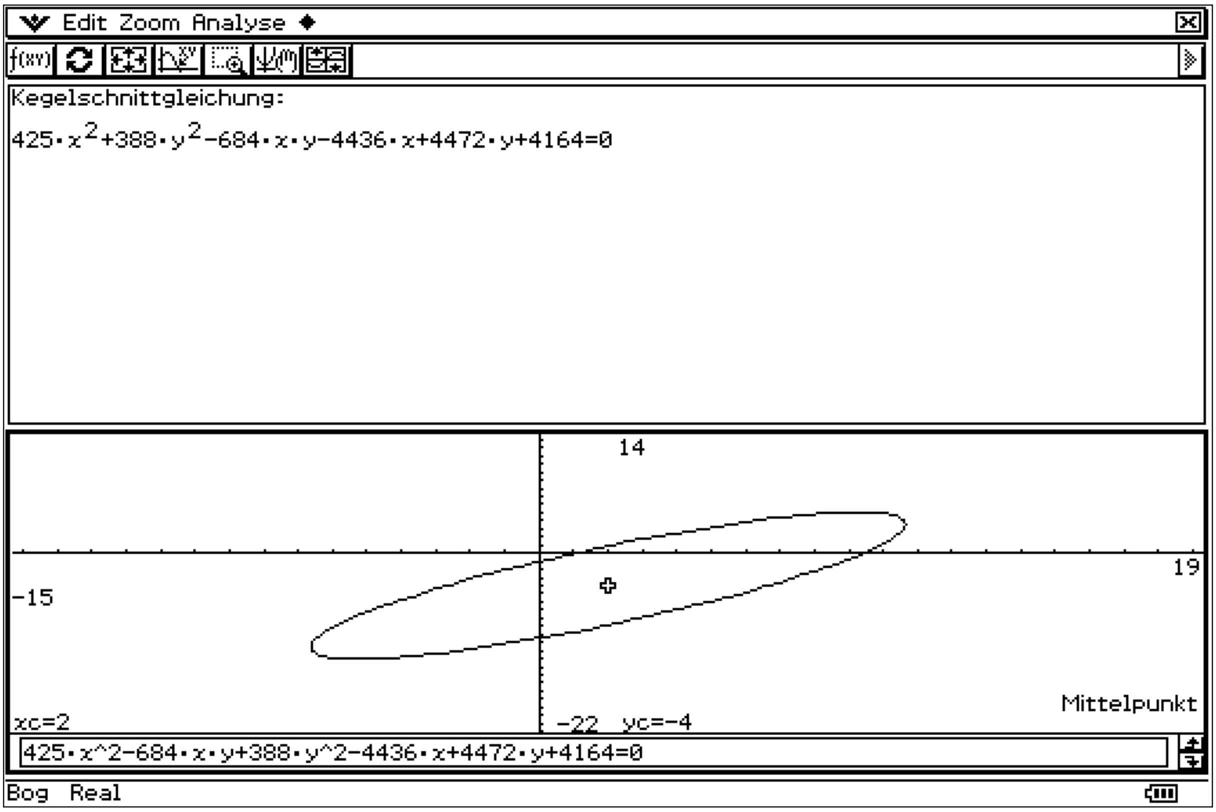
Die Ebene:

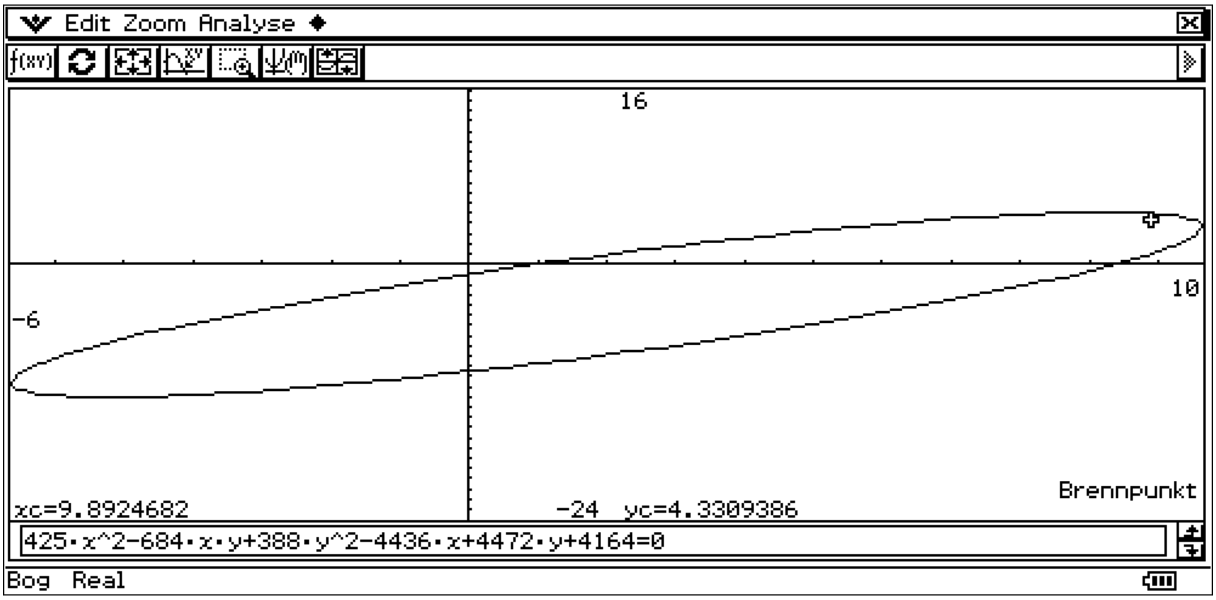


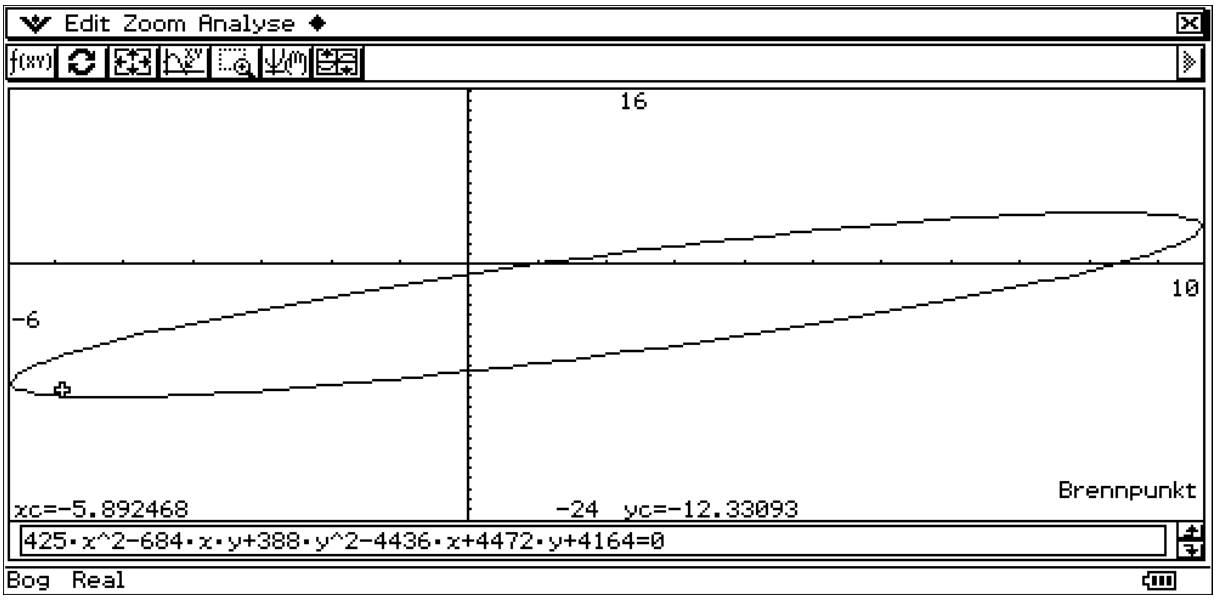
Der Betrachtungsquader zeigt zur Orientierung lediglich die Achsrichtungen an.
Der Koordinatenursprung liegt im Inneren des Quaders.
3D-Fenstereinstellung 2-12=-10<x<2+12=14, -4-12=-16<y<-4+12=8, -3-12=-15<z<-3+12=9.

