

Arbeitsmaterial zur Fachtagung zum Berufl. Gymnasium SBI00940

Die Entwicklung des mathematisch/naturwissenschaftlichen Unterrichts: Workshop zum Einsatz des ClassPad 330 im Unterricht des Beruflichen Gymnasiums

Inhaltlich: Diskussion über die Möglichkeiten des fächerverbindenden Unterrichts und des Einsatzes des symbolverarbeitenden Taschenrechners Classpad330.

Grundlage: neue Mathematik-Schulbücher von Bildungsvlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

Kl.-stufe 11

<http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf>

Jg.-stufe 12/13

<http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf>

bzw.

<http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf>

und

<http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf>

Das Arbeitsmaterial dieses Workshops liegt als pdf-Dokument (26 Seiten) zum Download bereit unter

<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Arbeitsmaterial-SBI00940-BGym-2008.pdf>

Software: aktuelles Betriebssystem 3.03 sowohl im ClassPad330 als auch im ClassPad-Manager Professional, der zugehörigen PC-Software (kostenfreie Schullizenzen verfügbar)

Folgende Themen werden im Workshop diskutiert:

1. Arbeit mit eActivities im ClassPad330:

Nutzung von elektronischen Arbeitsblättern zur Textverarbeitung im Sprachunterricht oder im fremdsprachlichen Fachunterricht unter gleichzeitiger Einbindung von mathematischen Berechnungen oder geometrischen Zeichnungen. Der ClassPad verfügt über alle Buchstaben und Schriftzeichen des gesamten EU-Raumes bis hin zu griechischen und kyrillischen Buchstaben. Wir betrachten ein Beispiel in bulgarischer Sprache, ein weiteres in deutscher Sprache.

2. Arbeit mit Tabellenkalkulationen im ClassPad330:

Die Tabellenkalkulation verwendet im Hintergrund mathematische Formeln, die an Excel im Microsoft Office erinnern. Dabei sind hier umfassendere Möglichkeiten vorhanden, da die gesamte mathematische Software genutzt werden kann, z.B. Integrale zur Darstellung von Tabellenelementen. Es wird eine einfache Fourieranalyse für einen Rechteckimpuls betrachtet. Die Amplituden und Frequenzen für passende Cosinus-Schwingungen werden bestimmt.

3. Arbeit mit logarithmisch skalierten Koordinatensystemen im ClassPad330:

Das Verhalten von technischen Bauelementen wird über Kennlinien beschrieben, die zunächst experimentell in Datensätzen erfasst werden. Es wird eine L-förmige Kennlinie durch eine nichtlineare Regression berechnet und im logarithmisch skalierten Koordinatensystem betrachtet.

Download des kompletten Datenpakets für den ClassPad als *.vcp-file:

<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/SBI00940.vcp>

1. Arbeit mit eActivities im ClassPad330

Wir betrachten zuerst eine Geometrieaufgabe aus dem sächsischen Mathematikabitur 2008, Grundkurs – Ersttermin im eActivity-Menü des Classpad. Hier noch einmal die Aufgabenstellung:

Wahlaufgabe 1

Eine Gemeinde hat in einem ebenen Geländeabschnitt ein Grundstück erworben, um es als Gewerbegebiet zu erschließen.

In die Flurkarte der Gemeinde wird ein x-y-Koordinatensystem so eingetragen, dass die Bundesstraße von B-Dorf nach A-Stadt durch die x-Achse beschrieben wird.

Eine Längeneinheit entspricht 100 m.

Das erworbene Grundstück hat die Form eines Rechtecks mit dem Punkt $C(-1; 3)$ als Eckpunkt.

Die Gerade g verläuft durch Punkt C in

Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und begrenzt

das Grundstück. Die Punkte $D(2; -2)$ und $E(-2; -3)$ liegen auf je einer Seite des Rechtecks.

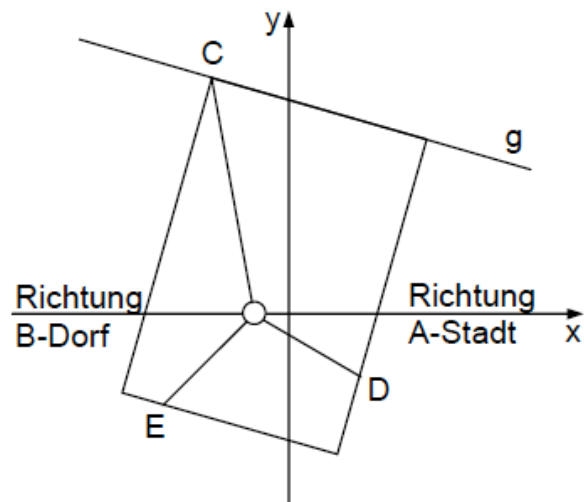


Abbildung (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des erworbenen Grundstücks in Quadratmeter.

b) Von den Punkten C , D und E sollen Straßen geradlinig zu einem gemeinsamen Punkt auf der Bundesstraße, dem Mittelpunkt eines Kreisverkehrs, führen.

Aus Kostengründen soll die Summe der Längen der drei Straßen minimal werden.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreisverkehrs und die Gesamtlänge der Straßen.

Hinweis: Die Straßenbreiten und der Durchmesser des Kreisverkehrs sind in den Berechnungen zu vernachlässigen.

c) Nach Fertigstellung der Straßen ergaben die Beobachtungen des Fahrzeugaufkommens, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,6 % drei aufeinander folgende Fahrzeuge den Kreisverkehr an der Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlassen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Fahrzeug den Kreisverkehr nicht an dieser Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlässt.

Der folgende Text wurde als eActivity im Classpad330 generiert, wobei der Aufgabentext nunmehr bereits interpretiert wird mit dem Blick auf einen möglichen Lösungsweg:

**Sachsen 2008 Abitur Math-GK-ET
Lösungen mit TR-Unterstützung
(eActivity, Prof. Paditz, Dresden)**

Wahlaufgaben

**Teil D: Wahlaufgabe 1 (Geometrie,
Stochastik)**

geg. Rechteck (gedreht) im x - y -Koordinatensystem
mit Eckpunkt $C(-1;3)$ und Richtung $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ einer
Geraden g durch C , Parallele zu g durch $E(-2;-3)$,
Normale durch C und Parallele dazu durch $D(2;-2)$
(im Geometriebild $G(-2;2)$), Richtung AB auf
 x -Achse.

vgl. Konstruktion im Geometriefenster

Rechteck im Koordinatensystem



Wahlaufgabe a)

ges. Flächeninhalt des Rechtecks (1 Einheit =
100m) in m^2

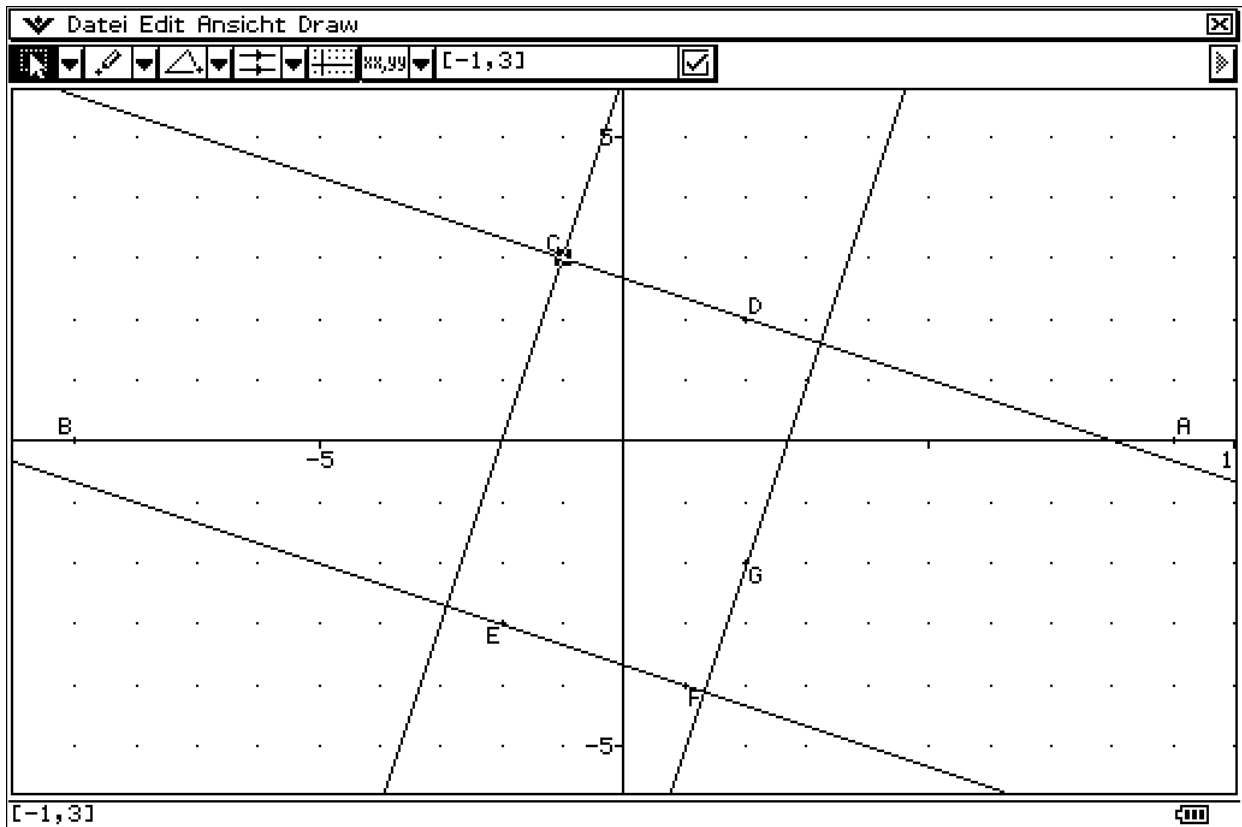
Lösung: im Geometriebild kann man ablesen:
Flächeninhalt = 26.6 = 266000[m²]

analytische Lösung:

