Arbeitsmaterial (Teil 1) zur Fortbildungsveranstaltung D01852

Einsatz des ALGEBRA FX 2.0PLUS im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

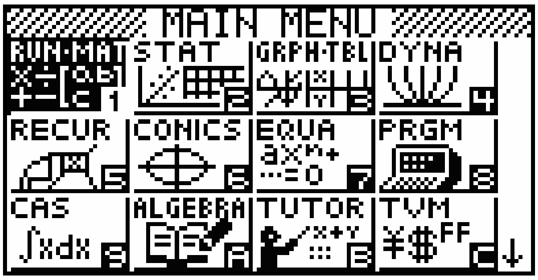
Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

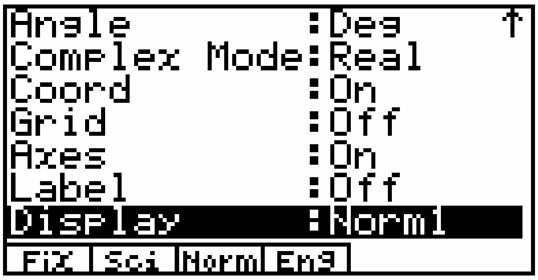
Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

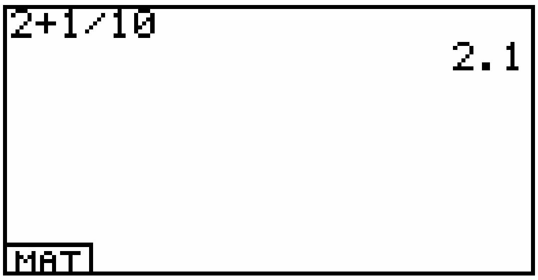
1. Aktivität BGym
Kl.-St. 11
Lernbereich 1: Gleichungen/Gleichungssysteme

Schulbuch 11

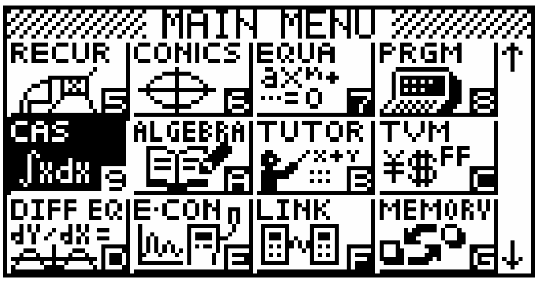
1.Übung, S. 13 unten
Zahlendarstellungen für 2+1/10 (im RUN-MAT-Menü bzw. CAS-Menü)

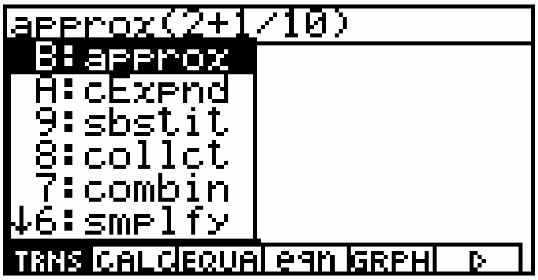




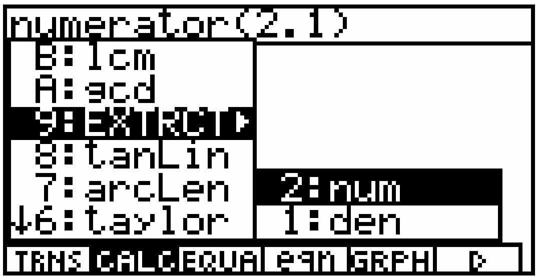


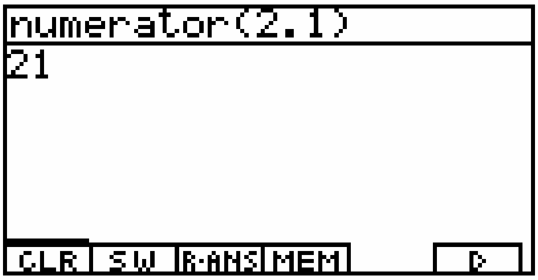
Nun: Wechsel in das CAS-Menü:

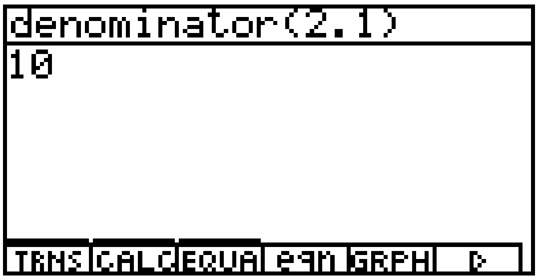




approx ergibt im CAS wieder die Dezimalzahlendarstellung

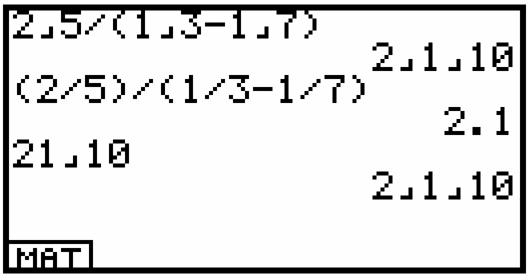






Auswahl 1: den(ominator) … Nenner

Schließlich noch der Hinweis auf die Nutzung der „a b/c“-Taste sowie „d/c“-Taste (gelb). Es geht um die verkürzte Darstellung von Brüchen und gemischten Zahlen:



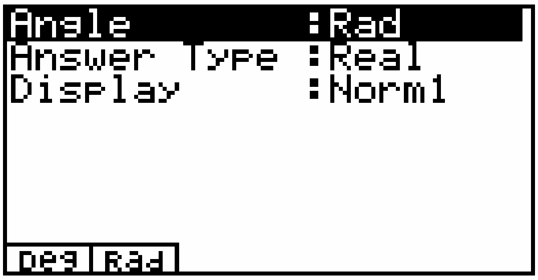
Unterschiedliche Darstellungen für 2,1.

Einzelheiten zur Bedienung und Syntax der Befehle findet man im Bedienhandbuch, vgl. http://www.casio-europe.com/de/support/manuals/fx20plus/

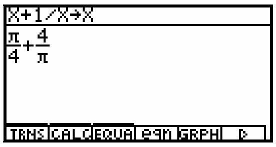
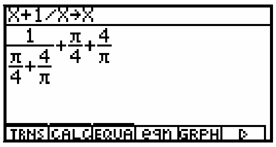
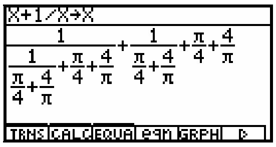
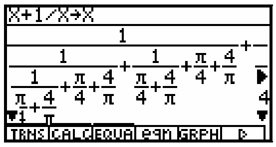
Bedienungsanleitung Algebra FX 2.0 Plus / FX 1.0 Plus Teil 1 (5721 KB)
http://www.casio-europe.com/de/files/manuals/sgr/ALGEBRA_FX2.0PLUS_FX1.0PLUS_Teil1_de.pdf

Bedienungsanleitung Algebra FX 2.0 Plus / FX 1.0 Plus Teil 2 (3004 KB)
http://www.casio-europe.com/de/files/manuals/sgr/ALGEBRA_FX2.0PLUS_FX1.0PLUS_Teil2_de.pdf

Allgemeine Informationen zum ALGEBRA FX 2.0PLUS:
http://www.casio-europe.com/de/calc/sgr/produkte/graphikfaehigerechner/fx20plus/



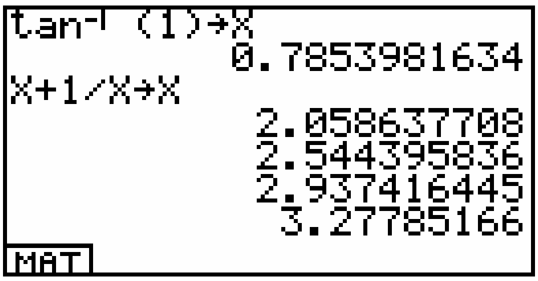
X wird nun im CAS iterativ verändert (Zahlenfolge!):

usw. Der Rechner wird im CAS immer langsamer bis schließlich nichts mehr geht!

So (im Standardmodus CAS) kann es schnell zum Speicherüberlauf kommen!
Mit dem approx-Befehl wird die Vergangenheit der Zahlendarstellung ausgelöscht und es können ohne Speicherprobleme weit aus mehr Rechenschritte realisiert werden.

besser im RUN-MAT-Menü überschaubar, s.u.:



Wiederholt EXE drücken reproduziert den Befehl.

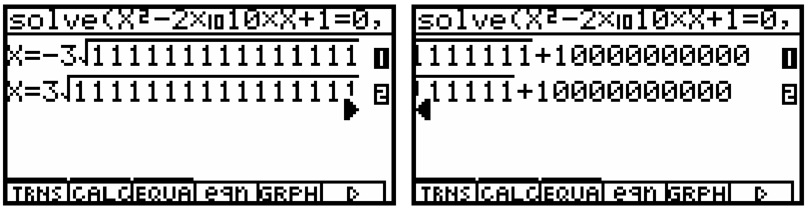
Lesen Sie hierzu auch im Schulbuch Jg.-st.12 (Nichttechn. Gymn.) S.363f nach!
(Direkter Hinweis auf den ClassPad mit Screenshots)

Die nichtexakte Zahlendarstellung bringt jedoch auch ungewollt numerische Probleme hervor, wie folgendes Beispiel zeigt (vgl. Schulbuch 11, S.44ff: **Quadratische Gleichungen**):

Die quadratische Gleichung $\mathbf{x^2 - 2*10^{10} * x + 1 = 0}$ kann jeder Schüler im Grunde per Hand lösen! Doch wie soll die Lösung notiert werden? Wird von der exakten Lösung abgewichen, funktioniert die Probe nicht mehr!

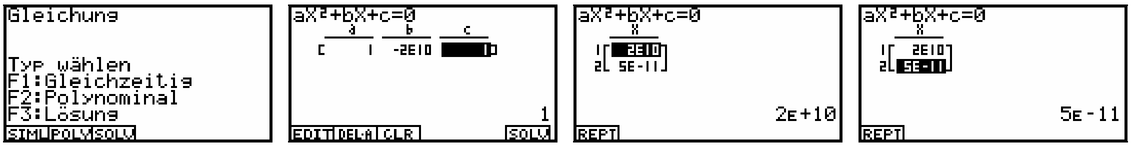
Die exakte Lösung lautet $x_{1,2} = 10^{10} \pm \sqrt{10^{20} - 1}$.
Ausgeschrieben ist das

$$x_{1,2} = 10.000.000.000 \pm \sqrt{99.999.999.999.999.999.999}$$
$$= 10.000.000.000 \pm 3 * \sqrt{11.111.111.111.111.111.111}$$



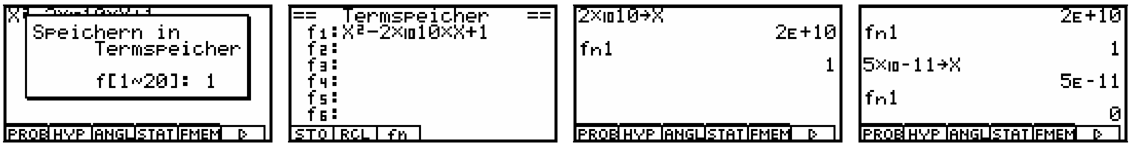
im CAS mit solve lösbar (lange Rechenzeit)!

Weiter im EQUA-Menü: Auswahl F2 (Polynomgleichung)



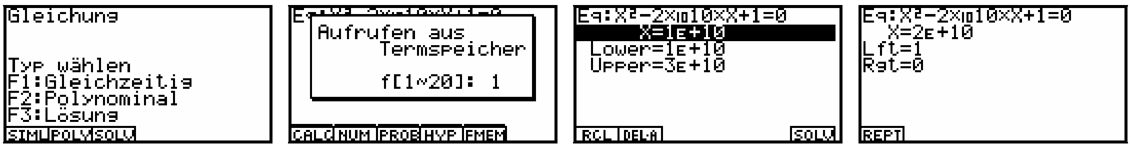
Werden die irrationalen Nullstellen als (gerundete) Gleitkommazahlen notiert, ist die quadratische Gleichung nicht mehr erfüllt!

Probe im RUN-MAT-Menü: (Der Termspeicher ist eine Zwischenablage!)



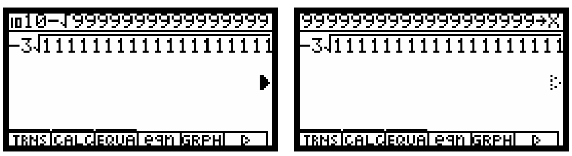
Der Formelterm fn1 ergibt für die erste Lösung keine Null, im zweiten Fall zeigt er eine (Gleitkomma-)Null an. Die exakte Lösungsdarstellung findet der Rechner nicht!

Wir versuchen es **noch einmal im EQUA-Menü:** mit Auswahl F3 (numerische Lösung)

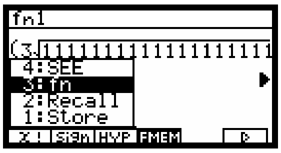


Ohne Erfolg! Nur eine Näherungslösung im Rahmen der numerischen Genauigkeit des Rechners! Der Rechner benötigt etwas Zeit, um vom Startwert zur Näherungslösung zu gelangen.