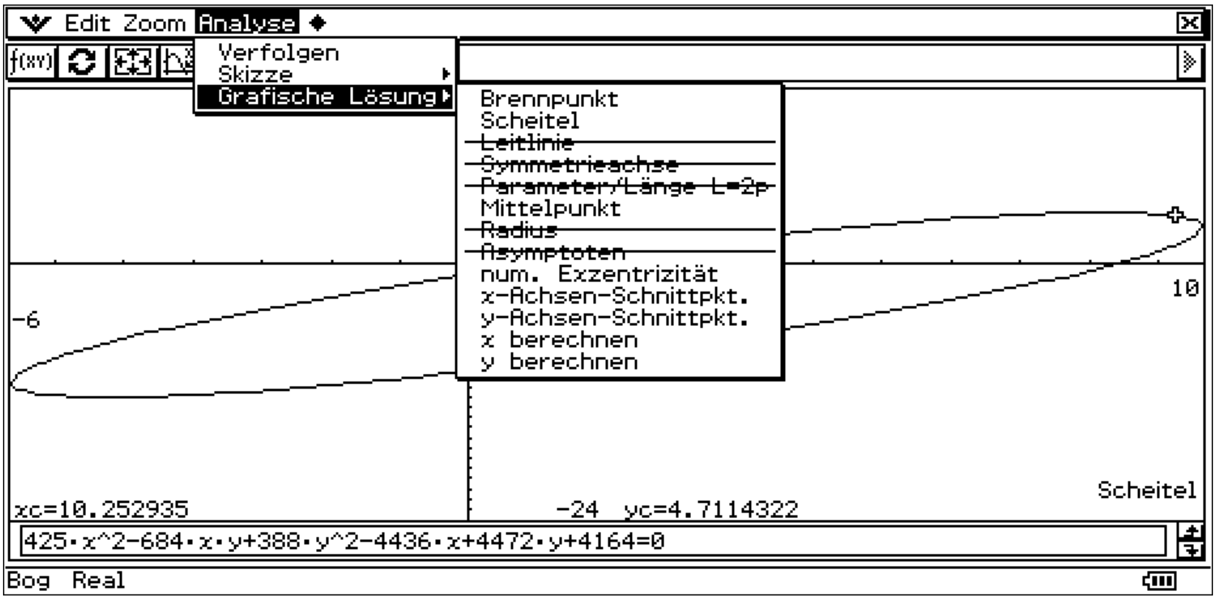
Prof. Dr. L. Paditz **Sachsen 13NT S.241 AUFGABE 05** **Kegelschnittmenü**

Die senkrechte Projektion der Raumkurve in die x-y-Ebene ist eine gedrehte Ellipse:









Probieren Sie weitere Möglichkeiten im Kegelschnittmenü selbst aus.
Berechnen Sie die Längen der Halbachsen (große Halbachse = 12).

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 06

Wir ermitteln durch quadratische Ergänzung die Mittelpunkte, Radien und Abstände der Mittelpunkte.

a) k_1: $(y+1)^2+z^2=20$, $M_1(0,-1,0)$, $R_1=\sqrt{20}=4.472$

k_2: $(y-3)^2+(z-4)^2=4$, $M_2(0,3,4)$, $R_2=2$

$\text{norm}\left(\left\|\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}\right\|\right)=4\times\sqrt{2}=5.567$, d.h. es gibt zwei Schnittpunkte:

$\text{solve}(\{(y+1)^2+z^2=20,(y-3)^2+(z-4)^2=4\},\{y,z\})$

$\{\{y=3,z=2\},\{y=1,z=4\}\}$

grafische Darstellung zu a)	Y1:… Y2:…

b) k_1: $(y-2)^2+(z+3)^2=4$, $M_1(0,2,-3)$, $R_1=2$

k_2: $(y-3)^2+(z+4)^2=25$, $M_2(0,3,-4)$, $R_2=5$

$\text{norm}\left(\left\|\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\3\\-4\end{bmatrix}\right\|\right)=\sqrt{2}=1.414$, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt: k_1 liegt in k_2

grafische Darstellung zu b)	Y1:… Y2:…

c) k_1: $(y+3)^2+(z-9)^2=4$, $M_1(0,-3,9)$, $R_1=2$

k_2: $(y+3)^2+(z-2)^2=25$, $M_2(0,-3,2)$, $R_2=5$

$\text{norm}\left(\left\|\begin{bmatrix}0\\-3\\9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\-3\\2\end{bmatrix}\right\|\right)=7$, d.h. es gibt einen

Schnittpunkt (Berührpunkt): P(0/-3/7)

grafische Darstellung zu c)	Y1:… Y2:…

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 07

A, B, C liegen auf einem Großkreis der Kugel, d.h. M liegt auch in der durch A, B, C festgelegten Ebene.
Die Differenzvektoren zwischen M(x/y/z) und A, B, C sind linear abhängig und gleich lang.
a) Die Ebenengleichung erhalten wir z.B. als Null-Determinante mit abhängigen Vektoren:

$$\det\left(\text{augment}\left(\text{augment}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)\right)=\blacktriangleright$$

$$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2-\text{norm}\left(\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2=0\Rightarrow Gl2$$

$$4\cdot x-2\cdot y-14\cdot z+48=0$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2-\text{norm}\left(\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2=0\Rightarrow Gl3$$

$$-4\cdot x-14\cdot y-22\cdot z+60=0$$

solve({Gl1,Gl2,Gl3},{x,y,z})

$$\left\{x=\frac{596}{749},y=-\frac{1629}{749},z=\frac{2971}{749}\right\}$$

$$\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)^2$$

$$\frac{39933}{749}$$

Die Kreisgleichung lautet damit:

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(z-\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{39933}{749},$$

$$M\left(\frac{596}{749},-\frac{1629}{749},\frac{2971}{749}\right),\quad c=\sqrt{\frac{39933}{749}}\ .$$

b) Die Parameterdarstellung des Kreises ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems mit den Gleichungen der ebene und der Kugel:

DelVar x,y,z,a

done

$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0 \Rightarrow Gl4$

$$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0$$

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(z-\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{39933}{749} \Rightarrow Gl5$$

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(z-\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{39933}{749}$$

solve(Gl4,z)

$$\left\{z=\frac{-(19\cdot x-18\cdot y-86)}{8}\right\}$$

$$Gl5|z=\frac{-(19\cdot x-18\cdot y-86)}{8} \Rightarrow Gl6$$

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(\frac{19\cdot x-18\cdot y-86}{8}+\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{3993}{749}\blacktriangleright$$

Für x und y wählen wir unter Beachtung der Mittelpunktskoordinaten die Ansätze

$x(t)=\frac{596}{749}+a(t)\times\cos(t),\ y(t)=-\frac{1629}{749}+a(t)\times\sin(t)$

und bestimmen a(t) aus der quadratischen Gleichung:

$Gl6|x=\frac{596}{749}+a\times\cos(t)\Rightarrow Gl7$

$$\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+a^2\cdot(\cos(t))^2+\left(\frac{18\cdot y-19\cdot\left(a\cdot\cos(t)+\frac{596}{749}\right)+}{8}\right.$$

$Gl7|y=-\frac{1629}{749}+a\times\sin(t)\Rightarrow Gl8$

$$a^2\cdot(\cos(t))^2+a^2\cdot(\sin(t))^2+\left(\frac{19\cdot\left(a\cdot\cos(t)+\frac{596}{749}\right)-18\cdot}{8}\right.$$

tCollect(Gl8)⇒Gl9

$$\frac{37\cdot a^2\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot a^2\cdot\sin(2\cdot t)+813\cdot a^2}{128}=\frac{39933}{749}$$

collect(Gl9,a)⇒Gl10

$$a^2\cdot\left(\frac{-171\cdot\sin(2\cdot t)}{32}+\frac{37\cdot\cos(2\cdot t)}{128}+\frac{813}{128}\right)=\frac{39933}{749}$$

