Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.186

AUFGABE 01

Wir lösen die Aufgabe im eActivity-Menü wie folgt:
Urdatenliste in list1 abspeichern.
Der übersichtlichkeit halber werden die Zeilen einzeln in L1, L2, L3, L4 abgespeichert und dann zusammengefügt
(So können in den Eingabezeilen Datenfehler schneller erkannt und korrigiert werden):

```
{16,15,17,16,19,17,16,16,16,18,15,14,14,14,15}⇒▸
      {16,15,17,16,19,17,16,16,16,18,15,14,14,14,15}
{11,07,08,10,09,11,11,13,12,12,12,14,13,13,15}⇒▸
         {11,7,8,10,9,11,11,13,12,12,12,14,13,13,15}
{11,09,12,10,12,11,12,14,13,11,12,14,15,13,14}⇒▸
       {11,9,12,10,12,11,12,14,13,11,12,14,15,13,14}
{15,18,16,17,16,15,14,13,14,14,12,14,12,13,12}⇒▸
      {15,18,16,17,16,15,14,13,14,14,12,14,12,13,12}

augment(augment(augment(L1,L2),L3),L4)⇒list1
    {16,15,17,16,19,17,16,16,16,18,15,14,14,14,15,1▸
```

Nun wird mit dem Taschenrechner der empirische Mittelwert aus der Stichprobe mit dem Stichprobenumfang n=60 berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) = \text{mean(list1)}$$

```
mean(list1)
                                                269/20
approx(ans)
                                                 13.45
```

Es gilt $\bar{x}$ = 13,45 als Schätzung für den unbekannten Mittelwert μ der normalverteilten Grundgesamtheit X.

zweiseitiger Mittelwerttest bei bekannter Streuung $\sigma_0^2 = 2,5^2$
===

Nullhypothese H_0: $\mu=\mu_0$ (mit μ_0=13,5 als hypothetischer Mittelwert) bei zweiseitiger Alternative **Ha:** $\mu\neq\mu_0$ (d.h. zweiseitiger kritischer Bereich K)

Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit): α = 0,05 = 5%

Testgröße: Die Zufallsgröße (Stichprobenfunktion) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)$ als gemittelte Summe normalverteilter (unabhängiger) Zufallsgrößen X_1, X_2, ..., X_n, die wie X verteilt sind
(Grundgesamtheit X mit dem Mittelwert μ und der Streuung σ_0^2), ist wieder normal- verteilt mit dem Mittelwert μ und der Streuung σ_0^2/n. Damit ist die Zufallsgröße

$$T = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$ ist unter H_0 normalverteilt mit

Mittelwert=**0** und Streuung=**1.**
Die Testgröße T schwankt damit um den Mittelwert

0.
Weicht die mithilfe der Stichprobe berechnete (realisierte) Testgröße

$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$ wesentlich von 0 ab, wird die Nullhypothese abgelehnt, andernfalls wird kein Einwand gegen $\mathbf{H_0}$ erhoben.

Kritischer Bereich K (Ablehnungsbereich):
$(-\infty\ ,\ -z_{0,975}) \cup (z_{0,975}\ ,\ \infty)$, d.h.
fällt die realisierte Testgröße sehr negativ oder sehr positiv aus, wird μ_0 als hypothetischer Mittelwert auf dem Signifikanzniveau $\alpha=0,05$ abgelehnt. μ wurde durch $\bar{x}$ geschätzt und bei "richtiger" Nullhypothese erwartet man nur unwesentliche Abweichungen der Testgröße von 0.

Entscheidung: Wir berechnen t und bestimmen das Quantil $z_{0,975}$

$$\frac{13.45-13.50}{\frac{2.5}{\sqrt{60}}} \Rightarrow t$$

$$\frac{-\sqrt{15}}{25}$$

approx(ans)

-0.1549193338

InvNormCD "L",0.975,1,0

done

approx(x_1InvN)

1.959963985

Damit lautet der Ablehnungsbereich

$K=(-\infty\ ,\ -1.96)\cup(1.96\ ,\ \infty)$ und es gilt $t=-0.155\notin K$, d.h. auf Grundlage der ausgewerteten Stichprobe ist $\bar{x}=13{,}45$ nur eine nichtsignifikante Abweichung vom hypothetischen Mittelwert $\mu_0=13{,}50$ und es besteht kein Einwand gegen die Annahme, dass die Grundgesamtheit den Mittelwert $\mu_0=13{,}50$ besitzt.