Wir können jedoch die exakte Lösung im CAS überprüfen und speichern dazu eine Lösung auf X ab: $10^{10} - \sqrt{99999999999999999999} \to X$. Dann rufen wir den Term fn1 ab und nutzen den Befehl simplify.

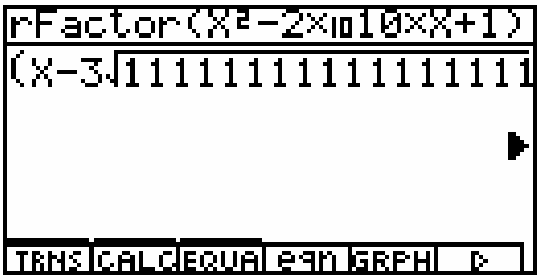


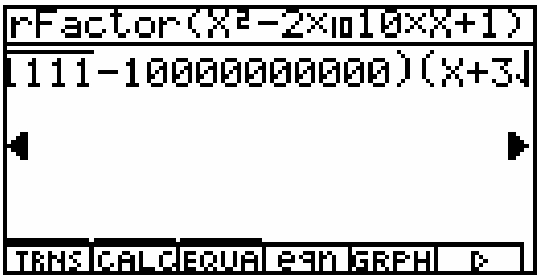
Das CAS vereinfacht die Wurzel!



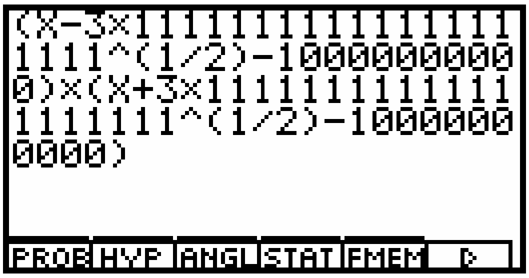
oder Recall nutzen:


Mit dem rFactor-Befehl schließlich gelingt die Lösung ebenfalls! Aus den Linearfaktoren können die **Nullstellen in exakter Form** abgelesen werden:





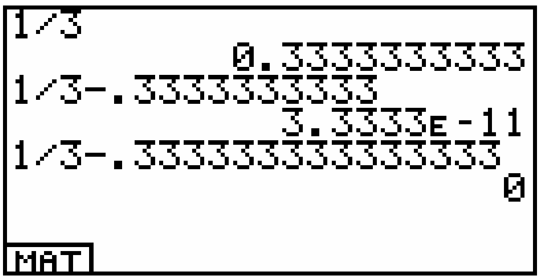
Tipp: Sie können die **Ans** z.B. im Termspeicher **fn8** ablegen und dann im RUN-MAT-Menü abrufen zwecks voller Ansicht des Ergebnisses!



Hinweis:

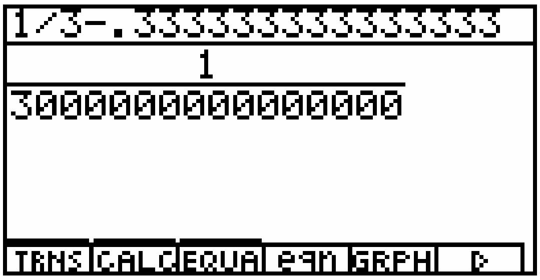
Rechnet man z.B. 1/3 – 0.3333333333 (10 Dezimalen) erhält man 3.3333E-11. Damit hat der Rechner intern 5 Schutzstellen: Er rechnet intern mit 15 Ziffern und zeigt jedoch nur 10 an. Dadurch sollen Rundungseffekte abgefangen werden.

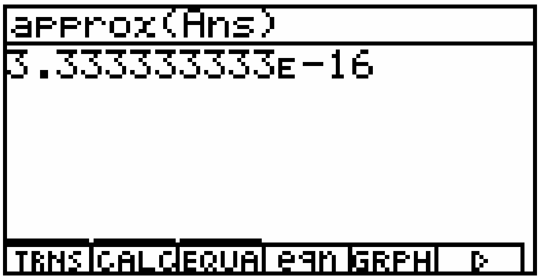
Probieren Sie es im RUN-MAT-Menü aus und rechnen Sie
1/3 - 0.3333333333 (10 Dezimalen) bzw. 1/3 - 0.333333333333333 (15 Dezimalen).



zuletzt die (Gleitkomma-)Null!

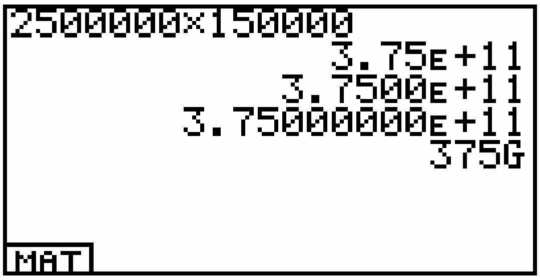
Im CAS rechnet der Taschenrechner noch genauer und gibt die Gleitkomma-Null als 3.333333333E-16 an:





Überlegen Sie sich, dass **1/3.000.000.000.000.000** die exakte Differenz ist!

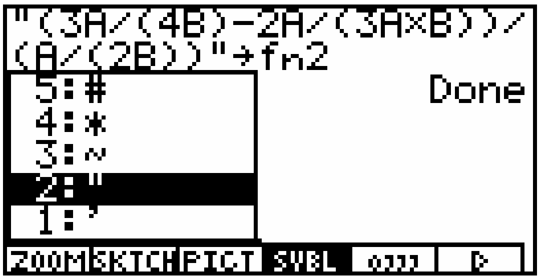
2.Übung, S.25, Zahlendarstellungen mit Potenzen: im SET UP einzustellen

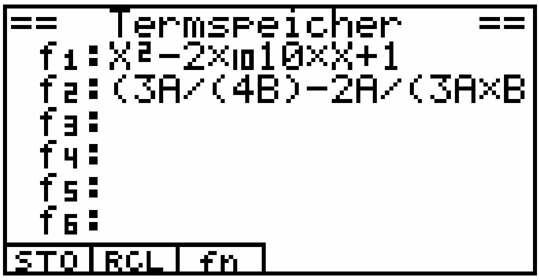


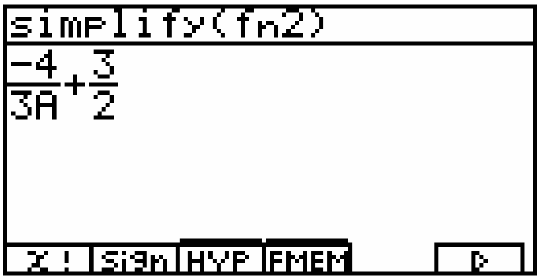
G … Giga (entspricht 10^9)

3. Übung: symbolisches Rechnen im CAS (Termumformung): S.15 AUFG 02 z1)

Im RUN-MAT-Menü können Terme eingegeben und abgespeichert werden (volle Sichtbarkeit durch Zeilenumbruch, im CAS nur einzeilige Anzeige!). Terme in Strings setzen (Zeichenkette).

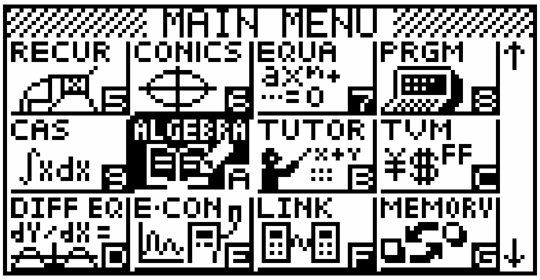


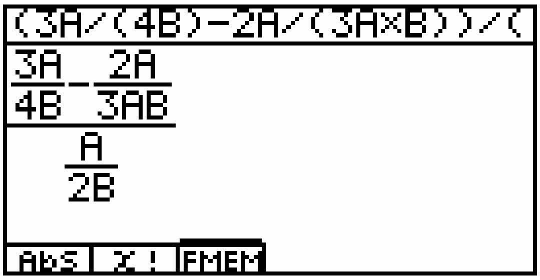




Vereinfachung nun im CAS!

Während im CAS oft ohne Zwischenschritte vereinfacht wird, kann im **ALGEBRA-Menü** in begrenztem Umfang schrittweise umgeformt werden:



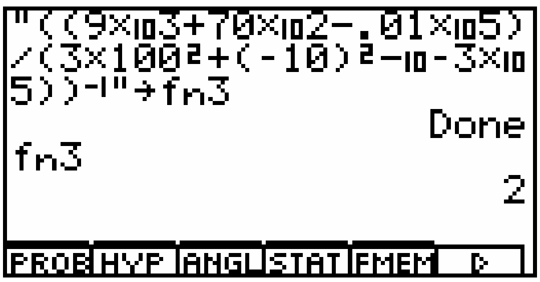


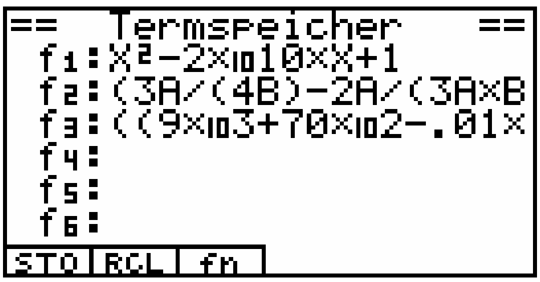
Im **TUTOR-Menü** schließlich können auch bestimmte Aufgabenstellungen geübt werden!

Lesen Sie hierzu den Beitrag (Paditz 2002):
„Das intelligente tutorielle System des GTR (ein wissensbasiertes Lernsystem)“
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Casio_Tutor.pdf

Der Schüler hat damit die Möglichkeit, die selbst vorgenommenen Rechenschritte vom Taschenrechner kontrollieren zu lassen. Im CAS-Fenster können sowohl Formelterme (mit symbolischen Variablen) als auch numerische Terme (mit konkreten Zahlen) ausgewertet werden.

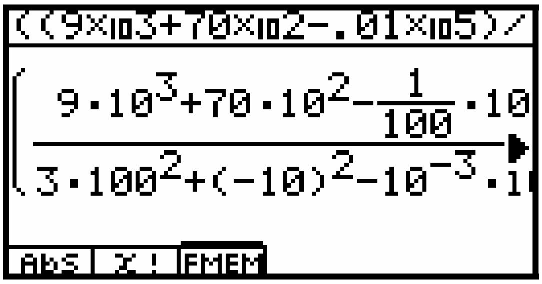
S.29 AUFG 04 e)
Abspeicherung des Zahlenterms wieder im RUN-MAT-Menü in den Termspeicherplatz 3

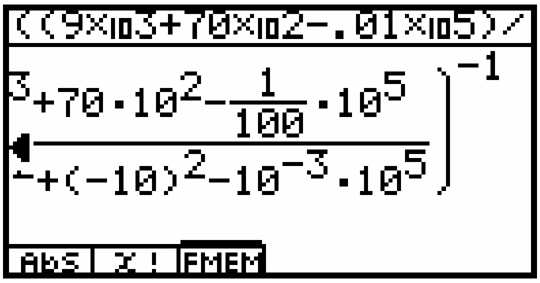




Mit fn3 wird im RUN-MAT-Menü sofort der vereinfachte Zahlenwert 2 angezeigt.

Im ALGEBRA-Menü kann man sich die Eingabe fn3 noch einmal ansehen:





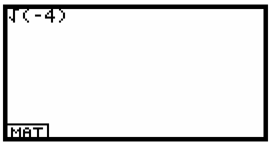
4. Übung (Bemerkungen zum Wurzelziehen, **Kl.-St.11, S.33, Aufg. 02**):

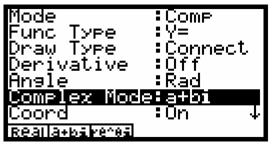
Im Bereich der komplexen Zahlen sind Wurzeln mehrdeutig. Man unterscheidet zwischen der Hauptwurzel und den Nebenwurzeln.

$\sqrt{-4}$ ist nach Def. 1.6 (Kl.-St.11, S.32) in $\mathbb{R}$ nicht definiert.

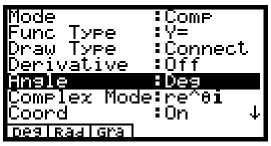
$\sqrt{-4}$ ist nach Def. 12.11 (Kl.-St.11, S.323) in $\mathbb{C}$ definiert.

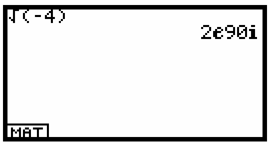
Es gilt: $\sqrt{-4} = 2i$ (Hauptwurzel), $\sqrt{-4} = -2i$ (Nebenwurzel)



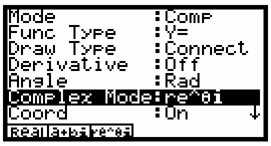


Im SET UP kann auch die exponentielle Darstellung voreingestellt werden:



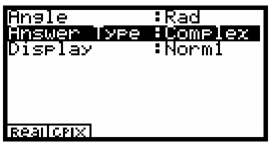


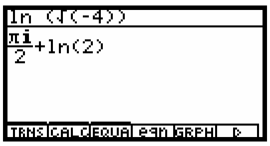
Winkel in Altgrad



Winkel im Bogenmaß

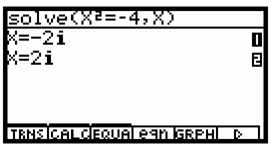
im CAS erhalten wir die exakte Form des Arguments (Winkels) mithilfe des ln(…):





also: 1.5707966327 war $\pi/2$!