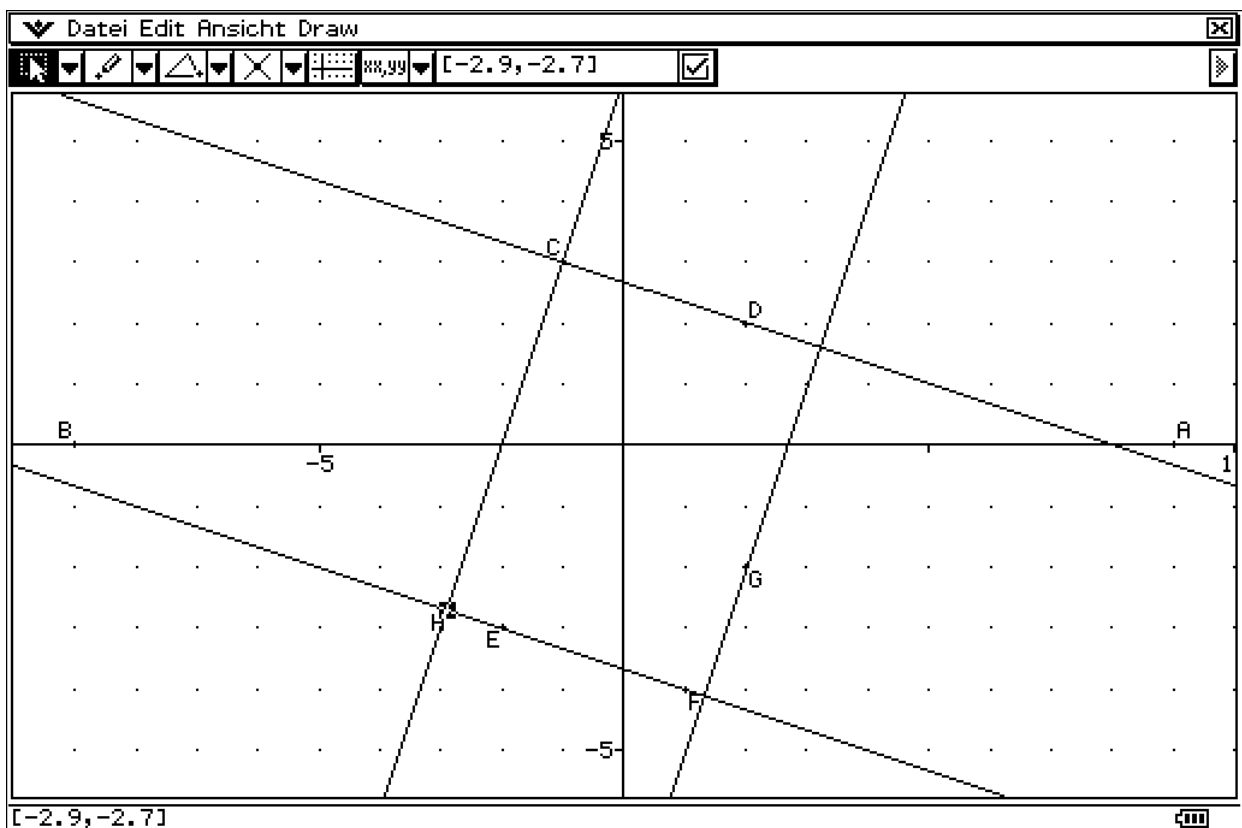
Geradengleichungen aufstellen, Schnittpunkte
berechnen:

$$g_1(r) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + r \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ Parallele } g_2(s) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} + s \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

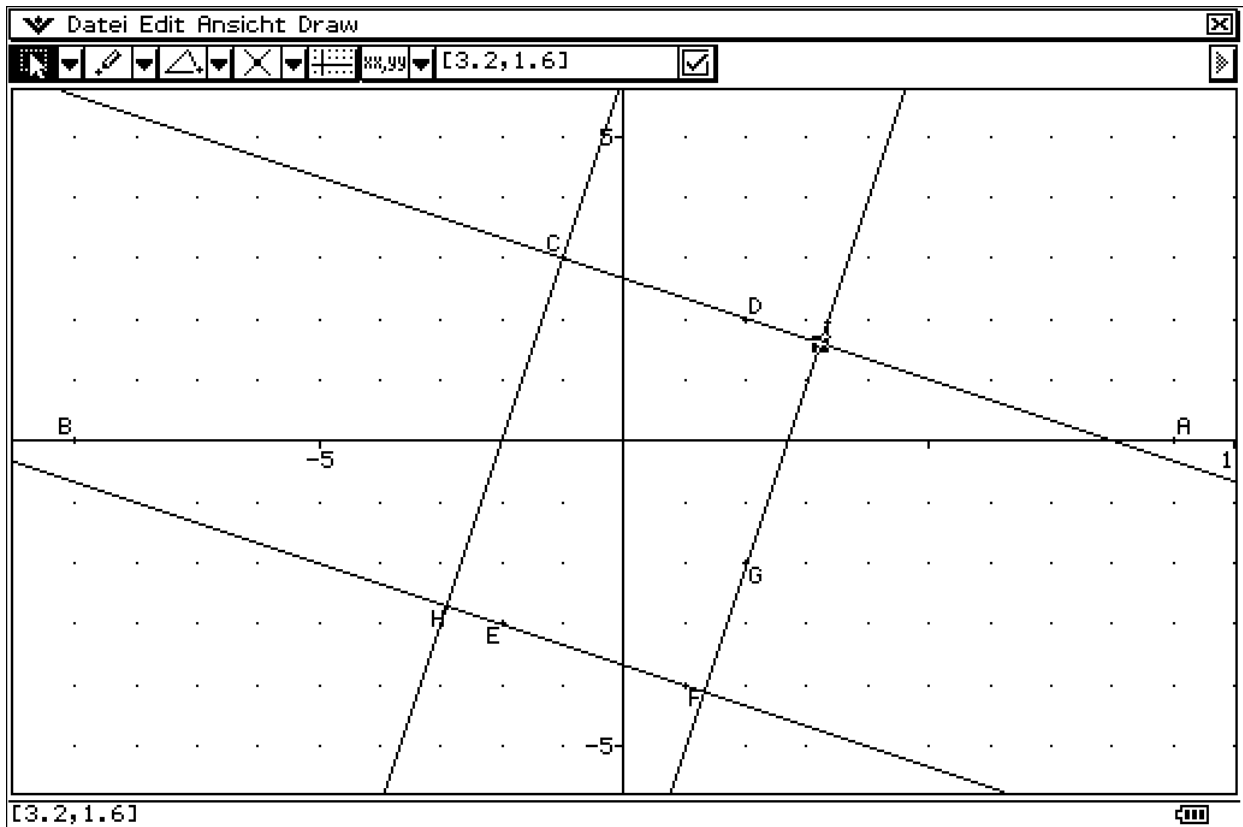
Die folgenden Geometriebilder ergeben sich aus der oben definierten Geometriezeile, sofern diese geöffnet wird. Die einzelnen Kenngrößen erhält man durch Markieren der zugeordneten Objekte im Geometriearbeitsfenster.



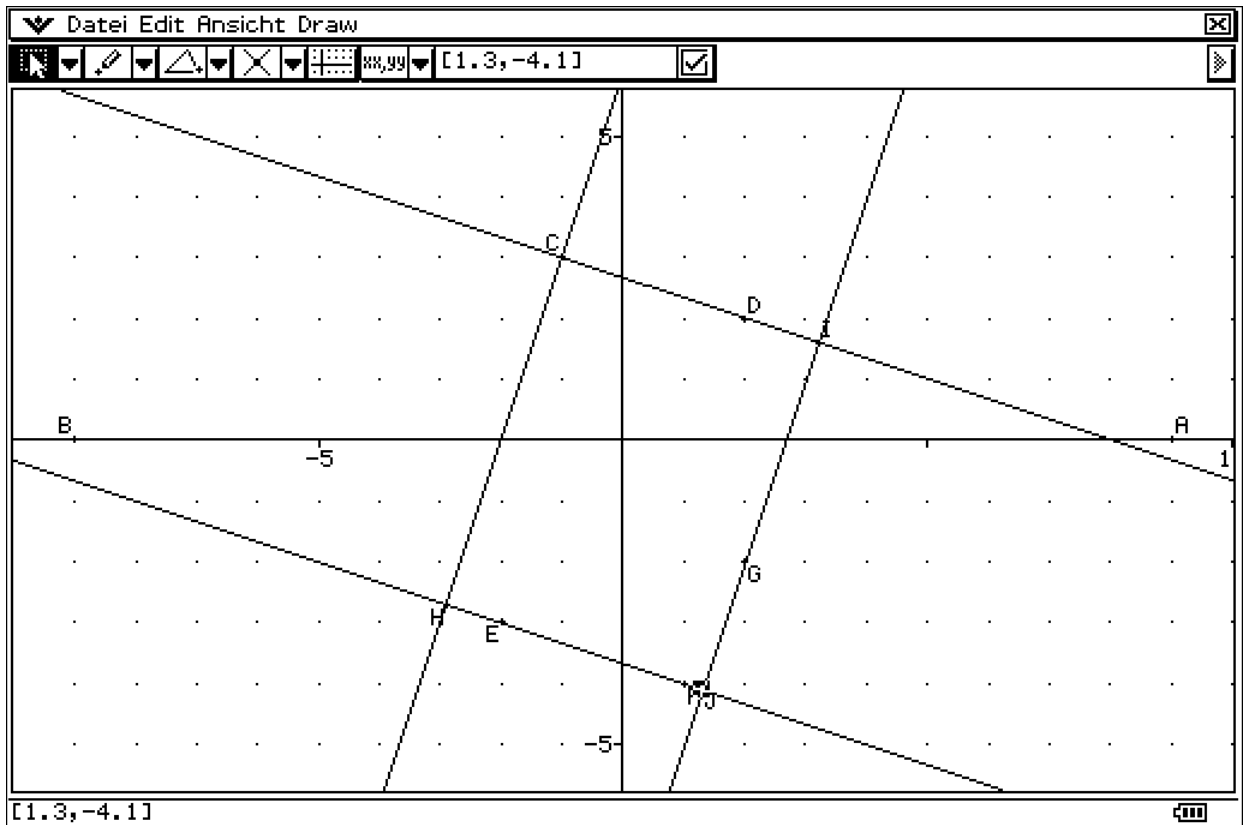
Die Konstruktion mit markiertem Punkt C (D und F sind Hilfspunkte für die Geradenkonstruktion)