Hinweis:
Mit einer konkreten Stichprobe (hier vom Umfang $n=60$) kann man die Richtigkeit einer Hypothese nicht beweisen. Deshalb wir in der Entscheidung auch die Sprechweise "Die Hypothese ist richtig" vermieden!
Es wird vorsichtiger formuliert "Es besteht kein Einwand gegen die Hypothese".
Diese Sprechweise hat später in der beruflichen Praxis juristische Bedeutung: Man kann nicht auf Grundlage einer Stichprobe eine allgemeingültige Aussage zur Richtigkeit einer Hypothese treffen.
Man kann mithilfe einer Stichprobe lediglich einen Einwand erheben bzw. keinen Einwand gegen die Nullhypothese haben.

Das Signifikanzniveau α charakterisiert in diesem Zusammenhang den Fehler 1.Art.

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.186

AUFGABE 02
Wir lösen diese Aufgabe im eActivity-Menü wie folgt

und nutzen dabei den oben für die
1. Aufgabe beschriebenen Lösungsweg mit Modifikation auf die einseitige Alternative (einseitiger kritischer Bereich K):

einseitiger Mittelwerttest bei bekannter Streuung $\sigma_0^2 = 0{,}02^2$
==▸

Nullhypothese H_0: $\mu=\mu_0$ (mit $\mu_0=2$ als hypothetischer Mittelwert) bei einseitiger Alternative
Ha: $\mu<\mu_0$ (d.h. einseitiger kritischer Bereich K)

Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit)**:** α = 0,05 = 5%

Testgröße: Die Zufallsgröße (Stichprobenfunktion)
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)$ als gemittelte Summe
normalverteilter (unabhängiger) Zufallsgrößen X_1, X_2, ..., X_n, die wie X verteilt sind (Grundgesamtheit X mit dem Mittelwert μ und der Streuung σ_0^2), ist wieder normal- verteilt mit dem Mittelwert μ und der Streuung σ_0^2/n. Damit ist die Zufallsgröße

$$T = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$ ist unter **H_0** normalverteilt mit

Mittelwert=**0** und Streuung=**1.**
(Man beachte, dass **H_0** stets als Gleichung $\mu=\mu_0$ notiert wird, um in T den unbekannten Parameter μ

durch μ_0 ersetzen zu können.)
Die Testgröße T schwankt damit um den Mittelwert 0.
Weicht die mithilfe der Stichprobe berechnete (realisierte) Testgröße

$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$ wesentlich von 0 nach links ab, wird die Nullhypothese abgelehnt, andernfalls wird kein Einwand gegen **H_0** erhoben (einseitige Alternative). $\bar{x}$ wurde berechnet als 1,97.

Kritischer Bereich K (Ablehnungsbereich):
$(-\infty\ ,\ -z_{0,95})$, d.h.
fällt die realisierte Testgröße sehr negativ aus, wird μ_0 als hypothetischer Mittelwert auf dem Signifikanzniveau α=0,05 abgelehnt. μ wurde durch $\bar{x}$ geschätzt und bei "richtiger" Nullhypothese erwartet man nur unwesentliche Abweichungen der Testgröße von 0 nach links.

Entscheidung: Wir berechnen t und bestimmen das Quantil $z_{0,95}$

$$\frac{1.97-2.00}{\frac{0.02}{\sqrt{20}}} \Rightarrow t$$

$$-3\cdot\sqrt{5}$$

approx(ans)

$$-6.708203933$$

InvNormCD "L",0.95,1,0

done

approx($-x_1$InvN)

-1.644853627

Damit lautet der Ablehnungsbereich
$K=(-\infty, -1.645)$ und es gilt
$t=-6.71 \in K$, d.h. auf Grundlage der ausgewerteten Stichprobe ist $\bar{x}=1.97$ eine signifikante Abweichung vom hypothetischen Mittelwert $\mu_0=2,00$ nach links.
Es besteht damit ein Einwand gegen die Annahme, dass die Grundgesamtheit den Mittelwert $\mu_0=2,00$ besitzt.
Die Nullhypothese wird auf Grundlage der ausgewerteten Stichprobe auf einen Signifikanzniveau von $\alpha=0,05$ abgelehnt.