Der GTR zeigt stets die Hauptwurzel (bzw. den Hauptwert des komplexen Logarithmus) an.



Mit **solve** werden alle Wurzeln angezeigt.

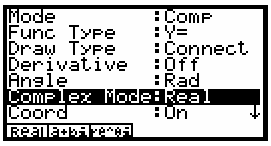
Aufpassen: der 1.Wert ist die Nebenwurzel, der 2.Wert die Hauptwurzel!

Kl.-St.11, S.33, Aufg. 02:

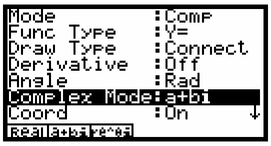
$\sqrt[3]{-8}$ ist nach Def. 1.6 (Kl.-St.11, S.32) in $\mathbb{R}$ nicht definiert.
$\sqrt[3]{-8}$ ist nach Def. 12.11 (Kl.-St.11, S.323) in $\mathbb{C}$ definiert.

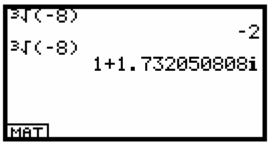
Es gilt:
$\sqrt[3]{-8} = 1+\sqrt{3}\times i$ (Hauptwurzel), $\sqrt[3]{-8} = -2$ (1.Nebenwurzel), $\sqrt[3]{-8} = 1-\sqrt{3}\times i$ (2.Nebenwurzel)

Da die 1.Nebenwurzel in $\mathbb{C}$ keinen Imaginärteil besitzt, wird oftmals unkorrekter Weise die 1. Nebenwurzel als scheinbar reelle Zahl angesehen und in $\mathbb{R}$ als Wurzel gedeutet!

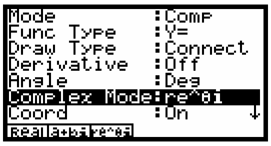


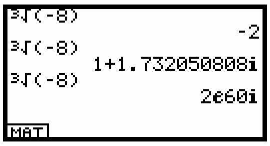
Berechnung in $\mathbb{R}$



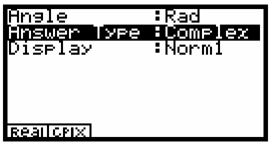


Berechnung in $\mathbb{C}$





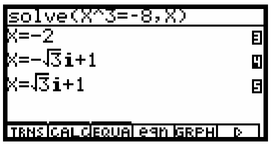
exponentielle Darstellung (Winkel 60°)



nun im CAS: also: 1.732050808 war $\sqrt{3}$!

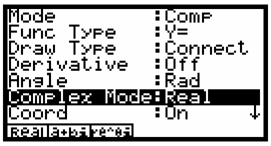
Die angezeigte Lösung ist die komplexe Hauptwurzel!

Wir berechnen nun alle Wurzeln im CAS:

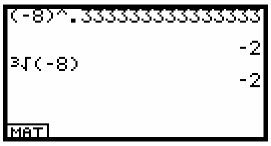


Anzeige: 1.Nebenwurzel, 2.Nebenwurzel, Hauptwurzel (zuletzt!)

Der Taschenrechner zeigt im Real-Modus die 1.Nebenwurzel von $\sqrt[3]{-8}$ an, was unkorrekt ist! Wenn es in $\mathbb{R}$ die dritte Wurzel $\sqrt[3]{-8}$ geben würde, dann müssten hier benachbarte Zahlenwerte auch benachbarte Ergebnisse liefern: $(-8)^{0,3333333333}$, da rein numerisch gesehen die Zahlen $\sqrt[3]{-8}$ und $(-8)^{0,3333333333}$ näherungsweise das Gleiche bedeuten. Erst hier macht der Taschenrechner deutlich, dass $(-8)^{0,3333333333}$ nicht reell ist:



Berechnung in $\mathbb{R}$



Aufpassen!

Die Zahlen 0.3333333333333333 und 1/3 kann der Taschenrechner nicht mehr unterscheiden!

Es bleibt also dabei: die Wurzeln $\sqrt{-4}$, $\sqrt[3]{-8}$ und $\sqrt[4]{-81}$ sind in $\mathbb{R}$ nicht definierte Zahlen!
(Selbst wenn der Taschenrechner im Real-Modus eine komplexe Nebenwurzel als reellen Zahlenwert anzeigen sollte. Wurzelwerte auf der negativen reellen Achse sind in $\mathbb{C}$ stets Nebenwurzeln! Hauptwurzeln liegen in $\mathbb{C}$ stets auf der positiven reellen Achse bzw. im I. oder IV. Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene.)

Weiter:
Die Zahlenterme $\sqrt[4]{-a}$ und $\sqrt[5]{-a}$ sind in $\mathbb{R}$ nur dann definiert, wenn der Radikand –a nichtnegativ ist.

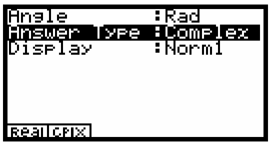
In $\mathbb{C}$ lautet die Lösung für $\sqrt[4]{-a}$ (mit Haupt- und Nebenwurzeln):

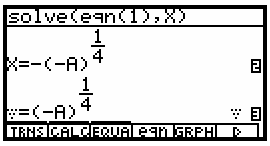
$\sqrt[4]{-a} = 0$ für a=0 (Wurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier keine Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).

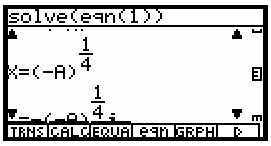
$\sqrt[4]{-a} = |a|^{1/4}$ für a<0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).

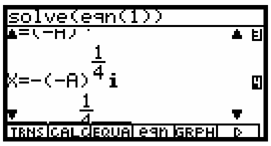
$\sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{a} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ i\right) \times a^{1/4}$ für a>0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt wieder Nebenwurzeln)).

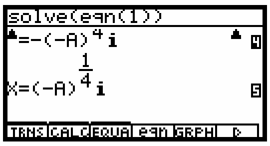
Wir versuchen, im CAS die 4.Wurzeln aus –A (Hauptwurzel, drei Nebenwurzeln) zu erhalten:











noch mal herausgeschrieben:

$X^4 = -A$ (1) ergibt hier im CAS die interpretationsbedürftigen Lösungen

$X = -(-A)^{1/4}$ (2)

$X = (-A)^{1/4}$ (3)

$X = -(-A)^{1/4} i$ (4)

$X = (-A)^{1/4} i$ (5) Was ist die Hauptwurzel, was sind die Nebenwurzeln?

Das Ganze macht nur Sinn, wenn –A positiv ist (also A negativ), weil dann gilt:

$X^4 = -A$ (1) ergibt hier im CAS die interpretationsbedürftigen Lösungen

$X = -|A|^{1/4}$ (2)

$X = \ |A|^{1/4}$ (3)

$X = -|A|^{1/4}\, i$ (4)

$X = \ |A|^{1/4}\, i$ (5) Was ist die Hauptwurzel, was sind die Nebenwurzeln?

Damit ist (3) die Hauptwurzel, (5) die 1.Nebenwurzel, (2) die 2.Nebenwurzel und (4) die 3.Nebenwurzel. Die Wurzeln werden von der Hauptwurzel ausgehend im math. pos. Drehsinn gezählt.

Literaturhinweis:

Paditz,L.: **Rechnen und graphische Darstellungen mit komplexen Zahlen**
Anwendungsbeispiele aus Schule und Studium für den ALGEBRA FX 2.0
Hrg. v. CASIO Computer Co. GmbH Deutschland, Norderstedt 2001 (1.Aufl.), 100 S.

Fazit:
Im CAS erhält man interessante Umformungen, die aber noch einer Interpretation bedürfen. Insofern darf nicht jedes Ergebnis kritiklos übernommen werden. Das CAS ist ein Hilfsmittel (ein Werkzeug) und der Anwender muss es verstehen, mit dem Werkzeug umzugehen. Die Verantwortung für ein (falsches) Ergebnis kann nicht auf das Werkzeug abgeschoben werden.

In $\mathbb{C}$ lautet die Lösung für $\sqrt[5]{-a}$ (mit Haupt- und Nebenwurzeln):

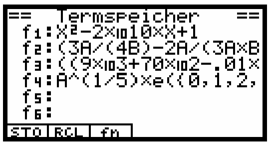
$\sqrt[5]{-a} = 0$ für a=0 (Wurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier keine Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).

$\sqrt[5]{-a} = |a|^{1/5}$ für a<0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).

$\sqrt[5]{-a} = e^{\pi i/5} \times a^{1/5}$ für a>0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln)).

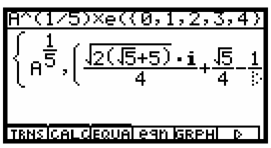
Zum Erhalt der Nebenwurzeln nutzen wir die Formel auf S.324 oben und berechnen hier der Einfachheit halber $\sqrt[5]{A}$ (mit A>0):

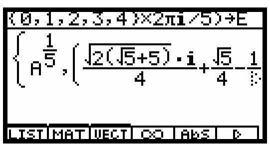
$x_k = x_0 * \exp(\frac{k*2\pi}{n} * i)$ mit n = 5 und k = 0, 1, 2, 3, 4, wobei x_0 die Hauptwurzel ist.

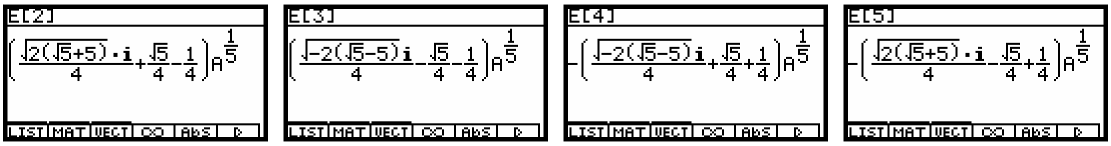


übersichtliche Eingabe im RUN-MAT-Menü,

dann weiter im CAS-Menü (Aufruf von fn4), Ergebnisliste in E abspeichern, der besseren Sichtbarkeit wegen dann E[1] bis E[5] einzeln aufrufen:







Damit haben wir im CAS mithilfe der Lösungsformel alle Probleme umgangen und erhalten sofort Haupt- und Nebenwurzeln in der richtigen Reihenfolge!

Druckfehlerhinweise:

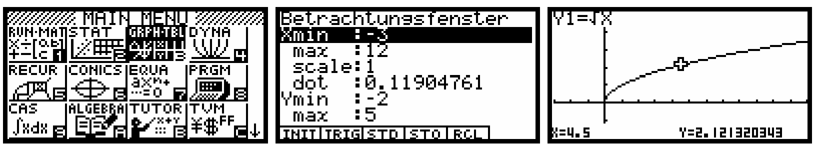
Kl.-St. 11, S. 312 (Definition 12.3)
Formulierung nicht ganz korrekt: *... und einer imaginären Zahl, dem Imaginärteil Im(z).*
Im(z) ist eine reelle Zahl und keine imaginäre Zahl, weshalb dann i als Faktor hinzukommt.
Vorschlag: statt dem Komma das Wort *mit* schreiben:
... und einer imaginären Zahl mit dem Imaginärteil Im(z).
(Ich frage in Prüfungen stets nach dem Imaginärteil, also nach der reellen Zahl Im(z) und erhalte oft die Antwort Im(z)*i . Die Definition 12.3 sollte also klarer gefasst werden.)

S. 324 (letzte Zeile im 1. Beispiel):
Die Lösung für k=0 wird als **Hauptwert** bezeichnet, *sofern für das Argument φ das Hauptargument im Bereich -180° < $\varphi \leq$ 180° benutzt wird.* (Dieser Zusatz sollte angefügt werden.)
(Benutzt der Schüler als Argument insbesondere Winkel mit 180° < φ ≤ 360°, dann erhält er für k=0 nicht die Hauptwurzel sondern bereits die erste Nebenwurzel. Jeder GTR/CAS ist mit dem Hauptargument im Bereich -180° < φ ≤ 180° ausgelegt. Entspricht DIN-Empfehlung.)

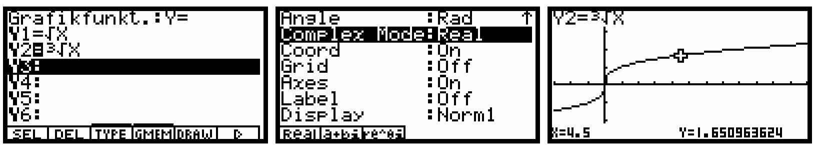
Anmerkung:
S. 322u. (Formen der Darstellung)
Die kartesische Form z=a+b*i wird oft auch (in der Algebraausbildung für Informatiker) in der **Zahlenpaarnotation** eingeführt: **z = (a/b)**, womit dann sogar auf das Symbol i verzichtet werden kann, wie es z.B. im TI-86 der Fall ist. (Ein TI-Kenner wird das wissen, dass der TI-86 die Zahlenpaararithmetik im Sinne der komplexen Zahlen beherrscht.) vgl. auch Screenshot S.317Mitte.
Wenn in der Polarform schon auch auf die **Versornotation** hingewiesen wird, sollte auch bei der kartesischen Form die Zahlenpaarnotation als zweite Schreibweise genannt werden.