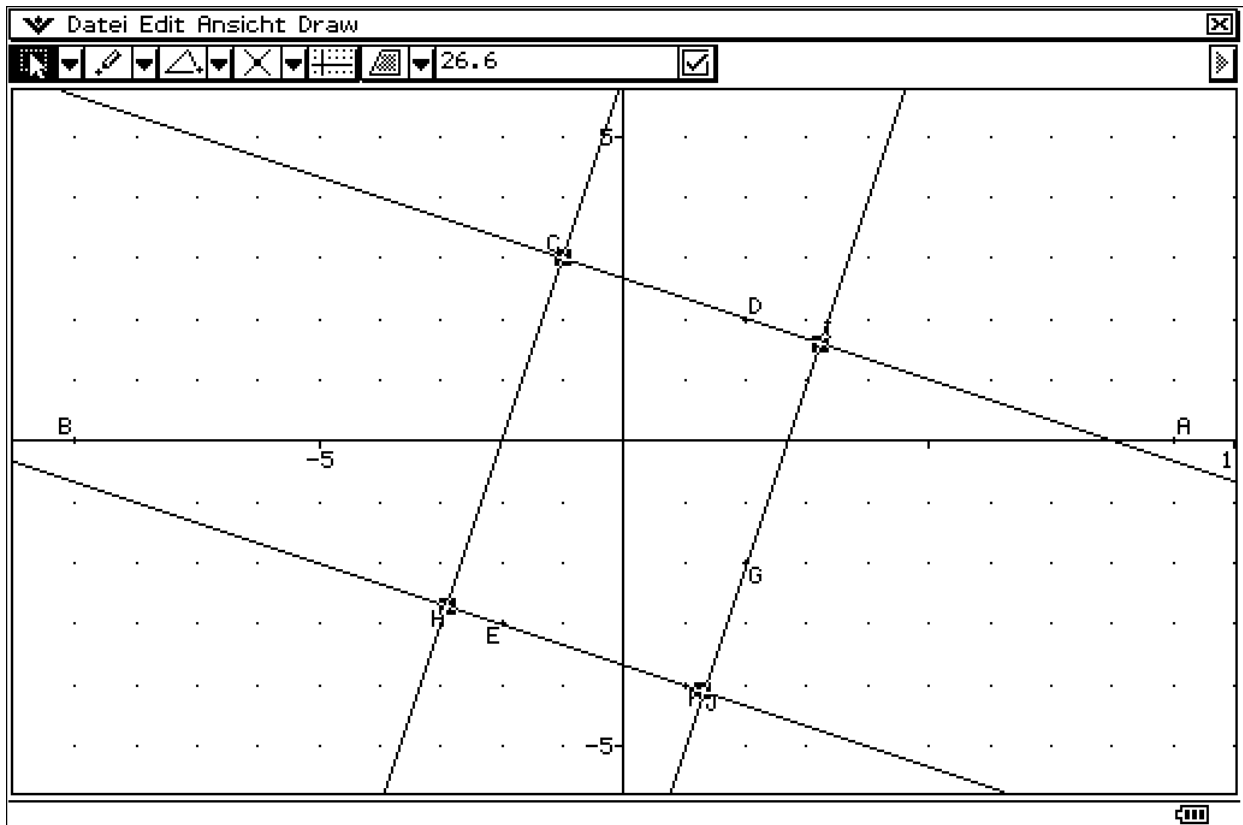
Schnittpunkt H ist markiert.



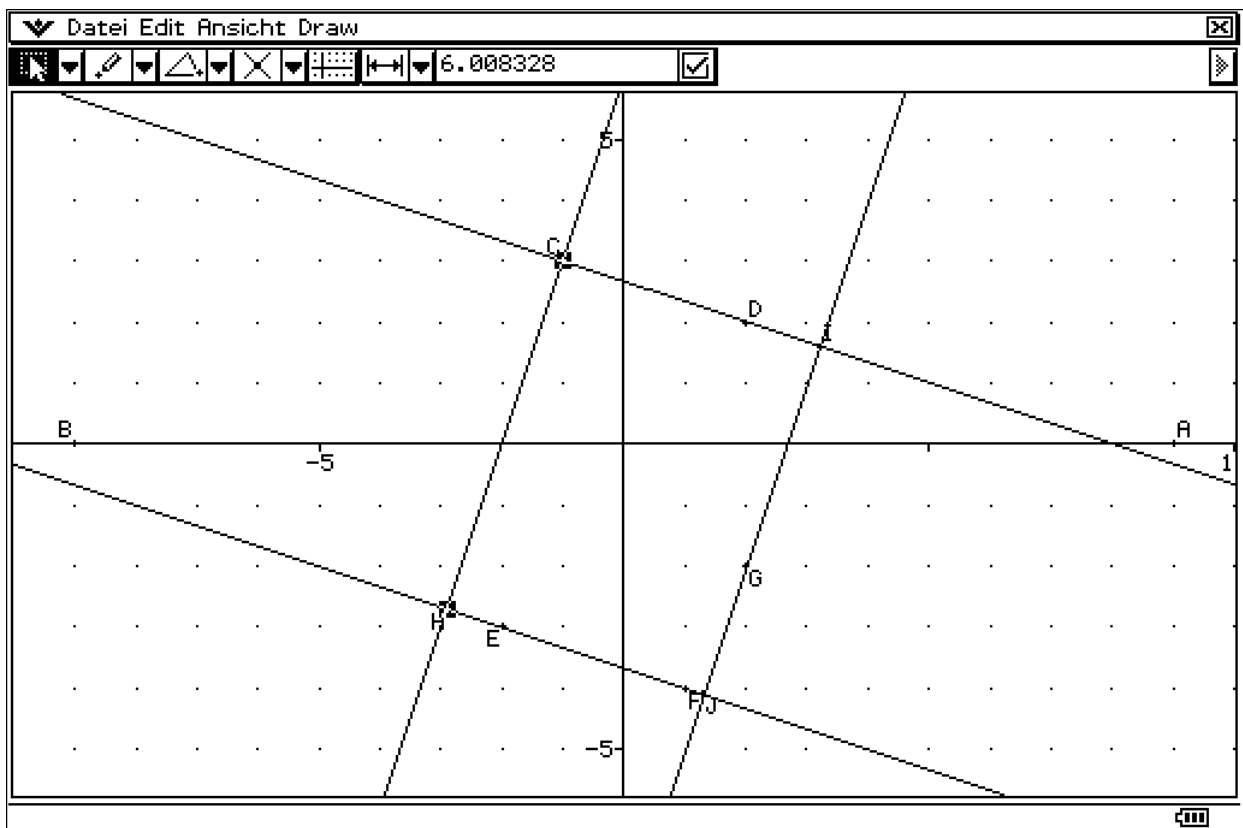
Schnittpunkt I ist markiert.



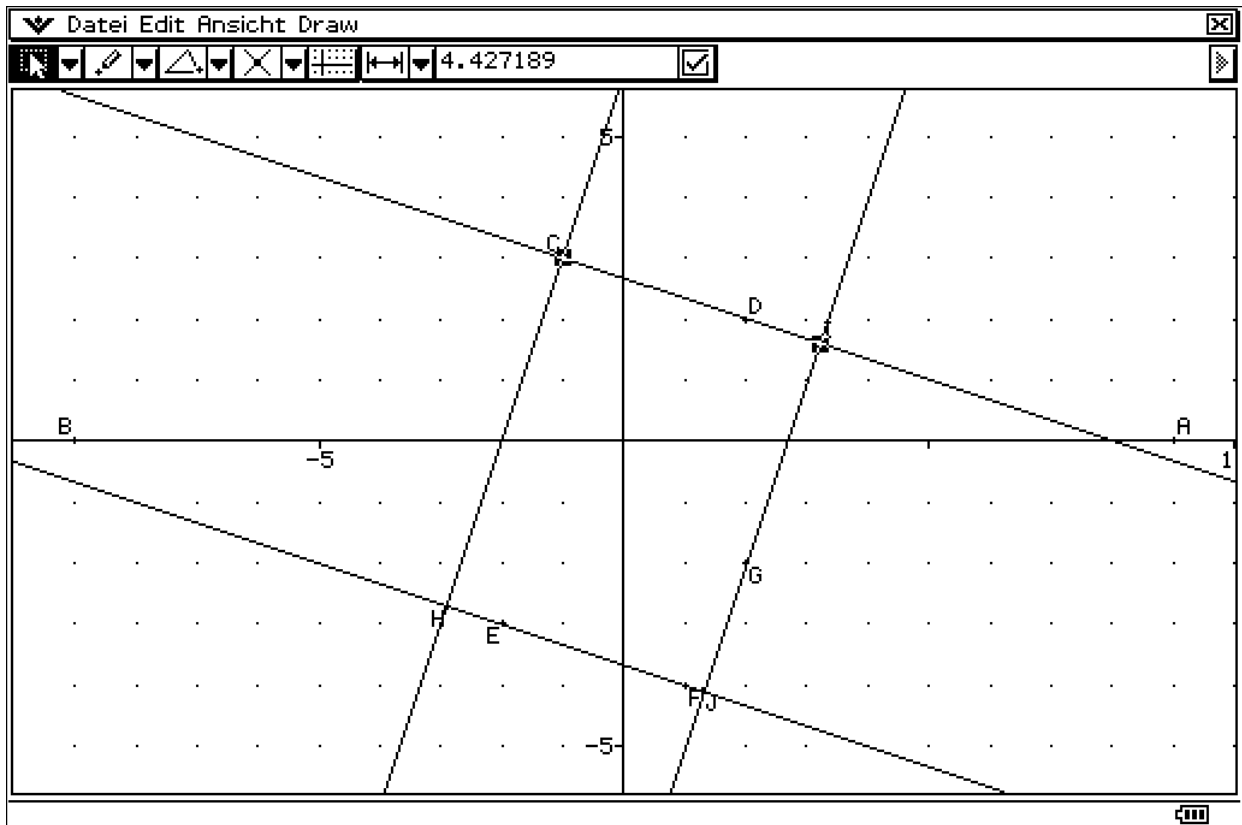
Schnittpunkt J ist markiert.