Abschließender Hinweis:
Die oben durchgeführten Tests sind im Testmenü des Taschenrechners enthalten:

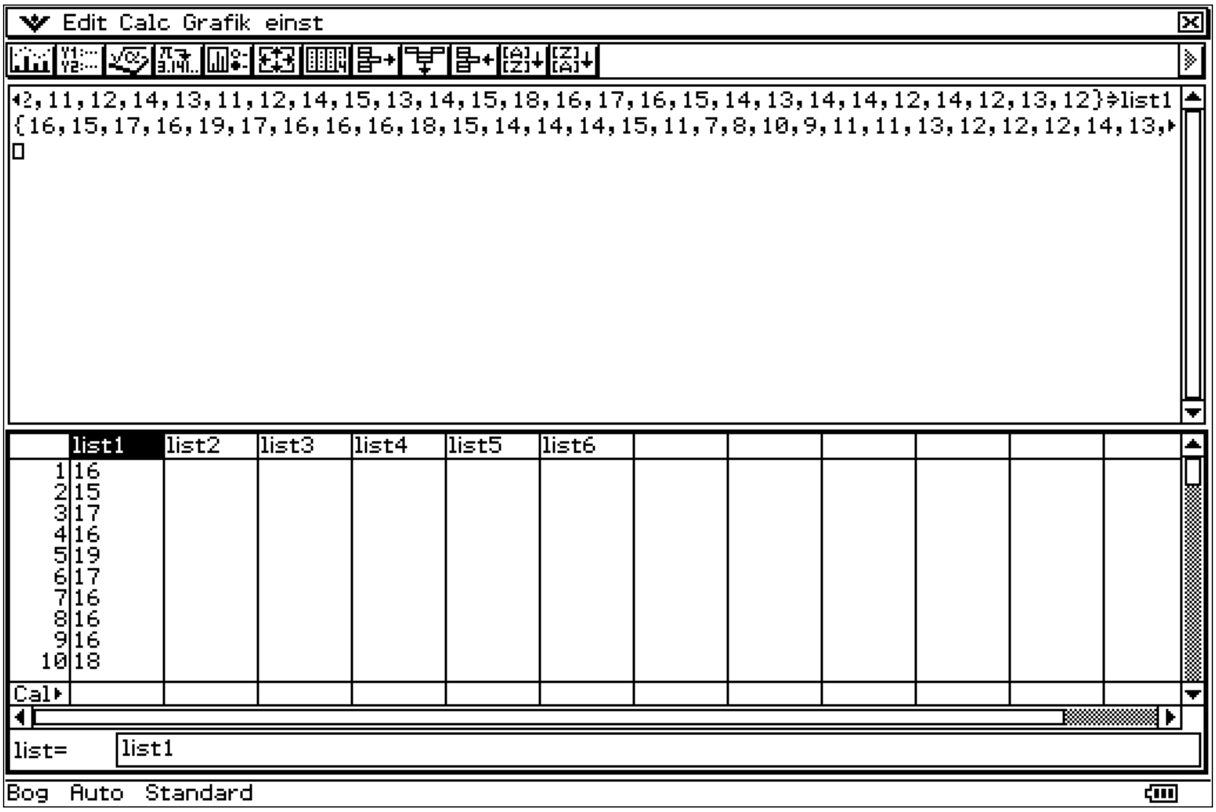
AUFGABE 01

AUFGABE 02

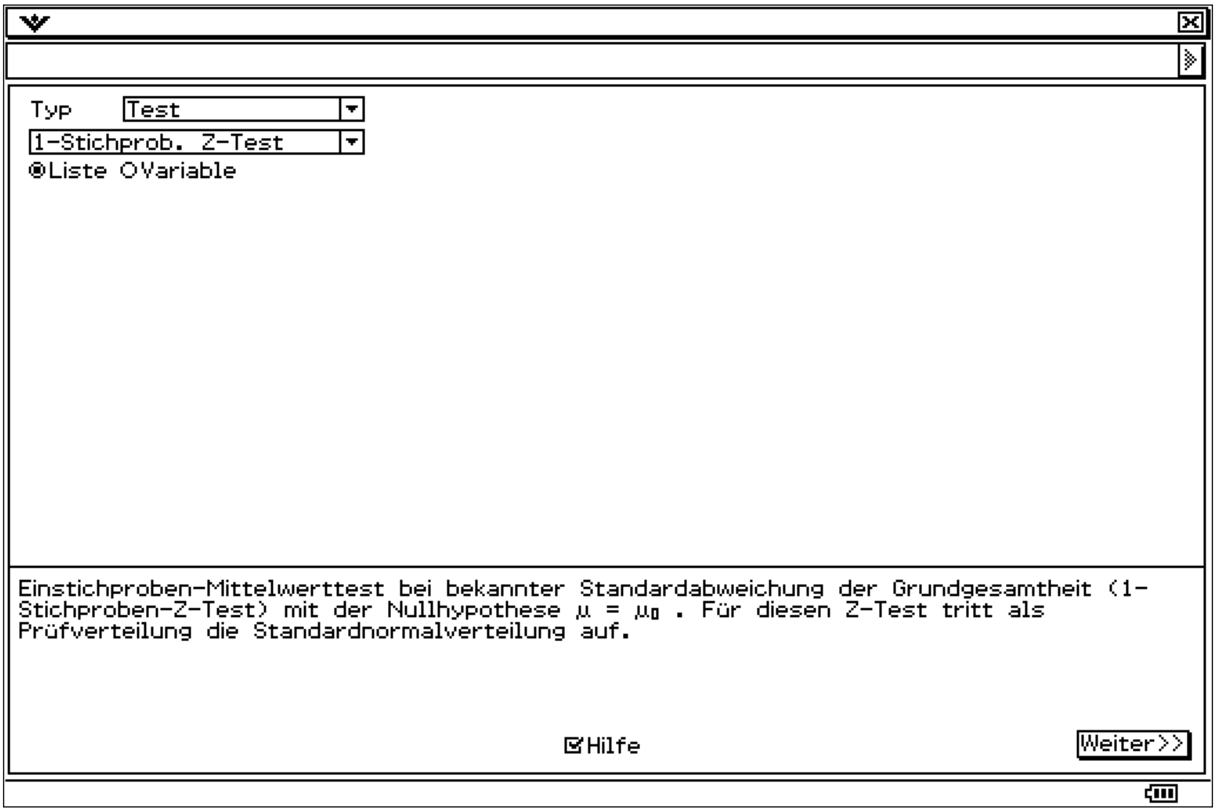