Weiter:
graphische Darstellung von Wurzelfunktionen:

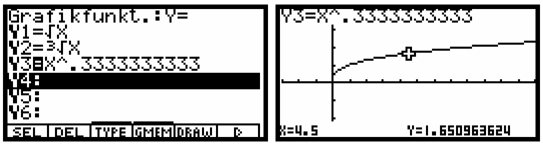
Wegen der Definition 1.6 (S. 32) ergeben sich folgende graphische Darstellungen für die (Haupt-)Äste der Wurzelfunktionen (im GRPH-TBL-Menü):



Quadratwurzelfunktion o.k.

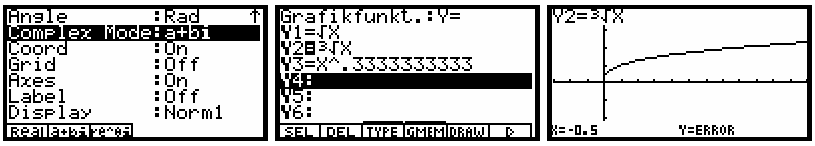


neg. Ast nicht o.k.!



korrekter Verlauf im Real-Mode.

Das Schaubild im letzten Screenshot der vorangehenden Seite ist unkorrekt, da y2 und y3 die gleichen Schaubilder ergeben sollten! Für negative x gibt es keine Wurzelfunktion in $\mathbb{R}$!

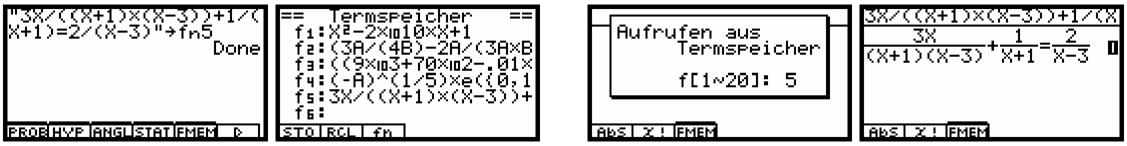


Im Kplx-Modus werden nur die (reellen) Hauptwurzeln auf der positiven y-Achse beachtet – aber nicht die reellen Nebenwurzeln auf der negativen y-Achse!

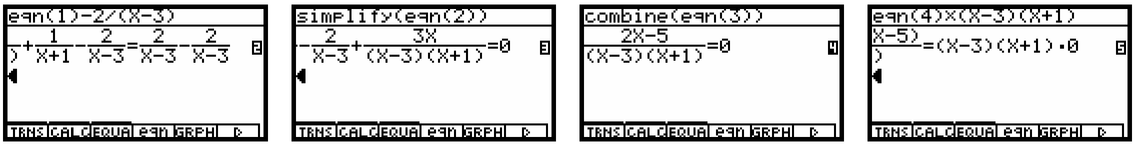
Tipp: Schaubilder für Wurzelfunktionen sollten im Kplx-Modus ausgeführt werden!

5. Übung: Äquivalenzumformungen mit Gleichungen im ALGEBRA-Menü

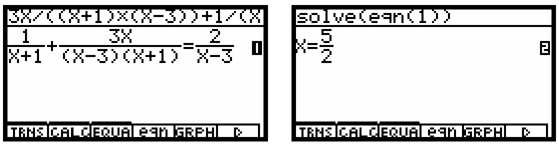
AUFGABE 01 w) (S.21 Kl.-St.11)
Eingabe der Gleichung wieder im RUN-MAT-Menü (Termspeicher als Zwischenablage!)



Die Gleichung liegt nun im ALGEBRA-Fenster als Gleichung (1) vor und wird schrittweise umgeformt. Es ergibt sich (die unvereinfachte) Gleichung (2). Mit combine werden Partialbrüche zusammengefasst. Tipp: Im CAS alle Gleichungsanteile stets auf eine Seite bringen.



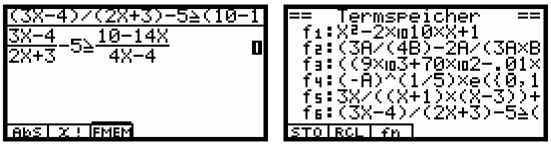
Mit Blickauf die Nenner ist die Definitionsmenge $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq -1$ und $x \neq 3$. Lösung $x = \frac{5}{2}$.



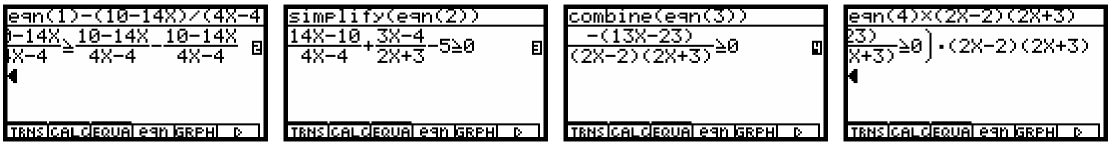
Im CAS-Menü hat man sofort die Lösung.

Das ALGEBRA-Menü dient der schrittweisen Umformung, um diese Rechenschritte zu üben.

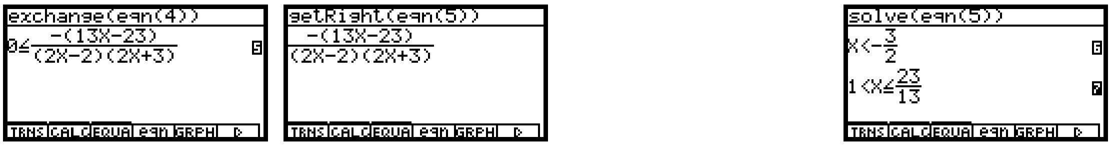
6. Übung: Äquivalenzumformungen mit Ungleichungen, AUFGABE 01 v) S.25 Kl.-St.11



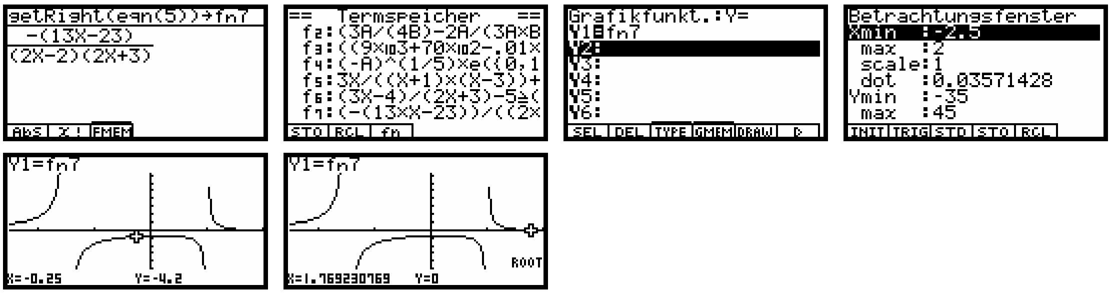
Eingabe wegen der Ungleichung im ALGEBRA-Menü und Abspeicherung in fn6.



Mit dem Durchmultiplizieren versagt das System, da eine Fallunterscheidung notwendig wird.



Es könnte nun die rechte Seite ausgewertet werden oder es wird der solve-Befehl genutzt.
Wir untersuchen die rechte Seite von eqn(5) graphisch und legen den Term im Termspeicher fn7 ab.

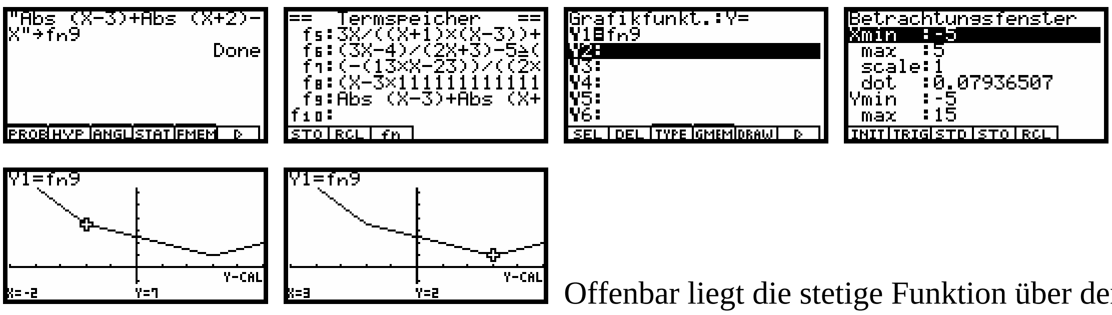


Mit den Polstellen und der Nullstelle ist die Lösung nachvollziehbar.
Das Schaubild mit den drei Kurvenästen bestätigt also die Lösung!

7. Übung: Äquivalenzumformungen mit Beträgen
(Fallunterscheidung zur Betragsauflösung oder graphische Lösung, ALGEBRA-Menü)

AUFGABE 02 t), S.43 Kl.-St.11

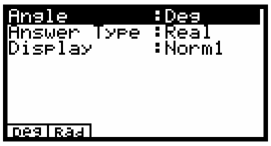
Wir untersuchen die Aufgabe |x-3| + |x+2| > x im GRPH-Menü. Dazu speichern wir zuerst den Formelterm |x-3| + |x+2| - x (> 0) im RUN-Menü in der Zwischenablage fn9 ab, um ihn dann von dort aus aufzurufen:



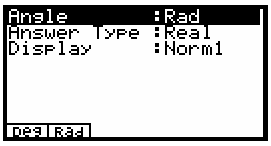
Offenbar liegt die stetige Funktion über der x-Achse, d.h. alle reellen x sind Lösung der Ungleichung.

Eleganter Lösungsweg:
Ungleichung |x-3| + |x+2| > x offenbar für negative x erfüllt!
Für nichtnegative x gilt nun aber |x-3| + |x+2| > |x+2| = x+2 > x .
Damit sind alle reellen x Lösung.

8. Übung: Trigonometrie (vgl. S. 54u., Kl.-St.11)
Wir rechnen im CAS-Menü:

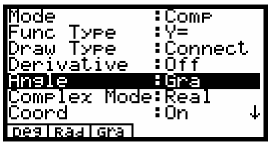


Altgrad voreingestellt



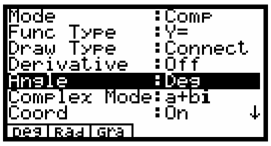
Bogenmaß voreingestellt

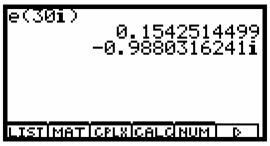
Im RUN-Menü kann zusätzlich in Neugrad gerechnet werden:

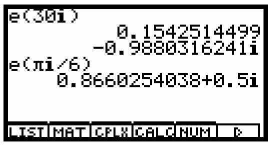


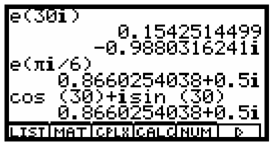
„Gra“ bedeutet Neugrad (Gon) !

Rechnen mit komplexen Zahlen im Altgradmodus bei Altgradeingabe:







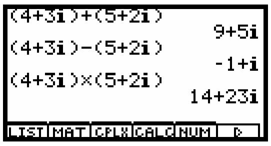


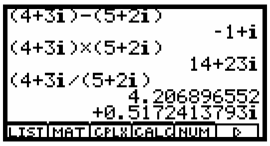
Offenbar wird im Altgradmodus die komplexe e-Funktion bei Altgradeingabe falsch ausgewertet? Die Winkeleingabe in der komplexen e-Funktion wird von GTR stets als Bogenmaß interpretiert. Nur die trigonometrischen Funktionen interpretieren Altgradeingaben korrekt, wenn dies im SET UP so voreingestellt ist.

Interessanter Weise erfolgt die Anzeige des Ergebnisses in Altgrad!

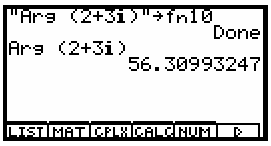
Hinweis:
die Screenshots im Buch Kl.-St. 11 (S. 312ff) beruhen noch auf dem OS 2.20 des ClassPad, im September 2006 wurde das erweiterte Betriebssystem 3.00 eingeführt (Update auf 3.02 seit August 2007 verfügbar.)

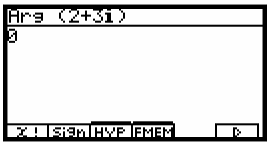
Neu im OS 3.02: Kleine stilistische Änderungen (Reihenfolge der Summanden in den Ergebnissen) Grundformatmenü erweitert, Statuszeile unten anklickbar (Grundformat ändert sich) Imaginäre Einheit wahlweise als i oder j (Elektrotechnik!) definierbar.





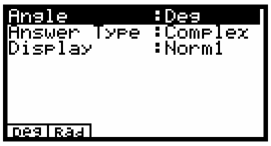
im CAS:

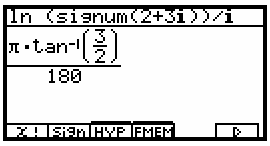



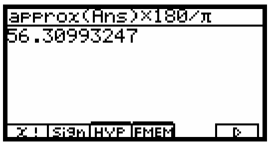


Die exakte Ergebnisanzeige ist mit dem Arg-Befehl im CAS nicht möglich.