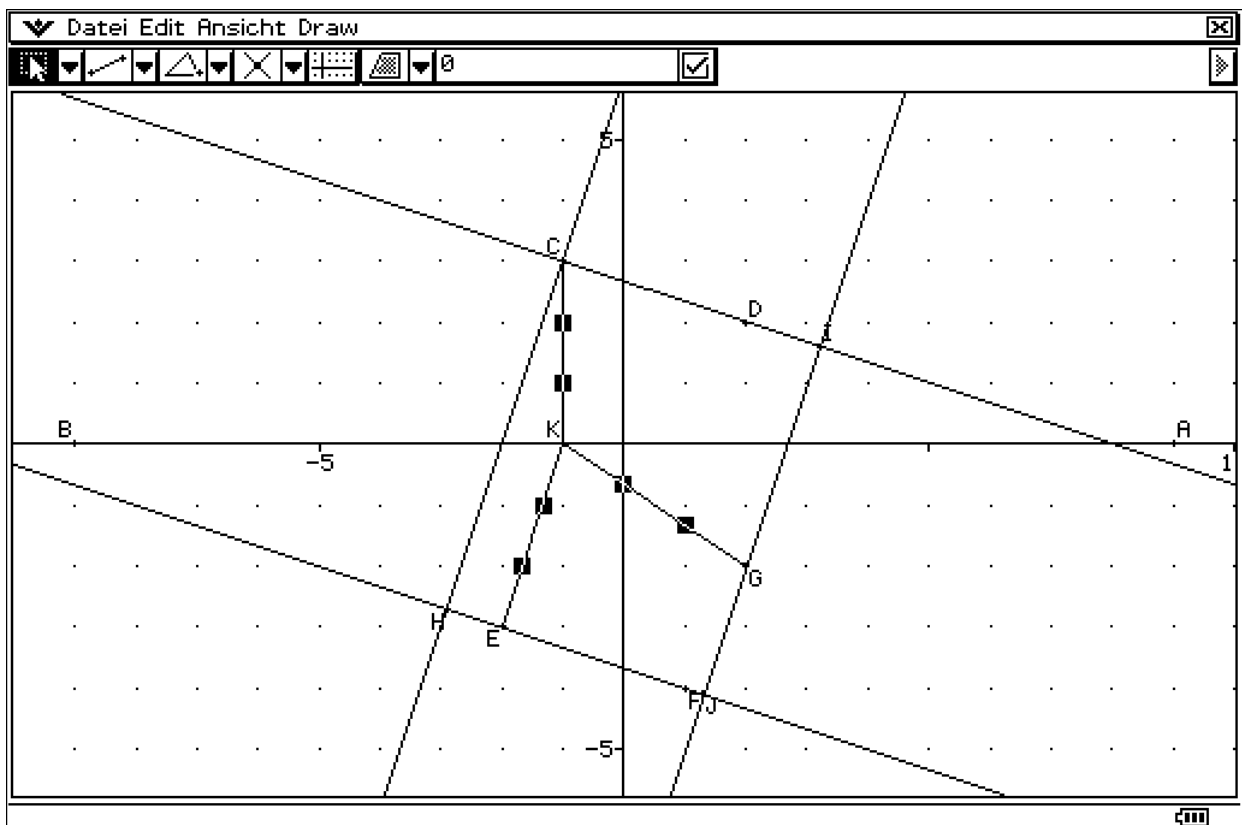
Flächeninhalt des Rechtecks ist ausgemessen: 26.6



Strecke CH ist ausgemessen.



Strecke CI ist ausgemessen.



Skizze zur Lage von K und den Verbindungsstrecken zu C, D(hier G) und E.

Normale durch C auf g_1 mit orthogonaler Richtung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}:$$

$$h_1(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ Parallele dazu durch } \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ist}$$

$$h_2(u) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + u \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Schnittpunkte: $g_1 \cap h_1 = C$, $g_2 \cap h_1 = H$, $g_1 \cap h_2 = I$,
 $g_2 \cap h_2 = J$,

Rechnung im TR:

$$\text{solve}(\{-1+3r=-1+t, 3-r=3+3t\}, \{r, t\})$$

$$\{r=0, t=0\}$$

$$\text{solve}(\{-2+3s=-1+t, -3-s=3+3t\}, \{s, t\})$$

$$\{s=-0.3, t=-1.9\}$$

$$\text{solve}(\{-1+3r=2+u, 3-r=-2+3u\}, \{r, u\})$$

$$\{r=1.4, u=1.2\}$$

$$\text{solve}(\{-2+3s=2+u, -3-s=-2+3u\}, \{s, u\})$$

$$\{s=1.1, u=-0.7\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} \Rightarrow C$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Big|_{t=-\frac{19}{10}} \Rightarrow H$$

$$\begin{bmatrix} -2.9 \\ -2.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + u \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Big|_{u=1.2} \Rightarrow I$$

$$\begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + u \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mid u = -0.7 \Rightarrow J$$

$$\begin{bmatrix} 1.3 \\ -4.1 \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}(C-H) \times \text{norm}(C-I)$$

$$26.6$$

Wahlaufgabe b)

ges. minimale Summe der Entfernungen von C, D, E zu K

Lösung: Sei $K(x, \emptyset)$

Rechnung in TR:

$$\begin{bmatrix} x \\ \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow K$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow D$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow E$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}(K-C) + \text{norm}(K-D) + \text{norm}(K-E)$$

$$\sqrt{8-4 \cdot x+x^2} + \sqrt{10+2 \cdot x+x^2} + \sqrt{13+4 \cdot x+x^2}$$

Define $f(x) = \sqrt{8-4 \cdot x+x^2} + \sqrt{10+2 \cdot x+x^2} + \sqrt{13+4 \cdot x+x^2}$
 done
 fMin(f(x),x)
 {MinValue=9.575838106,x=-0.2484939505}
 Der Kreisverkehr liegt im Punkt $K(-0.2484939505;0)$.
 Die minimale Gesamtlänge beträgt 957.584m.

Wahlaufgabe c)

ges. Wahrscheinlichkeit des Ausfahrens aus K nicht in Richtung A, wobei bekannt ist, dass drei hintereinander fahrende Fahrzeuge mit Wahrscheinlichkeit 63,6% in Richtung A den Punkt K verlassen.

Lösung:

$p = P(\{\text{ein Fahrzeug verläßt K in Richtung A}\})$, dann gilt

$P(\{\text{drei aufeinanderfolgende Fahrzeuge verlassen K in Richtung A}\}) = p^3 = 0.636$

dann ist $p = \sqrt[3]{0.636} = 0.8599747604$

Rechnung im TR:

$\sqrt[3]{0.636}$	0.8599747604
1-ans	0.1400252396

Somit gilt

$P(\{\text{ein Fahrzeug verläßt K nicht in Richtung A}\}) = 1-p = 1-0.8599747604 = 0.14$

Innerhalb der eActivity sind Textkorrekturen oder Berechnungsfehler schnell zu erledigen bzw. zu korrigieren. Die elektronischen Dokumente können unkompliziert über das Internet ausgetauscht werden oder direkt von Rechner zu Rechner übertragen werden.

Derartige Dokumente könnten vom Schüler als Hausarbeit erstellt werden oder vom Lehrer als Unterrichtsvorbereitung entstanden sein.

eActivities erlauben das Hineinkopieren von externen Texten, z.B. aus einem WORD.doc und das Ausdrucken z.B. als pdf-file, wenn als Drucker Adobe Acrobat installiert ist. Damit ergeben sich neue moderne Unterrichtsmöglichkeiten für Lehrer und Schüler.

Die folgende eActivity behandelt eine Mathematikaufgabe in bulgarischer Sprache, wobei der bulgarische Text aus einem externen Dokument (Mathematik-Aufnahmetest 2008 an der Hochschule für Bauingenieurwesen und Architektur in Sofia) kopiert wurde.

**ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН
КАРАВЕЛОВ" - СОФИЯ**

**КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
25. 07. 2008 г.**

ТРЕТИ ВАРИАНТ

(ClassPad-Technology: Ludwig Paditz)

Higher School of Civil Engineering (YSU)



ЗАДАЧА 1:

=====

Да се решат:

а) неравенството $|2x+3| < 4-x$;

б) уравнението $1 + \log_2(x-1) = \log_{(x-1)}(4)$.

Решение:

ClassPad:

`solve(|2x+3|<4-x,x)`

$$\left\{ -7 < x < \frac{1}{3} \right\}$$

неравенството: step by step (main-menu)



Die eingefügten eingerahmten Zeilen beinhalten wieder Fenster, die geöffnet werden können. Zuerst wurde eine Kommentarzeile eingefügt (zusätzliche Hinweise, Zusatztext, Übersetzung). Die untere Zeile beinhaltet ein Fenster mit Berechnungen (Schritte zur Lösung).

$$\text{solve}\left(1+\log_2(x-1) = \log_{(x-1)}(4), x\right)$$

$$\left\{x=3, x=\frac{5}{4}\right\}$$

уравнението: step by step (main-menu)



Stop

ЗАДАЧА 2:

=====

Дадена е функцията $f(x) = x^2 - (m-2)x + (m+2)$,
където m е реален параметър.

Да се намерят стойностите на m , при които:

а) корените на уравнението $f(x) = 0$ са по-големи
от -1 ;

б) е в сила неравенството $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leq 2$, където

x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението
 $f(x) = 0$.

Решение:

Das vollständige Dokument ist als eActivity vorhanden und wird an dieser Stelle nicht angeführt.
Der Mathematiktest umfasst insgesamt 4 Aufgaben. Bild unten mit geöffneter Kommentarzeile:

Higher School of Civil Engineering (VSU)

Higher School of Civil Engineering (VSU) "Lyuben Karavelov" - Sofia
175 Suhodolska Street, 1373 Sofia, BULGARIA,
e-mail: vsu@vsu.bg, web: www.vsu.bg

http://www.vsu.bg/html-files/Tem1-3_july_2008-solution.doc

Aufnahmeprüfung in Mathematik

Das folgende Bild zeigt die geöffnete Berechnungszeile, in der einzelne Rechenschritte ausgeführt sind. Der solve-Befehl berechnet zuvor sofort das Endergebnis. Der Schüler trägt in der geöffneten Berechnungszeile seinen Lösungsweg in Einzelschritten ein.