Download dieser eActivity:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/BVEINS_Loesungen_13NT.vcp

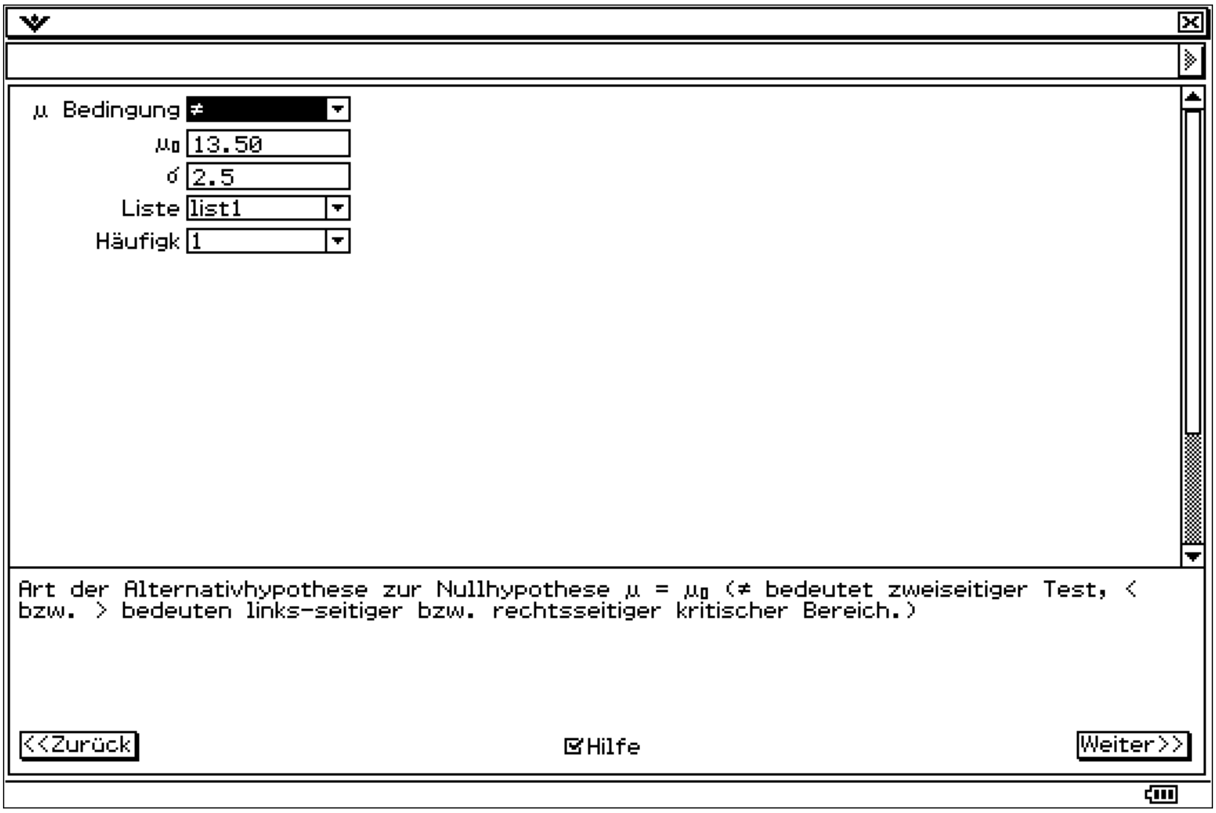
Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT S.186