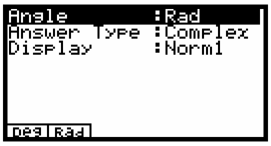
Jedoch funktioniert folgender „Trick“:
signum(2+3i) ist die „normierte“ komplexe Zahl auf dem Einheitskreis mit dem gleichen Winkel wie 2+3i. Denkt man an die exponentielle Darstellung dieser normierten Zahl, dann steht der Winkel im Exponenten (mit der imaginären Einheit i). Mit dem **ln** kann man den Exponenten erhalten. Dividiert man durch i, erhält man den Winkel in exakter Form, allerdings im Bogenmaß (trotz Voreinstellung auf Altgrad!):

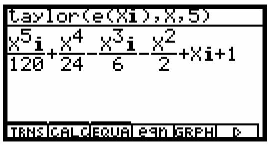




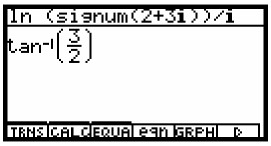


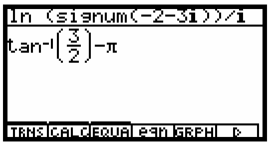
Meine Empfehlung: Rechnen Sie stets im Bogenmaß, dann interpretiert der GTR im RUN- oder CAS-Menü alle Winkelangaben auch in komplexen e-Funktionen korrekt! Später ist es einfach, Bogenmaße in Altgrad umzurechnen, wenn es erforderlich ist.

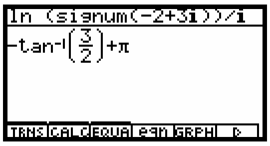




Hintergrund der „Kompromisslosigkeit“ der komplexen e-Funktion bzgl. Altgrad ist die Taylorentwicklung. Wie sollte man potenzierte Altgradeinheiten interpretieren?





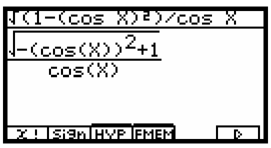


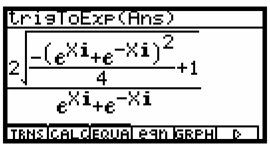
Winkel im Bogenmaß

Der GTR gibt die Hauptargumente korrekt an: Unterhalb der x-Achse negative Winkel, oberhalb der x-Achse positive Winkel, d.h. Hauptargumentbereich -180° < Winkel $\leq$ 180°.

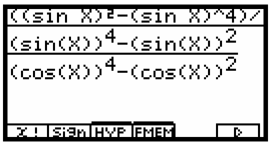
9. Übung: Wichtige Formeln der Trigonometrie im CAS
(Schulbuch Kl.-St.11 S.64 AUFG. 01a –b)

Im RUN-Menü erfolgt die übersichtliche Abspeicherung in der Zwischenablage fn11 und fn12. Im CAS erfolgt die „Weiterverarbeitung“.





eine reelle Vereinfachung gelingt offenbar nicht.



Hier findet das CAS die gesuchte Vereinfachung!

Fazit:
der ALGEBRA FX 2.0PLUS kennt einige trigonometrische Umformungen, aber durchaus nicht alle!

Anhang:

Aktuelle Link-Software für den CASIO ALGEBRA FX 2.0PLUS

1. Link-Software (PC – ALGEBRA FX 2.0 PLUS)

Es gibt verschiedene Softwareprodukte (und Anbieter) zum Datenaustausch PC-GTR, die für den ALGEBRA FX 2.0PLUS geeignet sind. Dieser GTR hat nur eine serielle Schnittstelle, also noch keinen USB-Port!

a) CASIO FA 123USB: Software (Version 1.01) mit USB-Linkkabel **SB 88**
Hier wird über das USB-Link-Kabel (mit Seriell-USB-Adapter) am USB-Port des PC eine serielle Schnittstelle emuliert. (U232SERIAL on USB Port (z.B. COM6)
Diese Software arbeitet auch mit dem seriellen Linkkabel **SB 87** zusammen.
http://edu.casio.com/products/peripheral/fa123usb/

b) CASIO FA 124: Software (Version 1.01) mit seriellem Linkkabel **SB 87**
Diese Linksoftware arbeitet auch mit dem USB-Linkkabel **SB 88**, wobei entsprechende Treiber zu installieren sind, damit das Adapterkabel vom PC erkannt wird!

serielles Kabel SB 87 von CASIO

USB-Kabel SB 88 von CASIO mit Treiber-CD

Die benötigte Software FA123 bzw. FA124 ist im Internet kostenlos erhältlich:
http://edu.casio.com/dl/index.html Empfehlung: FA123USB statt FA124 nutzen!

c) FX-Link-Kit Connection Software (Version 5.0) von Cynox mit zusätzlichen USB-Adapterkabel: Die Software ist käuflich zu erwerben.

Digitus (Prolific Technology Inc.) USB-RS232 Adapter

d) FX-Interface Professional USB von Yellow:
Die Firma Yellow Computing existiert nicht mehr! Software und Kabel noch erhältlich.

USB-Link-Kabel mit Adaptermodul von FTDI

2. Erweiterung des Betriebssystems mittels der Software GERMANY101 (Version 1.01)
(GERMANY101.exe-Datei zur Aktualisierung der deutschen Sprachoberfläche im GTR)
Kostenlos über http://edu.casio.com/dl/ herunterladen und entpacken (germany_101.zip).
Der GTR muss mit dem PC (mittels SB 87 oder SB 88) verbunden sein.

3. Erweiterung des Betriebssystems mittels Add-In-Software:
Zur Installation wird eine spezielle CASIO **Add-In-Install-Software** (Version 1.03) benötigt: Kostenlos über http://edu.casio.com/dl/ herunterladen und entpacken (afx2_addin_inst_103.zip).
Die Add-In-Software selbst hat das Dateiformat *.cfx, z.B. erweitert **3D_B14.cfx** die vorhandene 2D-Grafik im GTR auf rotierende 3D-Grafiken mit Zoom-Funktion.
Download: http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/3dgraph_cfx.zip
Weitere Add-In's z.B. unter:
http://perso.orange.fr/duobab/graph100/asm/addons/addons.htm

Hinweis:
Der GTR kann sich „aufhängen", wenn er mit zu vielen Programmen „zugemüllt" ist.

The Mathematics Education into the 21st Century Project

together with

The University of Applied Sciences (FH), Dresden (Germany)

are proud to announce our

10th (Anniversary!) International Conference

“Models in Developing Mathematics Education”

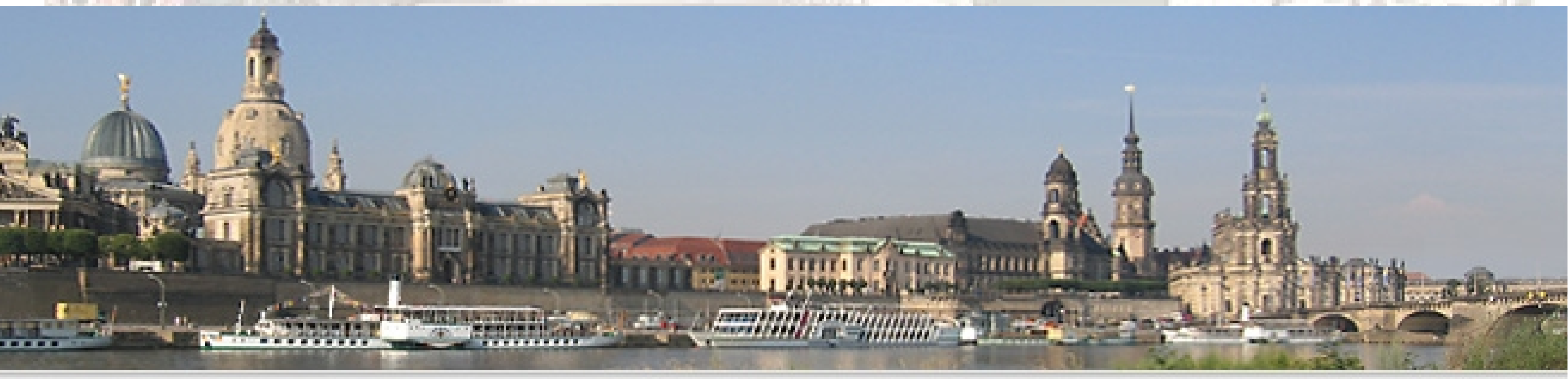
September 11 – 17, 2009
Dresden, Saxony, Germany

in cooperation with

Saxony Ministry of Education

Chairman
Dr. Alan Rogerson, International Coordinator of the Mathematics in Society Project (Poland).
Prof Dr Fayez Mina, Dept. of Curriculum & Instruction, Faculty of Education, Ain Shams University (Egypt).

You are invited to attend our project conference to be held in the historic and beauty-ful city of Dresden, Germany.
The chairman of the Local Organising Committee will be Prof. Dr. Ludwig Paditz of the Dresden University of Applied Sciences.
For ALL further conference details and updates please email arogerson@inetia.pl .



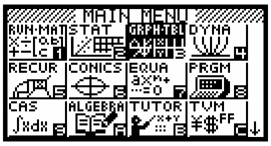
Arbeitsmaterial (Teil 2) zur Fortbildungsveranstaltung D01852

Einsatz des ALGEBRA FX 2.0PLUS im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

Kl.-St. 11 S.67f (Tabellierung von Funktionen mit dem FX 2.0PLUS im GRPH-TBL-Menü)



F6-F2-RANG:

Im Tabellenbereichsfenster werden Startwert, Endwert und Schrittweite (pitch) festgelegt.

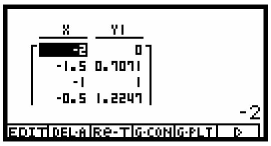
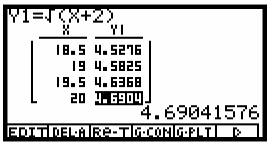
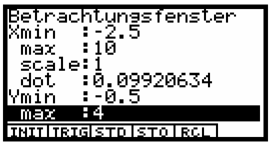
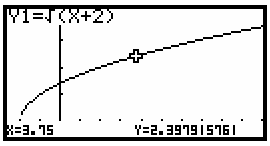
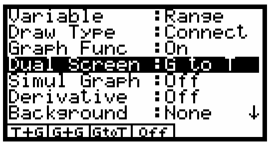
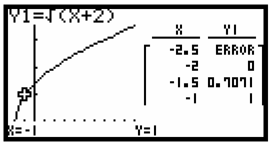



Schaubild zu y1:



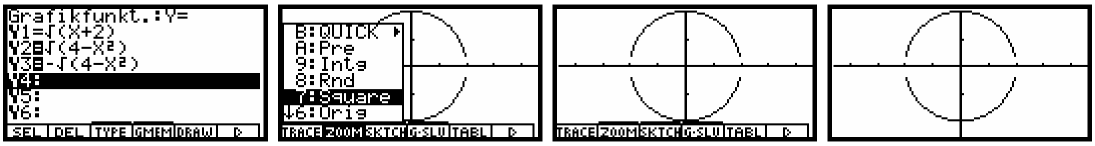


Im Dual-Screen können das Schaubild und die Tabelle gleichzeitig angezeigt werden. (Dualscreen muss im SET UP voreingestellt werden.)

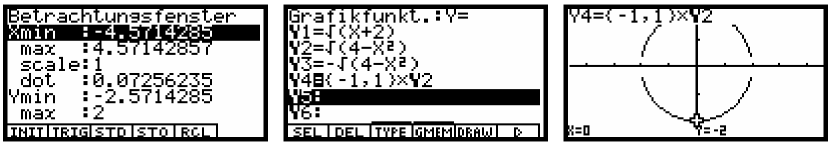
Beispiele zur Darstellung anderer Kurven:
Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 4$ kann nicht als Funktion gezeichnet werden.

Ausweg: oberen bzw. unteren Halbkreis als Funktion zeichnen: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

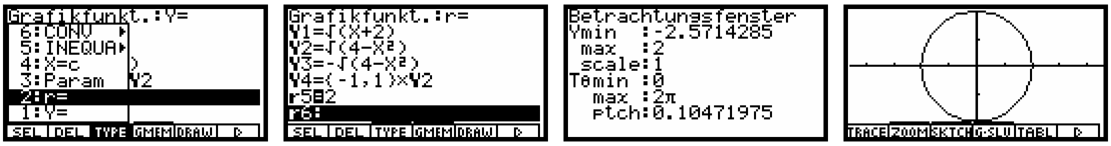
Tipp:
mit „**CTRL 0**“ kann die untere Zeile (Auswahlmenü) ausgeschaltet/eingeschaltet werden.



Mit **ZOOM Square** wird die Fenstereinstellung so skaliert, dass der Kreis unverzerrt erscheint!

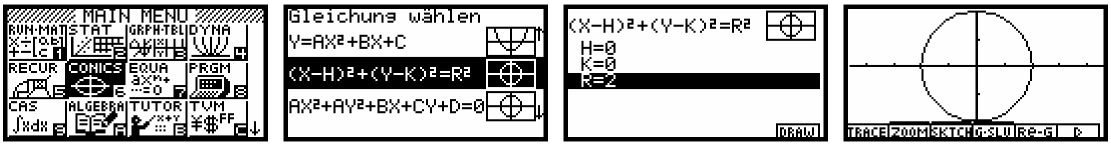


Tipp:
Die unterschiedlichen Vorzeichen wurden in Y4 als Listenfaktor {-1,1} zur Wurzel hinzugenommen.