Решение:

ClassPad:

solve(|2x+3|<4-x, x) $\{-7 < x < \frac{1}{3}\}$

Неравенството: step by step (main-menu)

2x+3<4-x and 2x+3>x-4 $-7 < x < \frac{1}{3}$

(2x+3<4-x)+x-3 $3 \cdot x < 1$

ans/3 $x < \frac{1}{3}$

(2x+3>x-4)-x+4 $7+x > 0$

ans-7 $x > -7$

Alge Standard Real Bog

$$\text{solve}\left(1+\log_2(x-1) = \log_{(x-1)}(4), x\right)$$

$$\left\{x=3, x=\frac{5}{4}\right\}$$

уравнението: step by step (main-menu)

"right hand side:"

judge $\left(\log_{(x-1)}(4) = \frac{\log_2(4)}{\log_2(x-1)}\right)$ "right hand side:"

TRUE

judge $\left(\frac{\log_2(4)}{\log_2(x-1)} = \frac{\log_2(2^2)}{\log_2(x-1)}\right)$ TRUE

judge $\left(\frac{\log_2(2^2)}{\log_2(x-1)} = \frac{2}{\log_2(x-1)}\right)$ TRUE

$\left(1+a=\frac{2}{a}\right) \times a-2$ -2+a*(1+a)=0

Algeb Standard Real Bog

The screenshot shows a window titled "Edit Aktion Interaktiv" with a toolbar at the top. The main area contains the following text and mathematical expressions:

```

(1+a=2/a) * a - 2
collect(ans, a)
rFactor(a^2+a-2=0)
"a=log2(x-1)"
(x-1=2^a)+1|a=-2
(x-1=2^a)+1|a=1

```

On the right side, the following steps are shown:

```

-2+a*(1+a)=0
a^2+a-2=0
-(2+a)*(1-a)=0
"a= log(2, x-1)"
x=5/4
x=3

```

At the bottom, it says "Algeb Standard Real Bog".

Mit dem `judge`-Befehl wird die Richtigkeit einer Termumformung überprüft. Die obigen Bilder zeigen im geöffneten Berechnungsfenster die Rechenschritte auf, die der Schüler absolvieren muss, um das Endergebnis zu erreichen, welches durch den `Solve`-Befehl sofort erscheint.

Die eActivity könnte z.B. im Sprachunterricht dahingehend genutzt werden, dass vorgegebene Texte zu übersetzen sind. In den zwischengeschalteten Kommentarzeilen kann dann der Schüler die Übersetzung eintragen. Ein elektronisches Dokument gestattet stets auch nachträgliche Korrekturen später festgestellter Schreibfehler.

Der ClassPad wird damit zum universellen Werkzeug im Schulunterricht, da er in verschiedenen Unterrichtsfächern Anwendung finden kann.

2. Arbeit mit Tabellenkalkulationen im ClassPad330

In der Nachrichtentechnik, in der Signaltheorie und anderen technischen Gebieten spielen periodische Impulse oder Signale eine wichtige Rolle. Wir betrachten hier ein Rechtecksignal und wollen die darin überlagerten Cosinus-Schwingungen, deren Amplituden und Frequenzen herausfinden. Mithilfe einer Fourieranalyse kann diese Aufgabenstellung gelöst werden.

Fourierseries

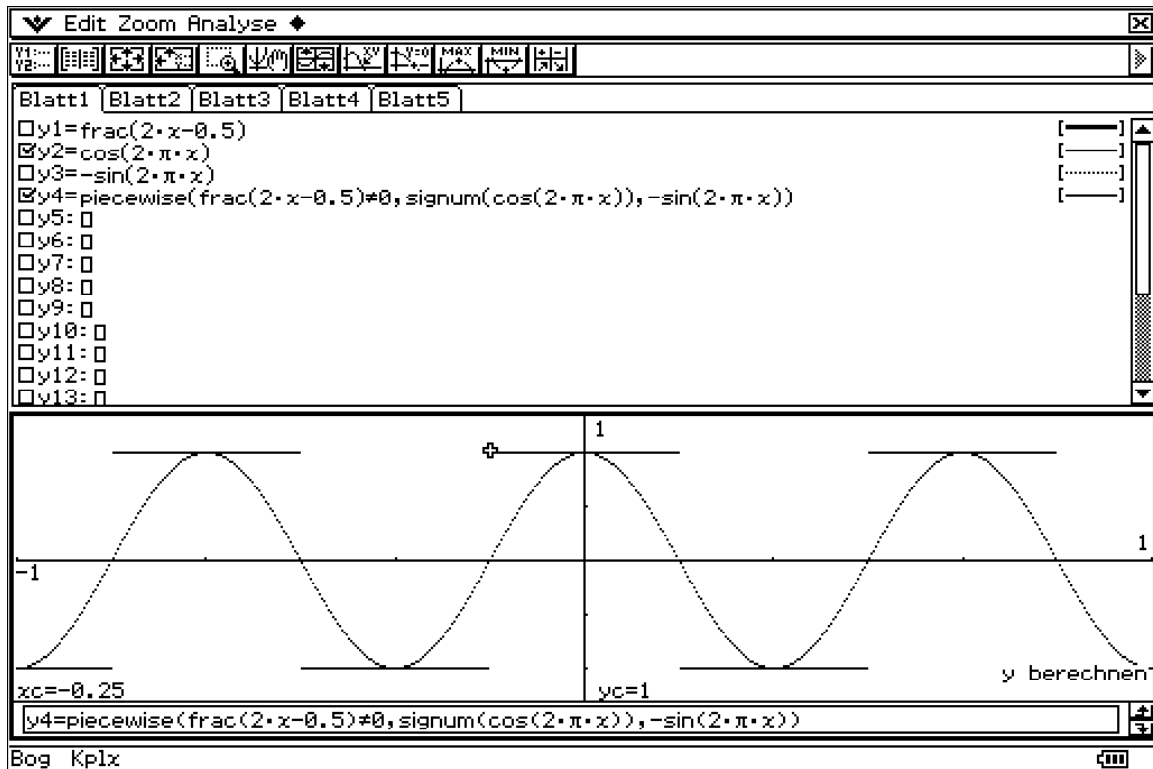
Exercise:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } -T/4 \leq x < T/4 \\ -1 & \text{for } T/4 \leq x < 3T/4 \end{cases}$$

$$f(x+m \times T) = f(x) \text{ for } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

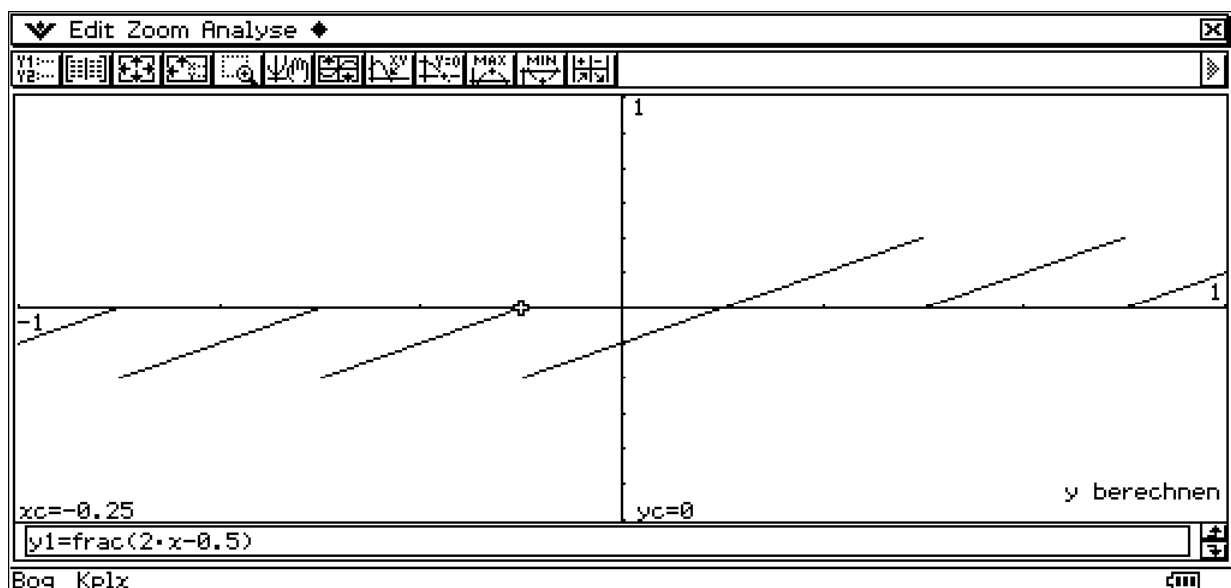
Mit Blick auf die Funktion $y=f(x)$ erkennt man Unstetigkeitsstellen, in denen stets als Funktionswert der Wert des rechts liegenden Kurvenastes gilt (rechtsseitige Stetigkeit der Funktion). Damit hat jeder Kurvenast (waagrecht Geradenstück in Höhe -1 oder +1) einen Anfangs- aber keinen

Endpunkt. Wir betrachten die Periodenlänge $T=1$ und zeichnen die Funktion im 2D-Grafikfenster innerhalb einer eActivity.



Das oben stehende Bild ist voller Informationen: Wir sehen neben der \cos -Funktion den periodischen Rechteckimpuls mit dem Cursor (Kreuz) im Punkt $P(-0.25; 1)$ und erkennen damit die rechtsseitige Stetigkeit.

Der Rechteckimpuls wird pixelweise gezeichnet. (Grafikformat „pixelweise“ statt „verbunden“ vor-einstellen, da ansonsten die Kurvenäste durch senkrechte Linien verbunden werden. Das widerspricht der Definition einer Funktion.) $f(x) = y4(x)$ entspricht im Wesentlichen dem Vorzeichen von $\cos(2\pi x)$, d.h. $f(x) = \text{signum}(\cos(2\pi x))$ solange $\cos(2\pi x)$ nicht Null ist!



In den Unstetigkeitsstellen x mit $\cos(2\pi x) = 0$ soll immer der Funktionswert des rechts anschließenden Kurvenstückes gelten, d.h. der Wert $-\sin(2\pi x)$. Die Unstetigkeitsstellen x sind nun gerade die Nullstellen von $\text{frac}(2x-0.5)$, wobei $\text{frac}(\dots)$ den gebrochenen Anteil seines Arguments bezeichnet.

Der piecewise-Befehl schließlich definiert die Funktion in der gewünschten Weise:

$$y_4(x) = \text{piecewise}(\text{frac}(2x-0.5) \neq 0, \text{signum}(\cos(2\pi x)), -\sin(2\pi x))$$

Man erkennt unschwer die Syntax des piecewise-Befehls. Zuerst steht eine Bedingung, danach der Wert unter der Bedingung, dann der Alternativwert, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Sowohl die Bedingung als auch die Werte können x-abhängig sein.