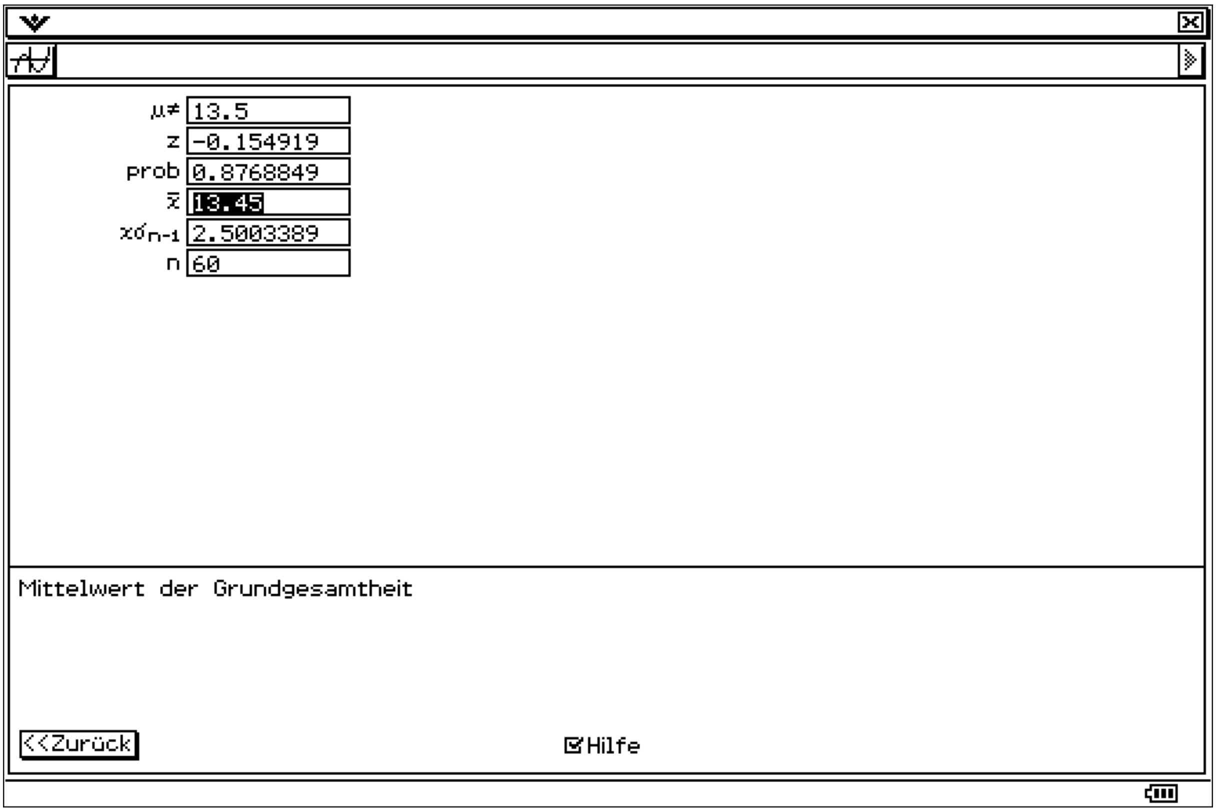
Lösung AUFGABE 01 im Statistik-Menü



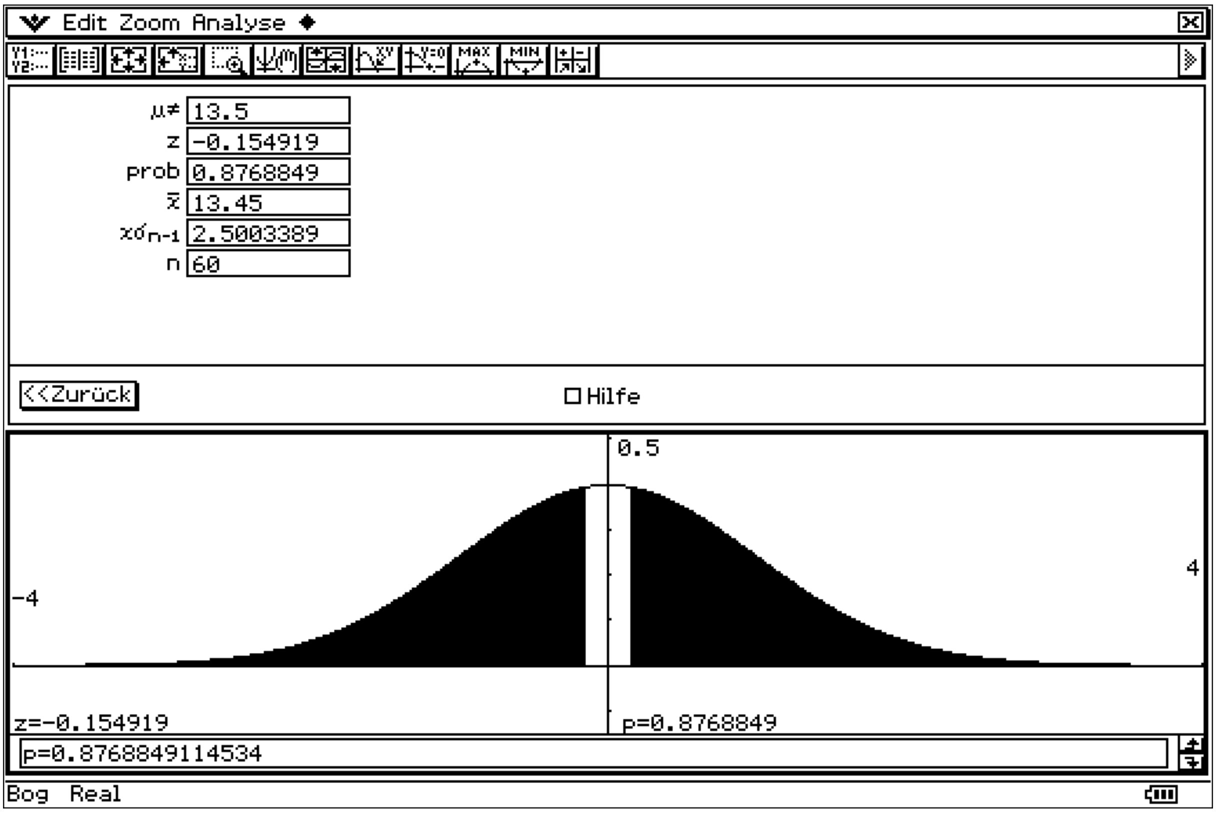
Nach Eingabe der Liste list1 wird unter CALC das Testmenü geöffnet