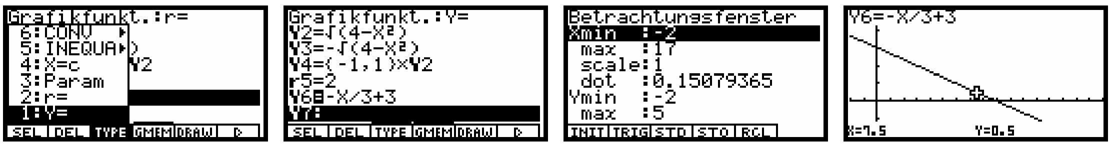


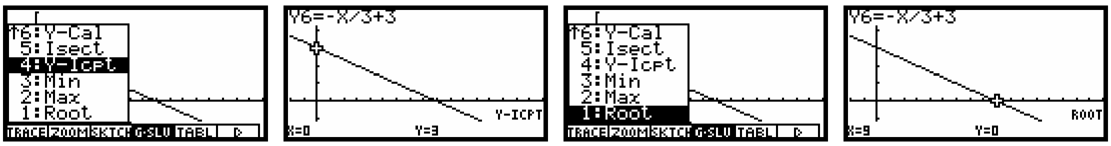
in Polarkoordinaten $r = r(\vartheta) = 2$

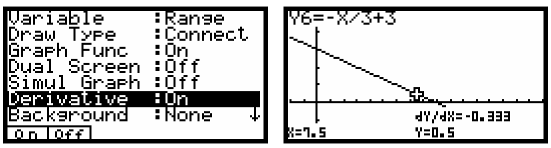
Im Kegelschnitt-Menü:



S.83: y = -x/3 + 3 darstellen (Achsenabschnitte bestimmen) GRPH-Menü

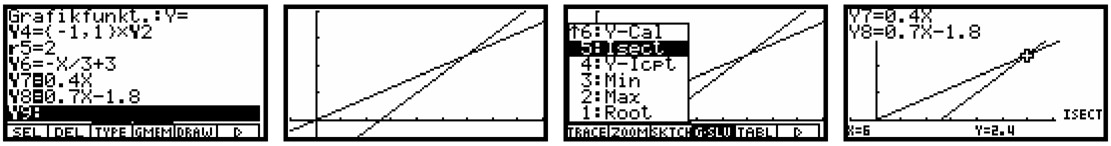


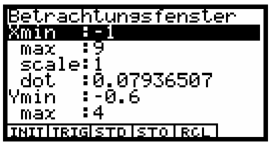




Anzeige der Ableitung (Derivative On)

Schnittpunkte von Kurven: S.84u.

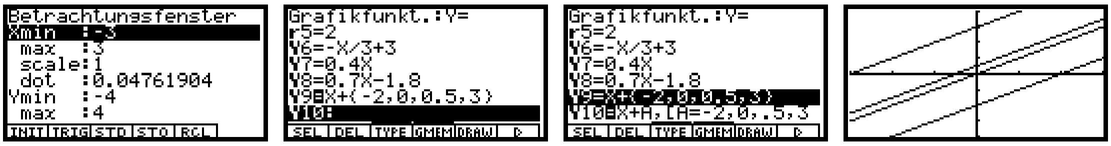




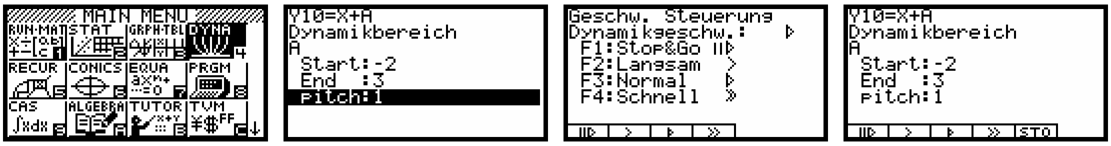
Die notwendigen Einstellungen für das Betrachtungsfenster.

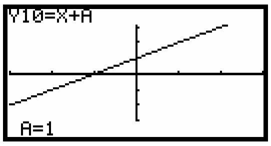
Kurvenscharen S.90

y = x+A mit A={-2,0,0.5,3} eingeben als **y = x + {-2,0,0.5,3} oder y=x+A,[A=-2,0,.5,3]**



oder eine dynamische Grafik (DYNA-Menü) generieren:

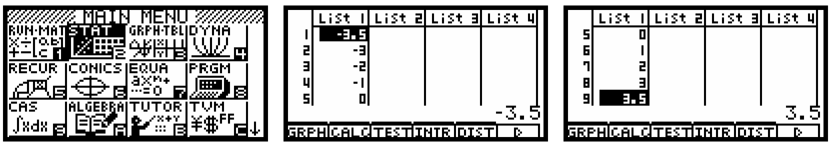




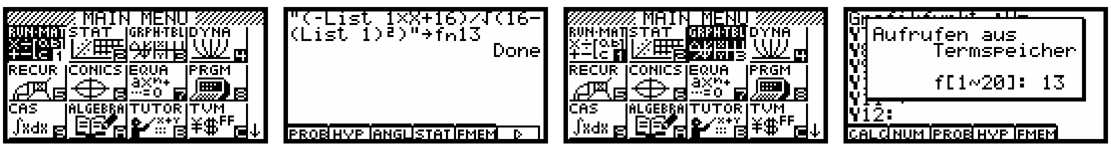
Probieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten aus!

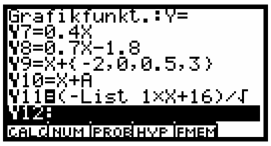
Kurvenschar $y = \frac{1}{\sqrt{16-t^2}} \times (-t \times x + 16)$ mit t = {-3.5,-3,-2,-1,0,1,2,3,3.5}, S.91

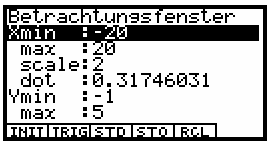
Im STAT-Menü werden unter List1 die Parameter abgespeichert:

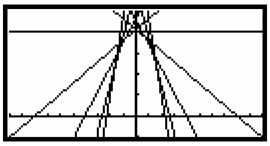


Im GRPH-Menü wird List1 zur Eingabe genutzt (vorher über das RUN-Menü als fn13 im Termspeicher abgelegt):







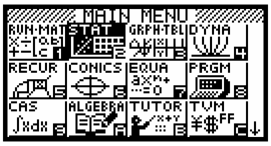


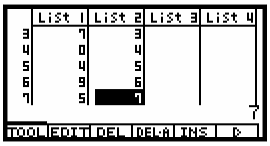
Das Zeichnen der Kurvenschar nimmt etwas Zeit in Anspruch.
Schneller geht es mit der Syntax
Y12 = (16 – AX) / √ (16 – A²),[A = -3.5, -3, -2,- 1, 0, 1, 2, 3, 3.5]
(oder: dynamische Grafik nutzen)

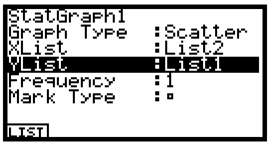
Abschnittsweise definierte Funktionen: S.102ff

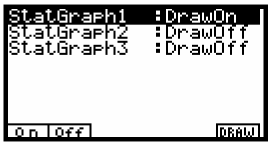
Eine punktweise definierte Funktion kann im STAT-Menü als Scatterplot dargestellt werden:

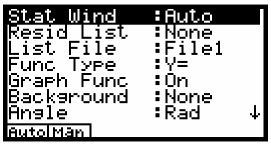
$$y = f(x) = \begin{cases} 7 & \text{für } x=1 \\ 6 & \text{für } x=2 \\ 7 & \text{für } x=3 \\ 0 & \text{für } x=4 \\ 4 & \text{für } x=5 \\ 9 & \text{für } x=6 \\ 5 & \text{für } x=7 \end{cases}$$

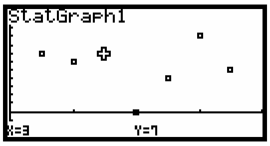




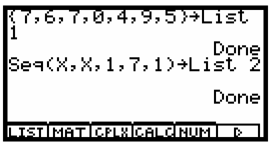








List 2 und List 1 heißen verbundene Datenlisten, da sie die Datenpaare (x/y) enthalten.
Die Listen können auch im RUN-Menü eingegeben werden:

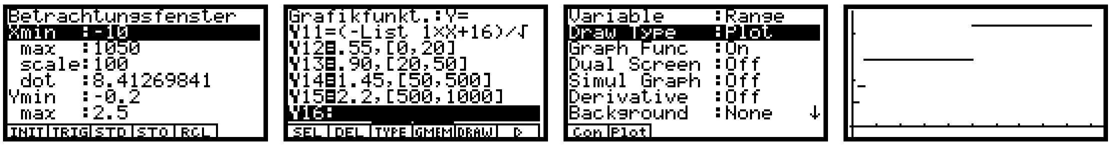


List 2 (x-Werte) wird über den Seq-Befehl erzeugt.

Eine linksseitig stetige Treppenfunktion, S. 103 (Briefporto)

$$y = f(x) = \begin{cases} 0,55 & \text{für } \quad 0 < x \le \quad 20 \\ 0,90 & \text{für } \quad 20 < x \le \quad 50 \\ 1,45 & \text{für } \quad 50 < x \le \; 500 \\ 2,20 & \text{für } \; 500 < x \le 1000 \end{cases}$$

Zunächst wird die Funktion über vier einzelne Kurvenäste Y12 bis Y15 definiert.



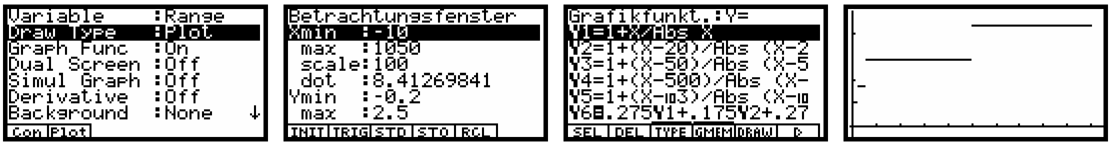
Mit diesen Definitionen ist die Gesamtfunktion in den Sprungstellen nicht eindeutig festgelegt.

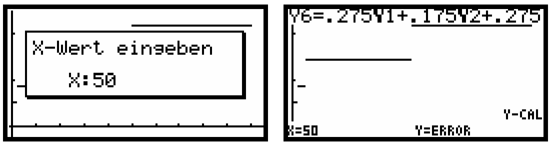
Mithilfe der Signumfunktion Y = X / Abs X $= \begin{cases} -1 & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x>0 \end{cases}$ können die Kurvenäste in einer Vorschrift definiert werden (y = signum(x) steht im GRPH-Menü nicht zur Verfügung):

Verschiebung der Sprungstellen und Anhebung der Funktionswerte um +1:

Y1 = 1+X / Abs X
Y2 = 1+(X-20) / Abs (X-20)
Y3 = 1+(X-50) / Abs (X-50)
Y4 = 1+(X-500) / Abs (X-500)
Y5 = 1+(X-1000) / Abs (X-1000)

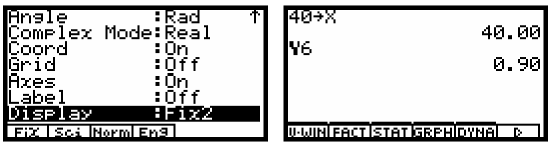
Die Sprünge der Höhe 2 werden reduziert auf den Zuwachs der Portopreise:
Y6 = 0.55Y1/2 + 0.35Y2/2 + 0.55Y3/2 + 0.75Y4/2 – 2.20Y5/2
= .275Y1 + .175Y2 + .275Y3 + .375Y4 – 1.1Y5
= (11Y1 + 7Y2 + 11Y3 + 15Y4 – 44Y5) / 40





Leider ist Y6 in den Sprungstellen nicht definiert!

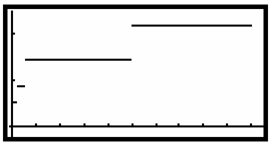
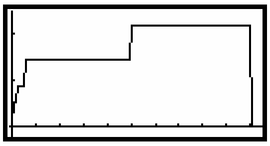
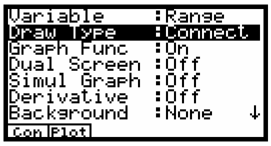
Im RUN-Menü kann Y6 genutzt werden: z.B. Wie viel kostet ein 40g-Brief?



Der 40g-Brief kostet 0,90€ Porto.

Ganz korrekt wurde mit Y6 folgende Funktion definiert:

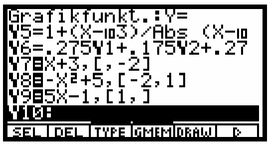
$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0{,}55 & \text{für} \quad 0 < x < 20 \\ 0{,}90 & \text{für} \quad 20 < x < 50 \\ 1{,}45 & \text{für} \quad 50 < x < 500 \\ 2{,}20 & \text{für} \quad 500 < x < 1000 \\ 0 & \text{für} \quad 1000 < x \end{cases}$$

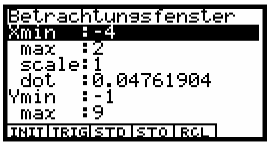
 statt:  

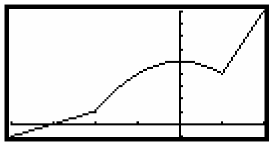
Fehlerhafte Grafik, da **pixelweises Zeichnen** (Plot statt Connect) nicht aktiviert wurde!