Wir kommen nun zur Berechnung der Fourierkoeffizienten innerhalb der eActivity:

Solution:

f(x) is a symmetric function: $f(x)=f(-x)$.

Dirichlet-condition: for all points x, where f(x) is continuous

$$f(x)=s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (a_k \times \cos(k \times \omega_1 \times x)) \right), \text{ where}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \text{ and } a_k = \frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

otherwise: $s(x) = \frac{f(x+\theta) + f(x-\theta)}{2} = 0$ (x is a discontinuous point)

Computation:

DelVar k,n

done

$$\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_1$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$\frac{2}{T} \left[\int_{-T/4}^{T/4} 1 \times \cos(k \times \omega_1 \times x) dx + \int_{T/4}^{3T/4} -1 \times \cos(k \times \omega_1 \times x) dx \right] \Rightarrow a_k$$

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{T \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - T \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{T \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi} \right)}{T}$$

simplify(a_k) ⇒ a_k

$$\frac{3 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}$$

$$\frac{3 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2} - k \cdot 2\pi\right)}{k \cdot \pi} \Rightarrow a_k$$

$$\frac{4 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}$$

a shorter computation for symmetric functions:

$$\frac{4}{T} \left[\int_0^{T/4} 1 \times \cos(k \times \omega_1 \times x) dx + \int_{T/4}^{2T/4} -1 \times \cos(k \times \omega_1 \times x) dx \right] \Rightarrow a_k$$

$$\frac{4 \cdot \left(\frac{T \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - T \cdot \sin(k \cdot \pi)}{2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{T \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi} \right)}{T}$$

simplify(ans | k=constn(1))

$$\frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \text{constn}(1)}{2}\right)}{\pi \cdot \text{constn}(1)}$$

Die Systemkonstante constn(1) als natürliche Zahl wird für das reelle k gesetzt, um eine Vereinfachung zu erhalten. Nach Anwendung von simplify(...) wird wieder k benutzt.

$$\frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k}{2}\right)}{\pi \cdot k} \Rightarrow a_k$$

$$\frac{4 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}$$

solution for all k ≠ 0, now let be k=0:

$$\frac{4}{T} \left[\int_0^{T/4} 1 \times \cos(0 \times \omega_1 \times x) dx + \int_{T/4}^{2T/4} -1 \times \cos(0 \times \omega_1 \times x) dx \right] \Rightarrow a_0$$

0

$$\frac{2}{T} \left[\int_{-T/4}^{T/4} 1 \times \sin(k \times \omega_1 \times x) dx + \int_{T/4}^{3T/4} -1 \times \sin(k \times \omega_1 \times x) dx \right] \Rightarrow b_k$$

$$\frac{-\left[T \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - T \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}\right) \right]}{T \cdot k \cdot \pi}$$

simplify(b_k) ⇒ b_k

$$\frac{-\left[\cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}\right) \right]}{k \cdot \pi}$$

$$\frac{-\left[\cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2} - k \cdot 2\pi\right) \right]}{k \cdot \pi} \Rightarrow b_k$$

0

seq(a_k, k, 1, 10, 1) ⇒ list1

$$\left\{ \frac{4}{\pi}, 0, \frac{-4}{3 \cdot \pi}, 0, \frac{4}{5 \cdot \pi}, 0, \frac{-4}{7 \cdot \pi}, 0, \frac{4}{9 \cdot \pi}, 0 \right\}$$

seq(cos(k × ω₁ × x), k, 1, 10, 1) ⇒ list2

$$\left\{ \cos\left(\frac{2 \cdot x \cdot \pi}{T}\right), \cos\left(\frac{4 \cdot x \cdot \pi}{T}\right), \cos\left(\frac{6 \cdot x \cdot \pi}{T}\right), \cos\left(\frac{8 \cdot x \cdot \pi}{T}\right), \dots \right\}$$

Die ersten 10 Fourierkoeffizienten (Amplituden) und die zugehörigen cos-Schwingungen werden in Listen list1 und list2 abgespeichert.

$$\text{Define } s_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} (a_k \times \cos(k \times \omega_1 \times x)) \mid T=1$$

done

s₁₀(x)

$$\frac{4 \cdot \cos(2 \cdot x \cdot \pi)}{\pi} - \frac{4 \cdot \cos(6 \cdot x \cdot \pi)}{3 \cdot \pi} + \frac{4 \cdot \cos(10 \cdot x \cdot \pi)}{5 \cdot \pi} - \frac{4 \cdot \cos(\dots)}{7}$$

$$\text{Define } s_{50}(x) = \sum_{k=1}^{50} (a_k \times \cos(k \times 2\pi \times x))$$

done

Define f(x) = piecewise(frac(2 · x - 0.5) ≠ 0, signum(cos(2 · x

done

Remember: f(x) is a right continuous function

(using "piecewise" for exact drawing)

Set graph format "draw plot"

discussion frac and piecewise Y1:...
Y2:...

Graphic $s_n(x)$ Y1:...
Y2:...

Die Diskussion zu frac und piecewise erfolgte bereits weiter oben, so dass wir jetzt die untere Zeile öffnen:

▼ Edit Typ GMem

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5

y1 = piecewise(frac(2·x-0.5)=0, -sin(2·π·x), signum(cos(2·π·x)))

y2 = $\sum_{k=1}^1 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

y3 = $\sum_{k=1}^3 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

y4 = $\sum_{k=1}^5 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

y5 = $\sum_{k=1}^7 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

y6 = $\sum_{k=1}^9 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

y7 = $\sum_{k=1}^{50} (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

Bog Kplx

▼ Edit Typ GMem

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5

y5 = $\sum_{k=1}^7 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

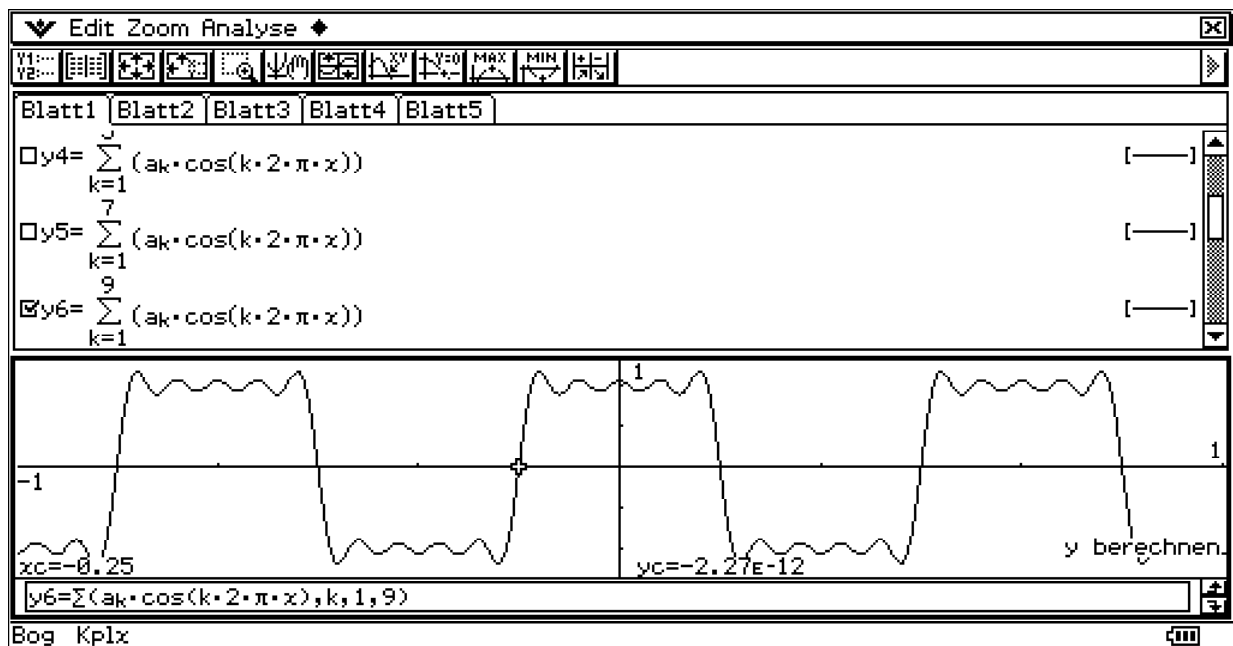
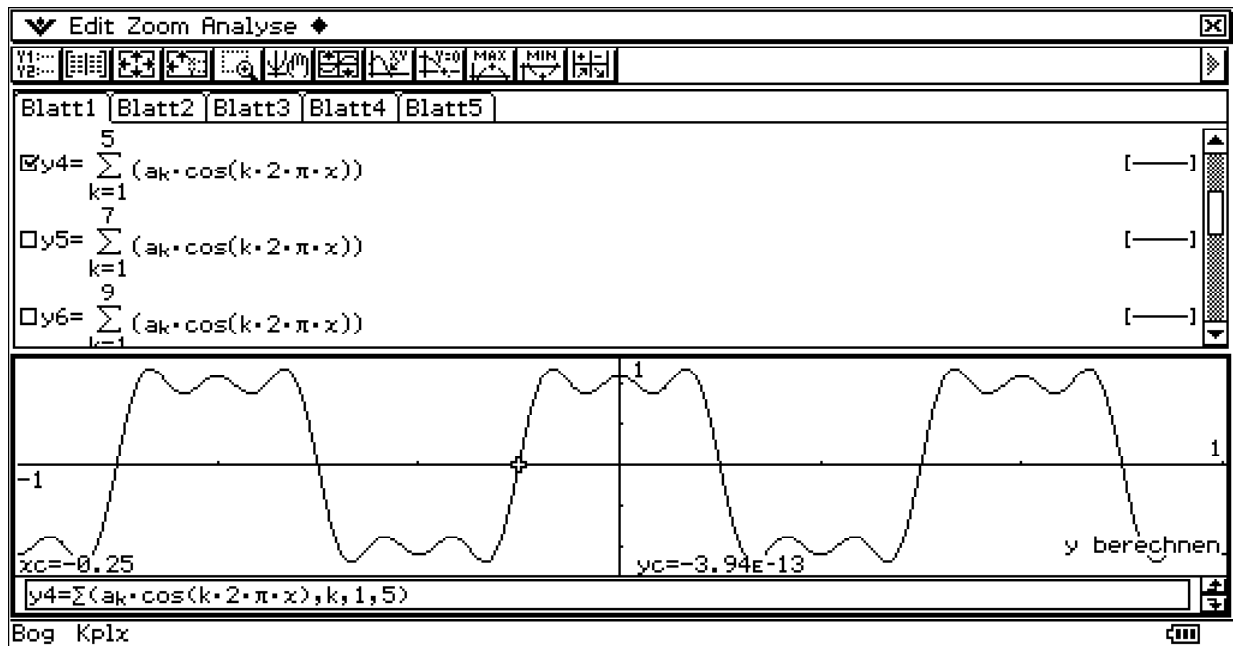
y6 = $\sum_{k=1}^9 (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

y7 = $\sum_{k=1}^{50} (a_k \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x))$

Graph showing a square wave pulse between -1 and 1, approximated by a sum of 50 cosine terms.