Wir benutzen eine der beiden Lösungen und zwar die mit der positven Wurzel:

$$\text{Define } a(t)=\sqrt{\frac{\frac{39933}{749}}{\frac{-171\cdot\sin(2\cdot t)}{32}+\frac{37\cdot\cos(2\cdot t)}{128}+\frac{813}{128}}}$$

done

simplify(a(t))

$$\frac{72\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}}{749}$$

$$\text{Define } a(t)=\frac{72}{749}\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}$$

done

und erhalten mit $0\le t<2\pi$ eine Parameterdarstellung für den Großkreis:

$$\text{Define } x(t)=\frac{596}{749}+a(t)\times\cos(t)$$

done

$$\text{Define } y(t)=-\frac{1629}{749}+a(t)\times\sin(t)$$

done

$$\text{Define } z(t)=\frac{-(19\cdot x(t)-18\cdot y(t)-86)}{8}$$

done

Kontrolle:

x(t)

$$\frac{72\cdot\cos(t)\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}}{749}+\frac{596}{749}$$

y(t)

$$\frac{72\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}}{749}-\frac{1629}{749}$$

simplify(z(t))

$$\frac{-\left((171\cdot\cos(t)-162\cdot\sin(t))\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t}}\right.}{749}$$

$$\text{Define } z(t)=\frac{162\cdot\sin(t)-171\cdot\cos(t)}{749}\cdot\sqrt{\frac{738}{37\cdot\cos(2\cdot t)-68}}$$

done

z(t) als Textzeile (mit Zeilenumbruch):

$$z(t)=\frac{162\cdot\sin(t)-171\cdot\cos(t)}{749}\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}+\frac{2971}{749}$$

Kontrollberechnung von Kurvenpunkten:

$$\text{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=0\right)$$

$$\begin{bmatrix}3.629210447\\-2.174899866\\-2.76289951\end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}0.7957276368\\0.7906087103\\10.63901646\end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=\pi\right)$$

$$\begin{bmatrix}-2.037755173\\-2.174899866\\10.69614384\end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}0.7957276368\\-5.140408443\\-2.705772135\end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}0.7957276368\\-5.140408443\\-2.705772135\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)\right)$$

7.301718071

$$\text{approx}\left(\sqrt{\frac{39933}{749}}\right)$$

7.301718071

c) Die Tangentialebene hat die Ebenengleichung $38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-d=0$ mit einem d derart, dass es im Schnitt mit der Kugeloberfläche nur einem gemeinsamen Berührpunkt P(x/y/z) gibt. Wir normieren den Normalenvektor auf den Kugelradius und addieren diesen zu M, um P zu erhalten:

$$\frac{1}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\right)}\times\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\times\sqrt{\frac{39933}{749}}+\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\\frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\\frac{-162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\\frac{72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\ \frac{-162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\ \frac{72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)\Rightarrow d$$

$$38\cdot\left(\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\right)+36\cdot\left(\frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{1629}{749}\right)+16\cdot\left(\frac{72}{\ }\right.$$

approx(d)

$$571.6648596$$

Die zweite Tangentialebene erhält man mit:

$$\frac{-1}{\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\right)}\times\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\times\sqrt{\frac{39933}{749}}+\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\ \frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{-171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\ \frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\ \frac{-72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{-171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\ \frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\ \frac{-72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)\Rightarrow d$$

$$-38\cdot\left(\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{596}{749}\right)-36\cdot\left(\frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\right)+16\cdot\left(\text{-}\right.$$

approx(d)

$$-227.6648596$$

□

Damit lauten die Tangentialebenen
$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-571.6648596=0$ bzw.
$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z+227.6648596=0$.

Anmerkung:
3D-Aufgaben sind oft numerisch nicht ganz einfach zu lösen. Hier erkennt man den Vorteil des CAS als wichtiges Werkzeug in der Mathematik. Das Auffinden eines klar strukturierten Lösungsweges ist wichtige Vorarbeit, ohne die das CAS nicht nutzbar wird.

Download dieser eActivity:
http://www.informatik.htw-dresden.de/
~paditz/BVEINS_Loesungen_13NT.vcp