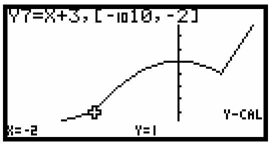
S. 104, stetiger Kurvenverlauf mit Knickstellen

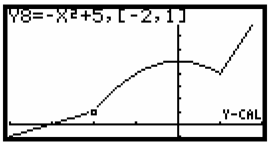
$$y = f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{für} \quad -\infty < x < -2 \\ -x^2+5 & \text{für} \quad -2 \le x \le 1 \\ 5x-1 & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

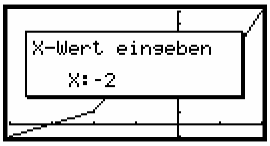
oder 

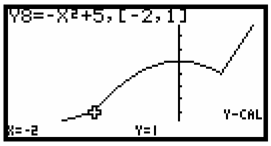






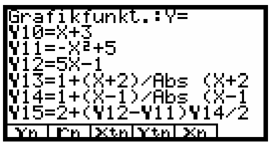


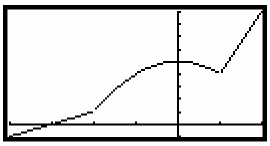
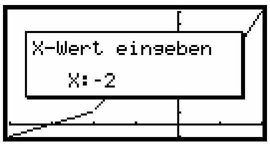


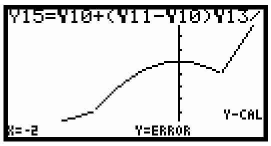


Es gibt keine Definitionslücken in den Knickstellen. Die Kurvenäste gehen nahtlos ineinander über.

Die gleiche Grafik erhält man mit folgender interessanten Definition:
Y10 = X+3, Y11 = -X^2 + 5, Y12 = 5X – 1 sowie
Y13 = 1 + (X+2) / Abs (X+2) und Y14 = 1 + (X - 1) / Abs (X -1).
Mit **Y13 = Y10 + (Y11 – Y10)Y13/2 + (Y12-Y11)Y14/2** hat man dann wieder allein über Y14 die Gesamtkurve in einer Formel realisiert, die allerdings wieder in den Knickstellen nicht definiert ist:



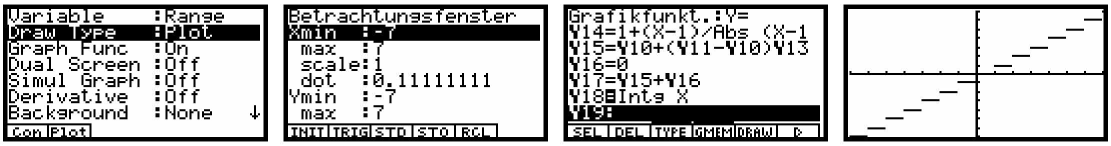



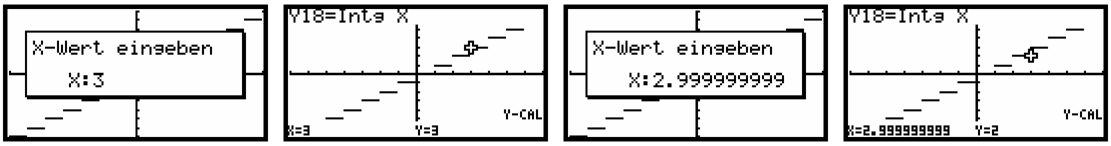


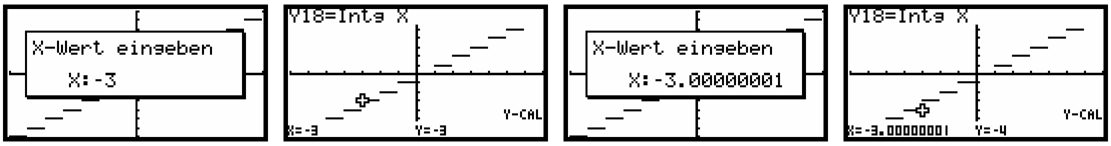
Die Gaußklammer-Funktion y = [x] ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion, S. 104, (Abrundungsfunktion, engl. y = floor(x))

$$y = f(x) = \begin{cases} \ldots & \\ -2 & \text{für} \quad -2 \le x < -1 \\ -1 & \text{für} \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{für} \quad 2 \le x < 3 \\ \ldots & \end{cases}$$

Pixelweises zeichnen aktivieren!



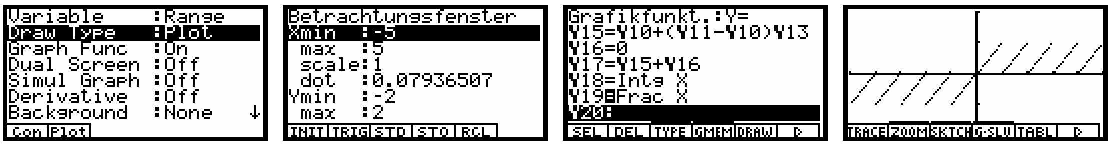


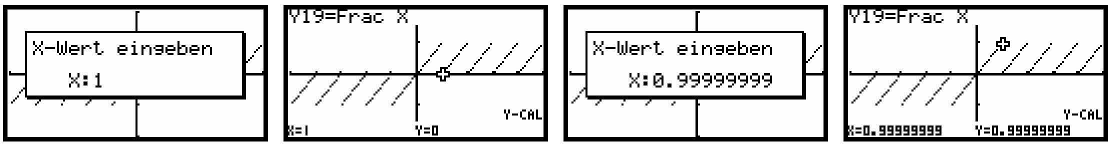


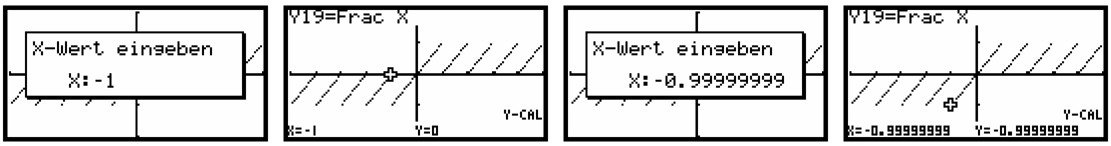
Die Funktion ist also überall definiert!
In den Unstetigkeitsstellen gilt der obere Funktionswert, d.h. der von rechts her anliegende Wert (rechtsseitige Stetigkeit). Jeder Kurvenast hat damit einen Anfangspunkt aber keinen Endpunkt.

Die Nachkommastellenfunktion y(x) = frac(x), S.104f

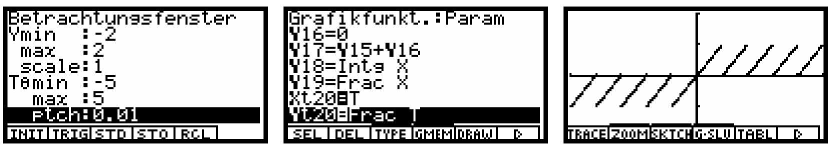
pixelweises Zeichnen aktivieren! (Im Bild S. 105 oben ist dies nicht der Fall, d.h. das Schaubild ist dort unkorrekt.)
Die betrachtete Funktion ist im Nullpunkt stetig, jedoch nicht in den anderen ganzzahligen x-Werten. Für positive x ist die Funktion rechtsseitig stetig, d.h. y(x+0) = y(x). Für negative x liegt linksseitige Stetigkeit vor, d.h. y(x-0) = y(x).



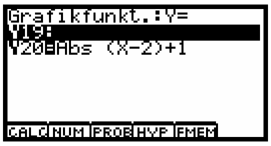


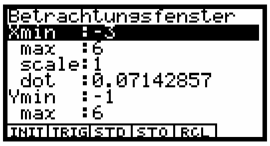


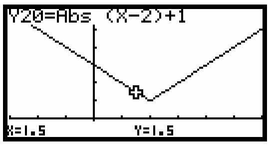
Tipp: um im pixelweisen Zeichnen glatte Kurvenäste zu erhalten, wählt man eine passende Parameterdarstellung mit kleiner Schrittweite für den Parameter.



Abschließend betrachten wir y = | x-2 | +1: (s. S. 105)

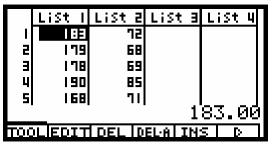


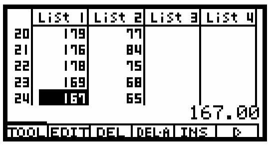


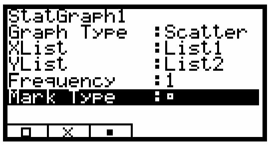


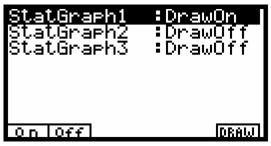
Lineare Regression, S. 109ff

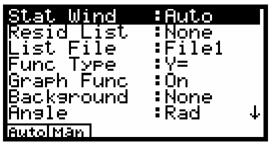
Die Dateneingabe der verbundenen Datenlisten kann sowohl im Main- als auch im Statistik-Menü erfolgen:

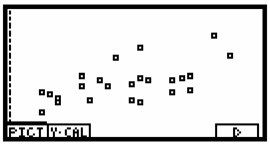


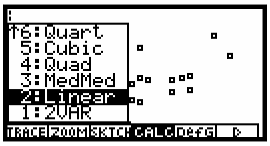


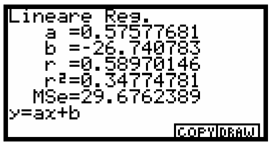


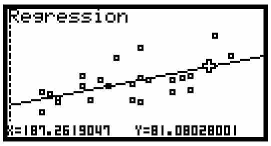




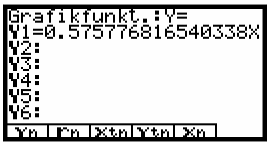


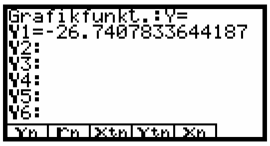






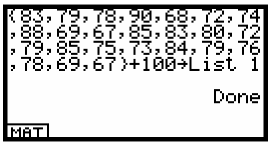
im GRPH-Menü:



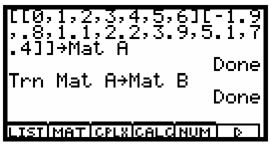


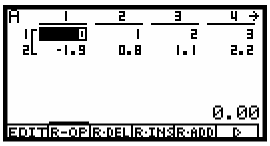
Tipp:

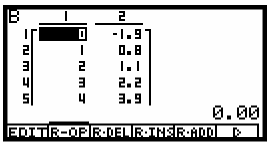
Die Eingabe von List 1 kann auch ohne die Hunderterstelle „1“ erfolgen.
Mittels der Listenarithmetik rechnet man dann **List 1 + 100 -> List1**

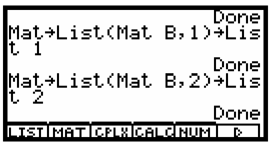


Impuls S. 109 unten (Dateneingabe über eine Matrix, dann **mat->List** nutzen)

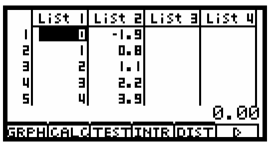




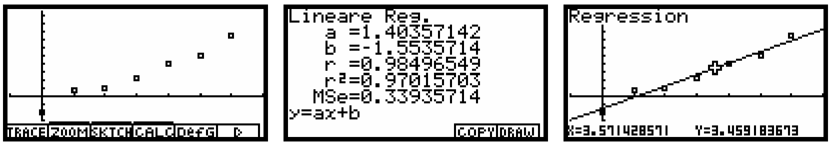




Wechsel zum STAT-Menü:

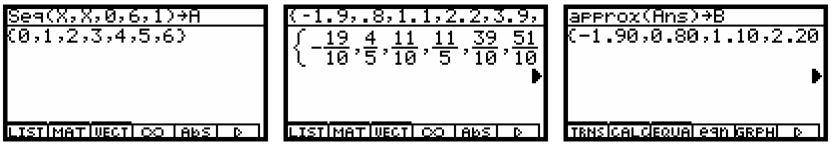


Punkte-Plot und lineare Regression schließen sich an:



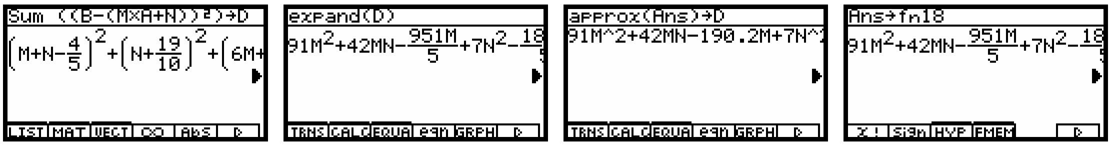
Wir betrachten nun ausführlich die Methode der kleinsten Quadrate, vgl. S. 111.