Bog Kplx

Wir erkennen das Fourierpolynom mit 50 überlagerten cos-Schwingungen und die gute Annäherung an den Rechteckimpuls. In den folgenden Bildern betrachten wir andere Fourierpolynome.



Der Cursor steht in einer Unstetigkeitsstelle des Rechteckimpulses und zeigt den Wert 0 (Gleitkomma-Null) an. Wir betrachten nun die komplexe Darstellung und abschließend die Berechnung der Amplituden in einer Tabellenkalkulation.

complex solution:

$$f(x) \approx s_n(x) = \sum_{k=-n}^n (c_k \times \exp(j \times k \times \omega_1 \times x)), \text{ where } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{and } c_k = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}.$$

$$\frac{1}{T} \left[\int_{-T/4}^{T/4} 1 \times e^{-j \times k \times \omega_1 \times x} dx + \int_{T/4}^{3T/4} -1 \times e^{-j \times k \times \omega_1 \times x} dx \right] \Rightarrow c_k$$

$$\frac{\frac{T \cdot e^{\frac{-k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} - \frac{T \cdot e^{\frac{-3 \cdot k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{T \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}}{T}$$

expand(ans) ⇒ c_k

$$\frac{e^{\frac{-k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} - \frac{e^{\frac{-3 \cdot k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}$$

$$\frac{e^{\frac{-k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} - \frac{e^{\frac{-3 \cdot k \cdot \pi \cdot j}{2}} + \frac{4 \cdot k \cdot \pi \cdot j}{2}}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot j + \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi} \Rightarrow c_k$$

$$\frac{-e^{\frac{k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{e^{\frac{-k \cdot \pi \cdot j}{2}} \cdot j}{2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}$$

expToTrig(ans) ⇒ c_k

$$\frac{2 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \pi}$$

$$\frac{1}{T} \left[\int_{-T/4}^{T/4} 1 \times e^{-j \times 0 \times \omega_1 \times x} dx + \int_{T/4}^{3T/4} -1 \times e^{-j \times 0 \times \omega_1 \times x} dx \right] \Rightarrow c_0$$

0

Define s10(x) = $\sum_{k=-10}^{-1} (c_k \times e^{j \times k \times \omega_1 \times x}) + \sum_{k=1}^{10} (c_k \times e^{j \times k \times \omega_1 \times x})$ done

s10(x)

$$\frac{2 \cdot e^{10 \cdot x \cdot \pi \cdot j}}{9 \cdot \pi} - \frac{2 \cdot e^{14 \cdot x \cdot \pi \cdot j}}{7 \cdot \pi} + \frac{2 \cdot e^{10 \cdot x \cdot \pi \cdot j}}{5 \cdot \pi} - \frac{2 \cdot e^{6 \cdot x \cdot \pi \cdot j}}{3 \cdot \pi}$$

cExpand(s10(x))

$$\frac{4 \cdot \cos(2 \cdot x \cdot \pi)}{\pi} - \frac{4 \cdot \cos(6 \cdot x \cdot \pi)}{3 \cdot \pi} + \frac{4 \cdot \cos(10 \cdot x \cdot \pi)}{5 \cdot \pi} - \frac{4 \cdot \cos(14 \cdot x \cdot \pi)}{7 \cdot \pi}$$

table-calculation 

▼ Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1	1.27324									
2	2	0									
3	3	-0.42441									
4	4	0									
5	5	0.25465									
6	6	0									
7	7	-0.18189									
8	8	0									
9	9	0.14147									
10	10	0									
11	11	-0.11575									
12	12	0									
13	13	0.09794									
14	14	0									
15	15	-0.08488									
16	16	0									
17	17	0.0749									
18	18	0									
19	19	-0.06701									
20	20	0									

=fRound(2*(∫(cos(\$A19*2*π*x),x,(-T)/4,T/4)+∫(-cos(\$A19*2*π*x),x,T/4,3*T/4))/T|T=1,5)

B19 -0.06701

▼ Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1	1.27324									
2	2	0									
3	3	-0.42441									
4	4	0									
5	5	0.25465									
6	6	0									
7	7	-0.18189									
8	8	0									
9	9	0.14147									
10	10	0									
11	11	-0.11575									
12	12	0									
13	13	0.09794									
14	14	0									
15	15	-0.08488									
16	16	0									
17	17	0.0749									
18	18	0									
19	19	-0.06701									
20	20	0									

nd(2*(∫(cos(\$A19*2*π*x),x,(-T)/4,T/4)+∫(-cos(\$A19*2*π*x),x,T/4,3*T/4))/T|T=1,5)

B19 -0.06701

Die Definitionszeile enthält neben den zwei Integralen den Rundungsbefehl fRound(...,5).

3. Arbeit mit logarithmisch skalierten Koordinatensystemen im ClassPad330

Wir betrachten folgende Aufgabenstellung aus dem ClassPad-Buch, das zurzeit vergriffen ist:

Paditz, L.: **Mathematische Modelle und wissenschaftlich-technische Anwendungen**
 Beispiele aus Schule und Studium mit dem grafikfähigen Symboltaschenrechner ClassPad 300
 Hrg. v. CASIO Europe GmbH im Bildungsverlag EINS, Norderstedt 2004 (1.Aufl.), 112 S.
<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/Casio4.jpg>

Inzwischen gibt es eine spanische Übersetzung zum Download im Internet:

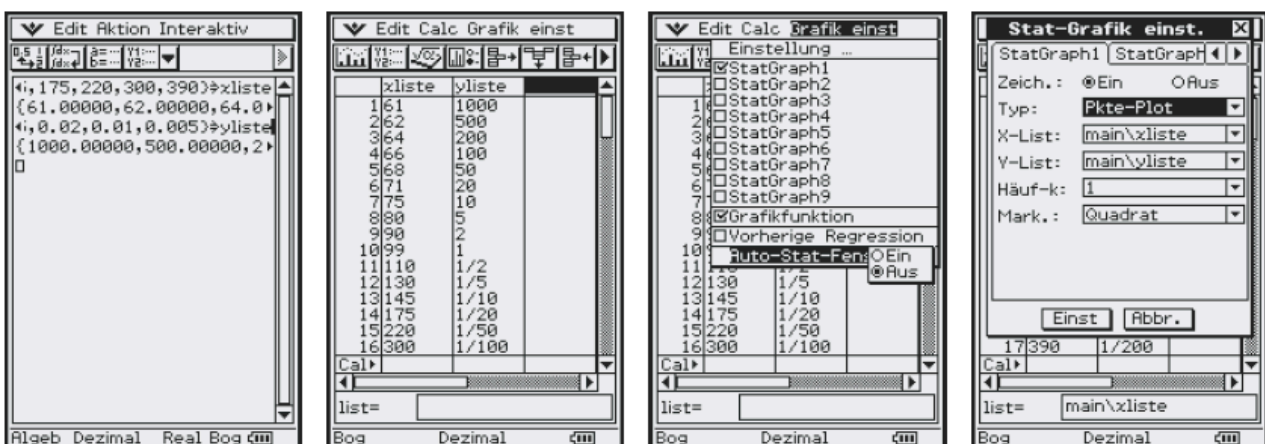
Paditz, L.: **Modelos Matemáticos y Aplicaciones Científico - técnicas**
 Ejemplos escolares y universitarios con la calculadora gráfica y simbólica Classpad 300
 Hrg. v. CASIO Europe GmbH, Norderstedt 2007 (1.Aufl., spanische Übersetzung), 117 S.
<http://www.aulamatematica.com/libros/pdf%20libros/Paditz.pdf>
<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/Casio5.jpg>

6.5 Praktisches Anwendungsbeispiel zur Potenzregression und der 2D-Darstellung im logarithmisch-skalierten Betrachtungsfenster

Ein elektrischer Schutzschalter hat die Eigenschaft, im Kurzschlussfall (hoher Strom, gemessen in Ampere) sehr schnell zu reagieren (Reaktionszeit in Millisekunden). Im Versuchslabor wurden die folgenden Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 17$, gemessen, die in den verbundenen Datenlisten gegeben sind:

x-Liste = {61, 62, 64, 66, 68, 71, 75, 80, 90, 99, 110, 130, 145, 175, 220, 300, 390}
 und
 y-Liste = {1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005}.

Die Datenpunkte sollen als 2D-Grafik geplottet werden (Scatterplot). Anschließend ist eine Potenzregression durchzuführen. Die Regressionsfunktion („Kennlinie“ des Schutzschalters) hat einen L-förmigen Verlauf und ist deshalb logarithmisch skaliert darzustellen.

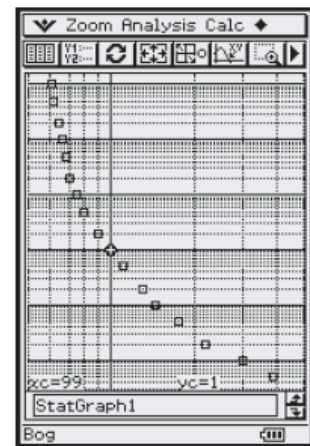
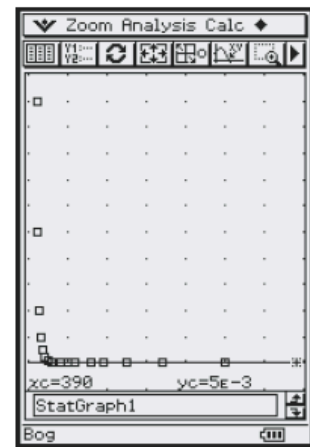


Die Listen wurden im Main-Menü abgespeichert und anschließend im Statistik-Listeneditor betrachtet.