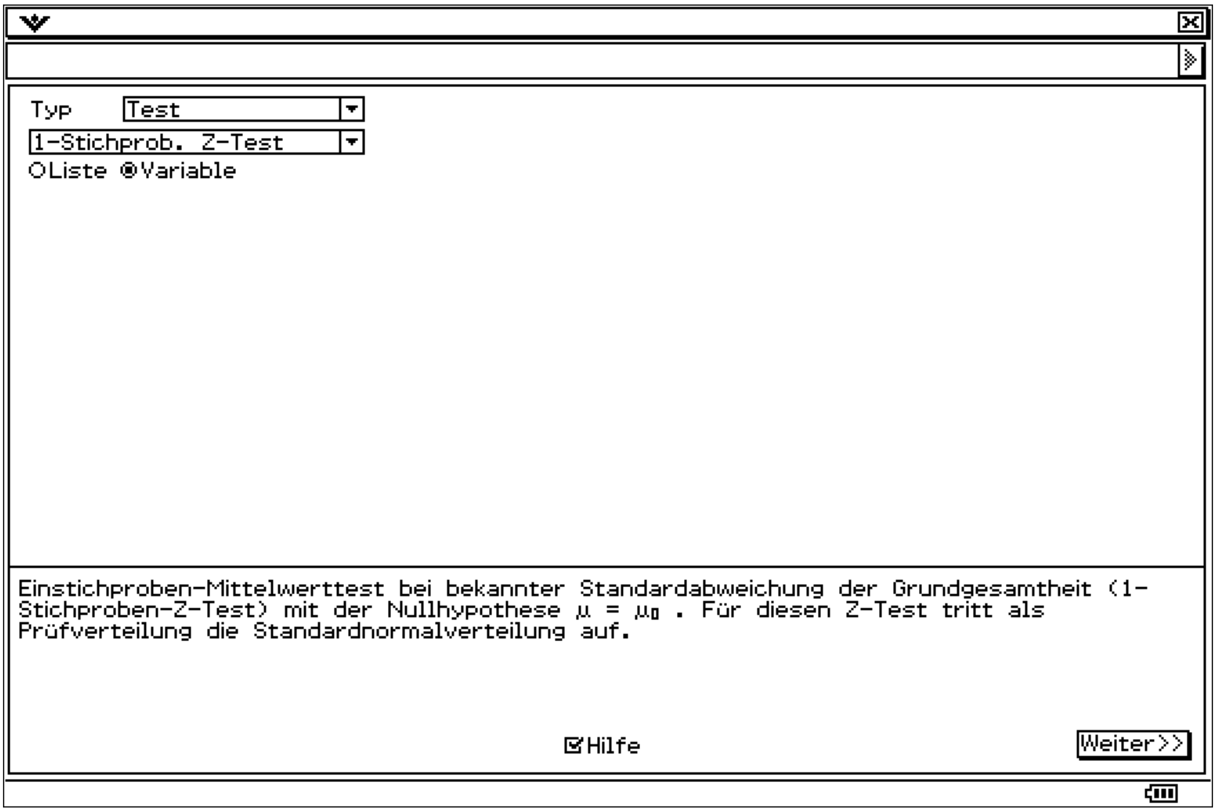
Der p-Wert (Systemvariable prob) beschreibt die „kritische“ Irrtumswahrscheinlichkeit, d.h. den ab der berechneten Testgröße z bzw. –z zweiseitig schwarz markierten Bereich unter der Gaußschen Glockenkurve (Flächeninhalt p > alpha bedeutet Nichtablehnung von Ho, da in diesem Fall die realisierte Testgröße außerhalb des kritischen Bereiches liegt). Der p-Wert ist damit ein unmittelbarer Vergleichswert für alpha, da alpha selbst im Testmenü nicht einzugeben ist. Damit trifft auch der Rechner nicht die Testentscheidung sondern der Nutzer:

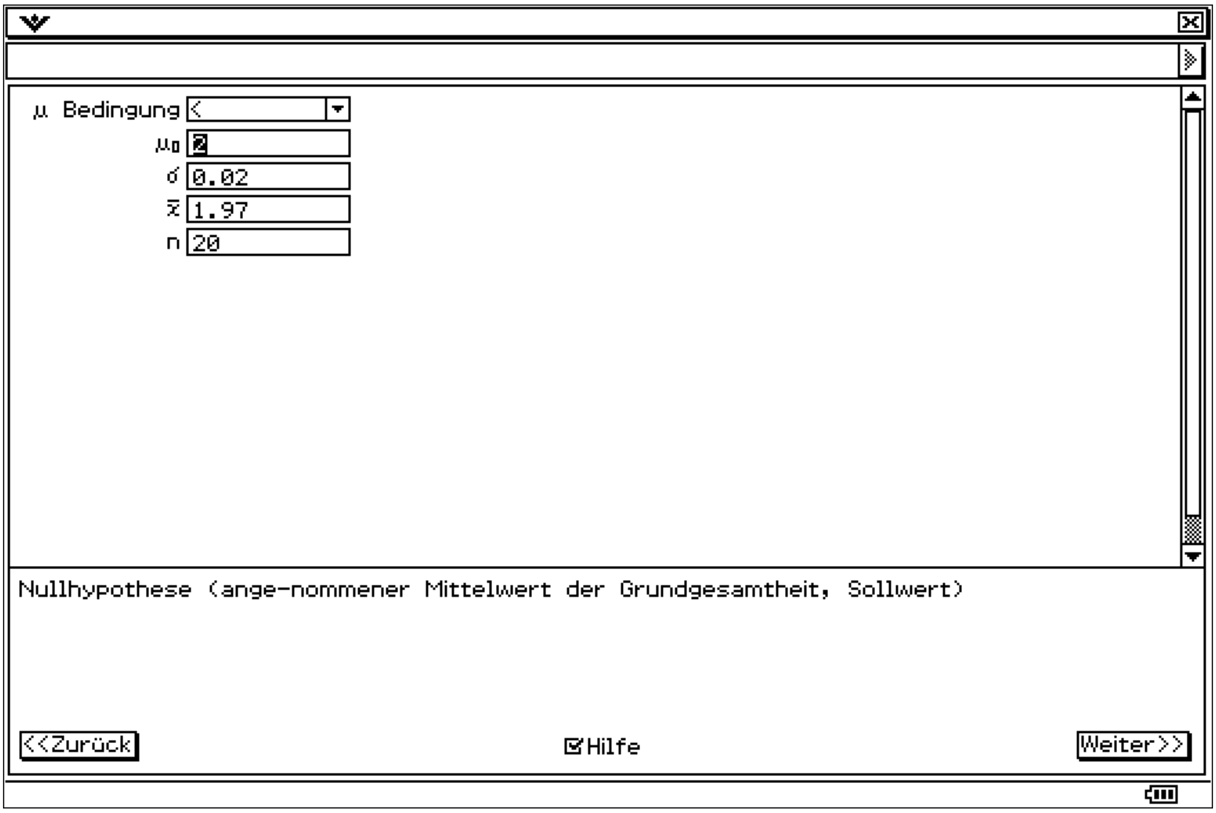


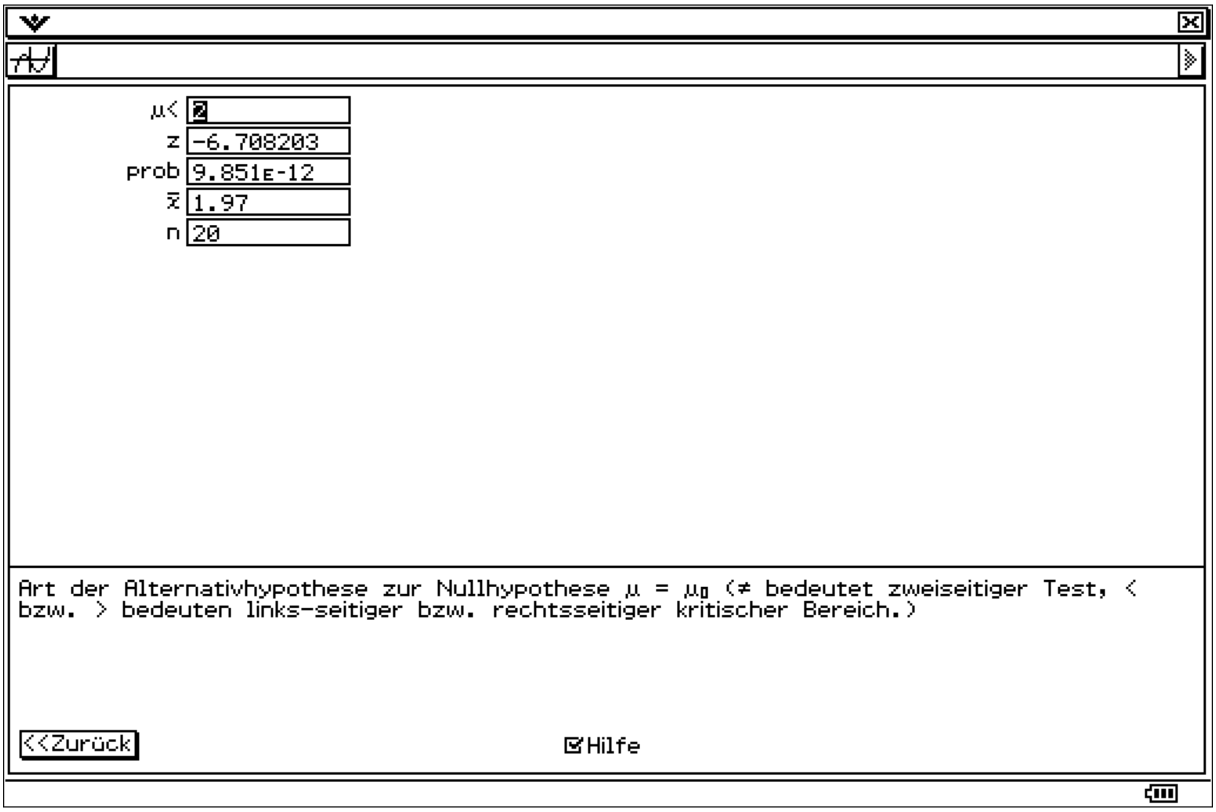
p = 0.8769 > alpha = 0.05 bedeutet: realisierte Testgröße t = z = -0.1549 ist nicht im kritischen Bereich. Damit besteht kein Einwand gegen Ho.

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT S.186

Lösung AUFGABE 02 im Statistik-Menü







p = 9,85*10^-12 < alpha = 0.05. damit liegt die realisierte Testgröße im kritischen Bereich. Ho wird auf Grundlage der ausgewerteten Stichprobe abgelehnt, da der empirische Mittelwert signifikant (d.h. wesentlich) vom hypothetischen Sollwert abweicht.