Im Statistik-Menü wurden schließlich das Betrachtungsfenster und die statistische Graphik StatGraph1 eingestellt.

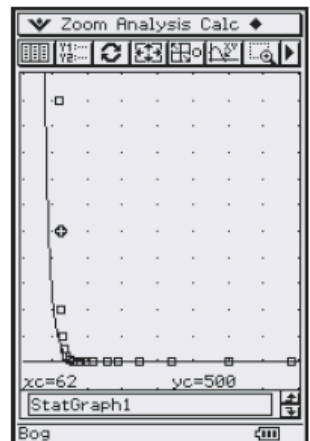
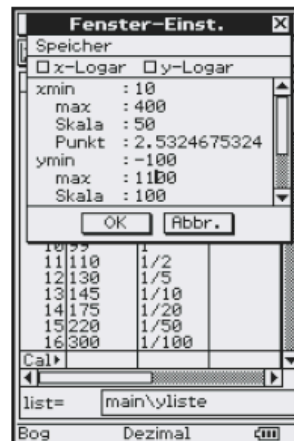
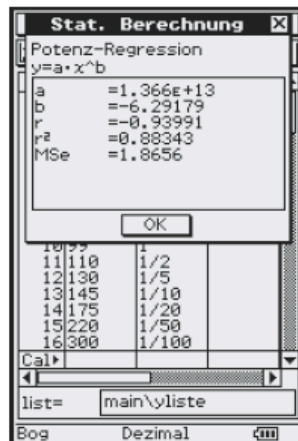
Die Datenpunkte haben im normalskalierten Betrachtungsfenster eine L-förmige Lage.

Im doppelt logarithmisch skalierten Betrachtungsfenster haben die Datenpunkte eine bessere und überschaubare Lage.



Insider-Tipp

Die Potenzregression wird im ClassPad 300 als quasilineare Regression realisiert, d. h. der Potenzansatz $y = a \cdot x^b$ wird über die logarithmierten Daten und die Umformung $\log(y) = \log(a) + b \cdot \log(x)$ ermittelt!



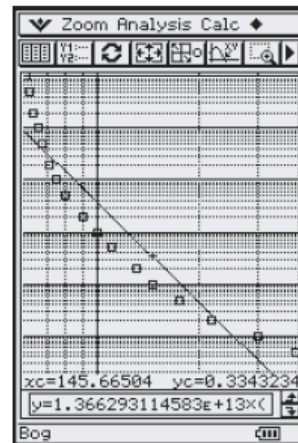
Die Potenzregression ergibt die Funktion $y = 1.366E+13 \cdot x^{-6.29179}$.

Das zuletzt dargestellte Screenshot deutet zumindest im linken Teil der Regressionsfunktion darauf hin, dass die Datenpunkte rechts neben der Kurve liegen (bzw. die Funktionswerte wesentlich kleiner als die empirischen y -Werte ausfallen) und damit die Potenzregression zu ungenau ausfällt.

Ein Blick in das logarithmisch skalierte Betrachtungsfenster gibt Gewissheit darüber, dass die Krümmung der Punktwolke wesentlich stärker ausfällt als die Krümmung der Potenzregressionsfunktion, die jetzt ungekrümmt wie eine Gerade erscheint. Auch die Betrachtung der Residuen $y_i - \gamma(x_i)$ verschafft darüber Klarheit.

Es muss nun nach einer verbesserten Regressionsfunktion gesucht werden, die im betrachteten x -Intervall die Krümmung der Punkte im Scatterplot erreicht.

xliste	yliste	resid
161	1000	9.2e+2
262	500	4.3e+2
364	200	1.4e+2
466	100	5.1e+1
568	50	9.7e+0
671	20	-1e+1
775	10	-1e+1
880	5	-9e+0
990	2	-4e+0
1099	1	-2e+0
11110	1/2	-1e+0
12130	1/5	-4e-1
13145	1/10	-2e-1
14175	1/20	-5e-2
15220	1/50	-5e-3
16300	1/100	6.5e-3



Insider-Tipp

Um eine bessere Anpassung an die Datenpaare zu erreichen, wird jetzt eine erneute Potenzregression mit den transformierten (logarithmierten) Datenpaaren in $\log x_{\text{liste}} = \log(x_{\text{liste}})$ und $\log y_{\text{liste}} = \log(y_{\text{liste}}) + 3$ und Abspeicherung unter $y_{13}(\lg(x)) = a \cdot (\lg(x))^b$ vorgenommen.

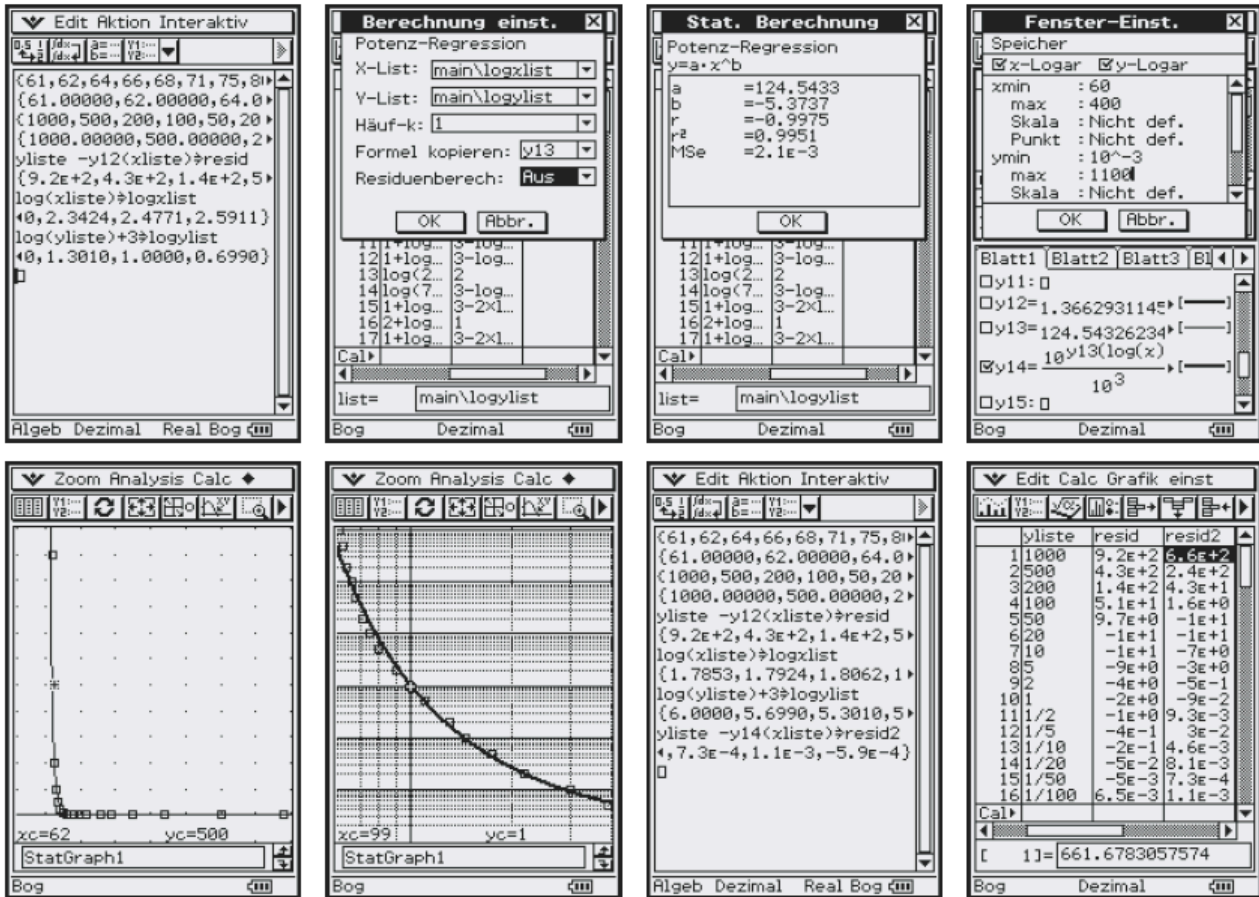
Die Potenzregression erfordert positive Daten, weshalb in $\log y_{\text{liste}}$ zusätzlich mit +3 transformiert wurde.

Die Rücktransformation erfolgt dann in $y = y_{14}$, d. h. $\lg(y_{14}) = y_{13}(\lg(x)) - 3$ bzw.

$\lg(y) + 3 = y_{13}(\lg(x)) = a \cdot (\lg(x))^b$ ist die gefundene Regressionsfunktion der Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 17$, da $y_{13} = a \cdot (\lg(x))^b$ das Ergebnis für die eigentlich transformierten Datenpaare $(\lg(x_i), \lg(y_i) + 3)$ war.

Damit haben wir dann die stärker gekrümmte und besser passende Regressionsfunktion gefunden

$$y(x) = 10^{(a \cdot (\lg(x))^b - 3)} = 10^{(124.543 \cdot (\lg(x))^{-5.37365})} / 10^3.$$



Die Grafiken wie auch die Residuenliste zeigen eine deutliche Verbesserung der nichtlinearen Regression im betrachteten x -Bereich.

Mit diesem Beispiel wird deutlich, dass die grafische Darstellung bei logarithmischer Skalierung anschaulicher und zur Kennlinienauswertung besser geeignet ist als die Darstellung bei äquidistanter Skalierung der Achsen.

Im Frühjahr 2008 ist die Version 3.03 des ClassPad-Betriebssystems erschienen, die insbesondere auch Erweiterungen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung beinhaltet, vgl.

http://edu.casio.com/products/classpad/cp_v303/probability.html

Die update-files und die erweiterte Bedienungsanleitung (949 Seiten) zur Version 3.03 findet man unter <http://edu.casio.com/> oder hier:

http://www.htw-dresden.de/~paditz/cph_osup_303v.zip

(cp-handheld-osupdate)

http://www.htw-dresden.de/~paditz/cpm_update_303pro.zip

(cp-manager-update-professional)

http://www.htw-dresden.de/~paditz/CP330_ver303_G.pdf

(Bedienungsanleitung deutsch)