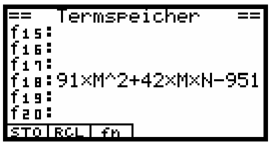
Wir rechnen im CAS-Menü:



A und B sind die Listen!

Die Regressionsgerade hat den Ansatz Y = M*X+N.
Nutzung der Listenarithmetik zur Erzeugung der Summe der quadratischen Abweichungen:

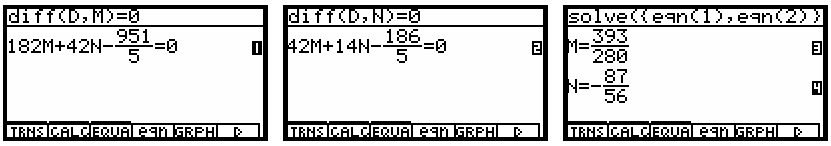


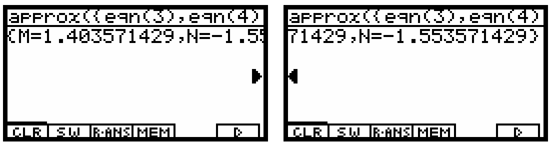


Sichern des Terms D in fn18.

Ansicht des Terms im RUN-Menü

Wir ermitteln das Minimum durch partielle Ableitung von D nach M bzw. N und Lösung des so entstehenden linearen Gleichungssystems aus den auf null gesetzten Ableitungen (notwendige Bedingung für ein Extremum).





Damit haben wir die gleiche Lösung wie zuvor!

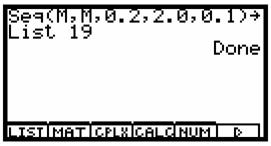
Anschaulich:
Die Funktion D(M, N) ist zu minimieren, um die optimalen Parameter M und N zu finden.

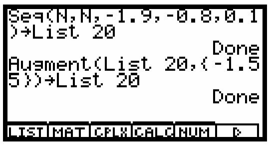
Dazu wird im Schulbuch S.112 die Funktion im Rechteck $[-1.9; -0.8]\times[0.2 ; 2.0]$ jeweils mit der Schrittweite 0,1 tabelliert (zuzüglich einer Sonderspalte für b (= N) = -1.55).

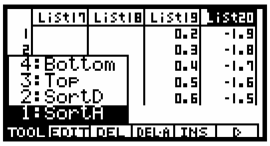
Wir erzeugen diese Tabelle der Funktionswerte

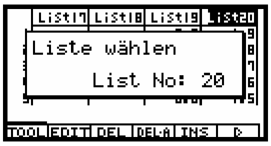
$D = 91M^2 + 7N^2 - 190.2M - 37.2N + 42MN + 106.28$ als Matrix.

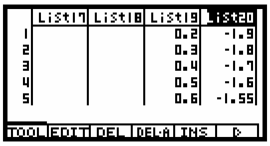
Die M-Werte für D sind eine Zahlenfolge **Seq(M,M,0.2,2.2,0.1) -> List 19**
Die N-Werte sind eine Zahlenfolge **Seq(N,N,-1.9,-0.8,0.1) -> List 20**, die um den Wert -1.55 zu ergänzen und dann zu sortieren ist:
Augment(List 20, {-1.55}) -> List 20 (im RUN-Menü) und **SortA List 20** (in STAT-Menü).





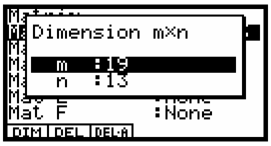


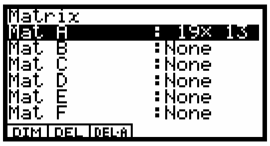




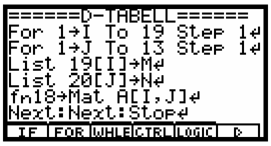
In einem kleinen Programm **D-TABELL** erzeugen wir die Matrix mit den Elementen
D(M,N) = D(List 19[I], List 20[J]) mit **I = 1(1)19** und **J = 1(1)13**.

Wir erinnern uns, dass fn18 der benötigte Formelterm D ist (s.o.)

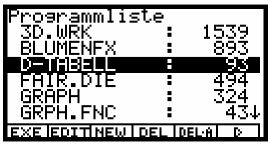




Vor Programmstart die Matrixdimension festlegen.

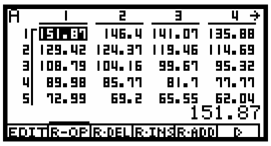
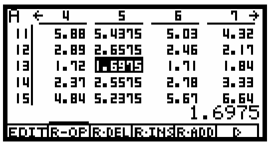
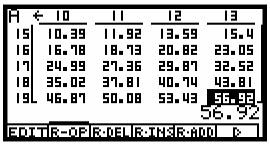


Einblick in das kleine Programm.



Start mit EXE.


Matrix ist generiert!


… 
… 
Matrix A

Der Minimalwert in dieser Matrix ist
D = 1.6975 = D(List 19[13], List 20[5]) = D(1.40, -1.55).
Damit ist die Minimumstelle (M, N) = (1.40, -1.55) gefunden.
Die exakte Lösung war (M, N) = (1.40357, -1.55357), die wir hiermit gut getroffen haben!

Die folgenden Bilder entstanden im ClassPad-Emulator als Matrix bzw. durch Tabellenkalkulation, über die der ClassPad verfügt.

Edit Aktion Interaktiv

trn(augment(matB,trn(matD))

m \ b	-1.90	-1.80	-1.70	-1.60	-1.55	-1.50	-1.40	-1.30	-1.20	-1.10	-1.00	-0.90	-0.80
0.20	151.87	146.40	141.07	135.88	133.34	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.40
0.30	129.42	124.37	119.46	114.69	112.36	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
0.40	108.79	104.16	99.67	95.32	93.20	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
0.50	89.98	85.77	81.70	77.77	75.86	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
0.60	72.99	69.20	65.55	62.04	60.34	58.67	55.44	52.35	49.40	46.59	43.92	41.39	39.00
0.70	57.82	54.45	51.22	48.13	46.64	45.18	42.37	39.70	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
0.80	44.47	41.52	38.71	36.04	34.76	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
0.90	32.94	30.41	28.02	25.77	24.70	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
1.00	23.23	21.12	19.15	17.32	16.46	15.63	14.08	12.67	11.40	10.27	9.28	8.43	7.72
1.10	15.34	13.65	12.10	10.69	10.04	9.42	8.29	7.30	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
1.20	9.27	8.00	6.87	5.88	5.44	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3.00
1.30	5.02	4.17	3.46	2.89	2.66	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
1.40	2.59	2.16	1.87	1.72	1.70	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
1.50	1.98	1.97	2.10	2.37	2.56	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
1.60	3.19	3.60	4.15	4.84	5.24	5.67	6.64	7.75	9.00	10.39	11.92	13.59	15.40
1.70	6.22	7.05	8.02	9.13	9.74	10.38	11.77	13.30	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
1.80	11.07	12.32	13.71	15.24	16.06	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
1.90	17.74	19.41	21.22	23.17	24.20	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
2.00	26.23	28.32	30.55	32.92	34.16	35.43	38.08	40.87	43.80	46.87	50.08	53.43	56.92

Algeb Dezimal Real Bog

Abschließend erzeugen wir mit dem ClassPad eine Excel-Tabelle im Tabellenkalkulations-Menü (Die Zellendefinition auf S. 112 ist nicht ganz korrekt!):

Definition der Zeile B2 bis N2 durch Kopieren von B2 nach links:
=91*A2^2+7*B$1^2-190.2*$A$2-37.2*B$1+42*A2*B$1+106.28
Definition der Spalte B2 bis B20 durch Kopieren von B2 nach unten:
=91*$A2^2+7*$B$1^2-190.2*$A2-37.2*B1+42*$A2*$B$1+106.28
Definition der Zellen C3 bis N20 durch Kopieren von B2 nach unten:
=91*$A2^2+7*B$1^2-190.2*$A2-37.2*B$1+42*$A2*B$1+106.28

Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	m\b	-1.9	-1.8	-1.7	-1.6	-1.55	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1	-0.9	-0.8
2	0.2	151.87	146.4	141.07	135.88	133.34	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.4
3	0.3	129.42	124.37	119.46	114.69	112.36	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
4	0.4	108.79	104.16	99.67	95.32	93.198	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
5	0.5	89.98	85.77	81.7	77.77	75.858	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
6	0.6	72.99	69.2	65.55	62.04	60.338	58.67	55.44	52.35	49.4	46.59	43.92	41.39	39
7	0.7	57.82	54.45	51.22	48.13	46.638	45.18	42.37	39.7	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
8	0.8	44.47	41.52	38.71	36.04	34.758	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
9	0.9	32.94	30.41	28.02	25.77	24.698	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
10	1	23.23	21.12	19.15	17.32	16.458	15.63	14.08	12.67	11.4	10.27	9.28	8.43	7.72
11	1.1	15.34	13.65	12.1	10.69	10.038	9.42	8.29	7.3	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
12	1.2	9.27	8	6.87	5.88	5.4375	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3
13	1.3	5.02	4.17	3.46	2.89	2.6575	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
14	1.4	2.59	2.16	1.87	1.72	1.6975	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
15	1.5	1.98	1.97	2.1	2.37	2.5575	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
16	1.6	3.19	3.6	4.15	4.84	5.2375	5.67	6.64	7.75	9	10.39	11.92	13.59	15.4
17	1.7	6.22	7.05	8.02	9.13	9.7375	10.38	11.77	13.3	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
18	1.8	11.07	12.32	13.71	15.24	16.058	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
19	1.9	17.74	19.41	21.22	23.17	24.198	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
20	2	26.23	28.32	30.55	32.92	34.158	35.43	38.08	40.87	43.8	46.87	50.08	53.43	56.92

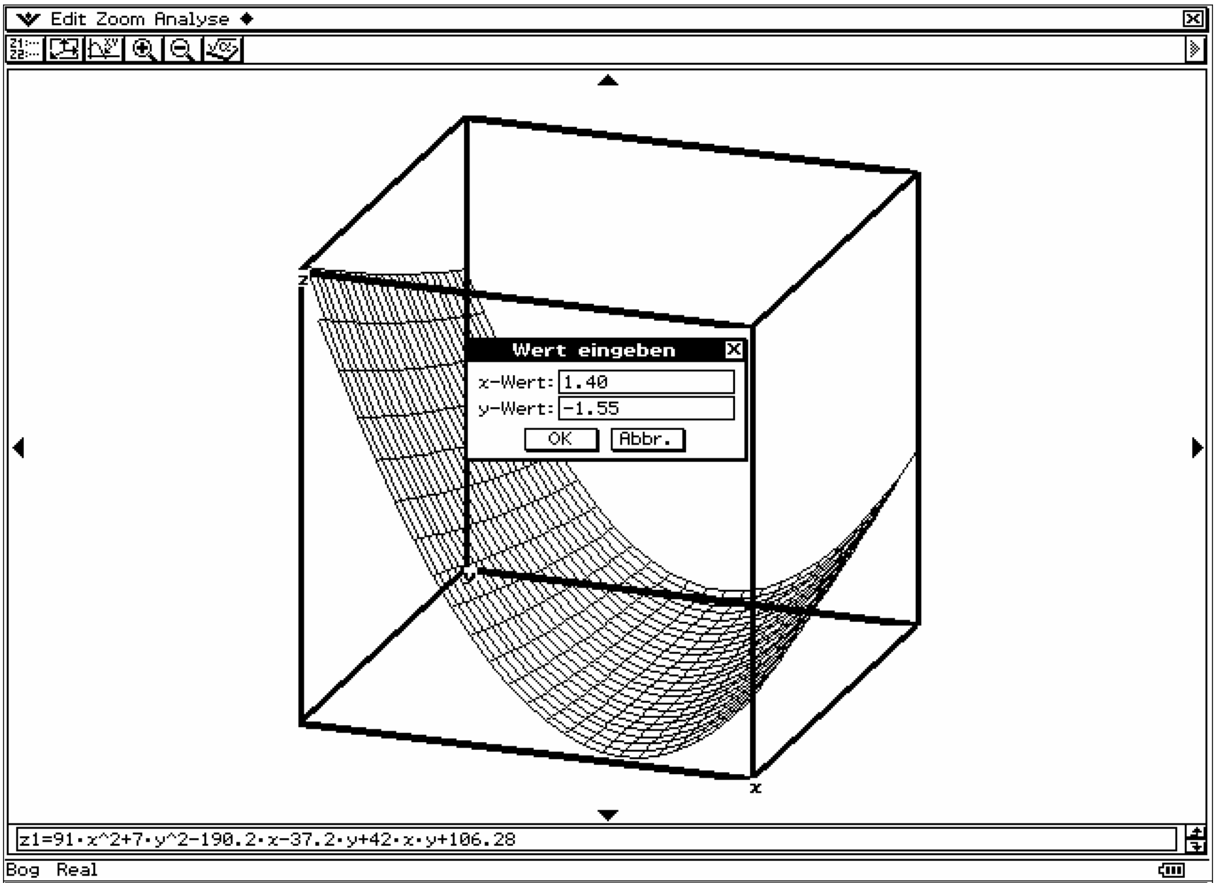
=91·$A3^2+7·C$1^2-190.2·$A3-37.2·C$1+42·$A3·C$1+106.28

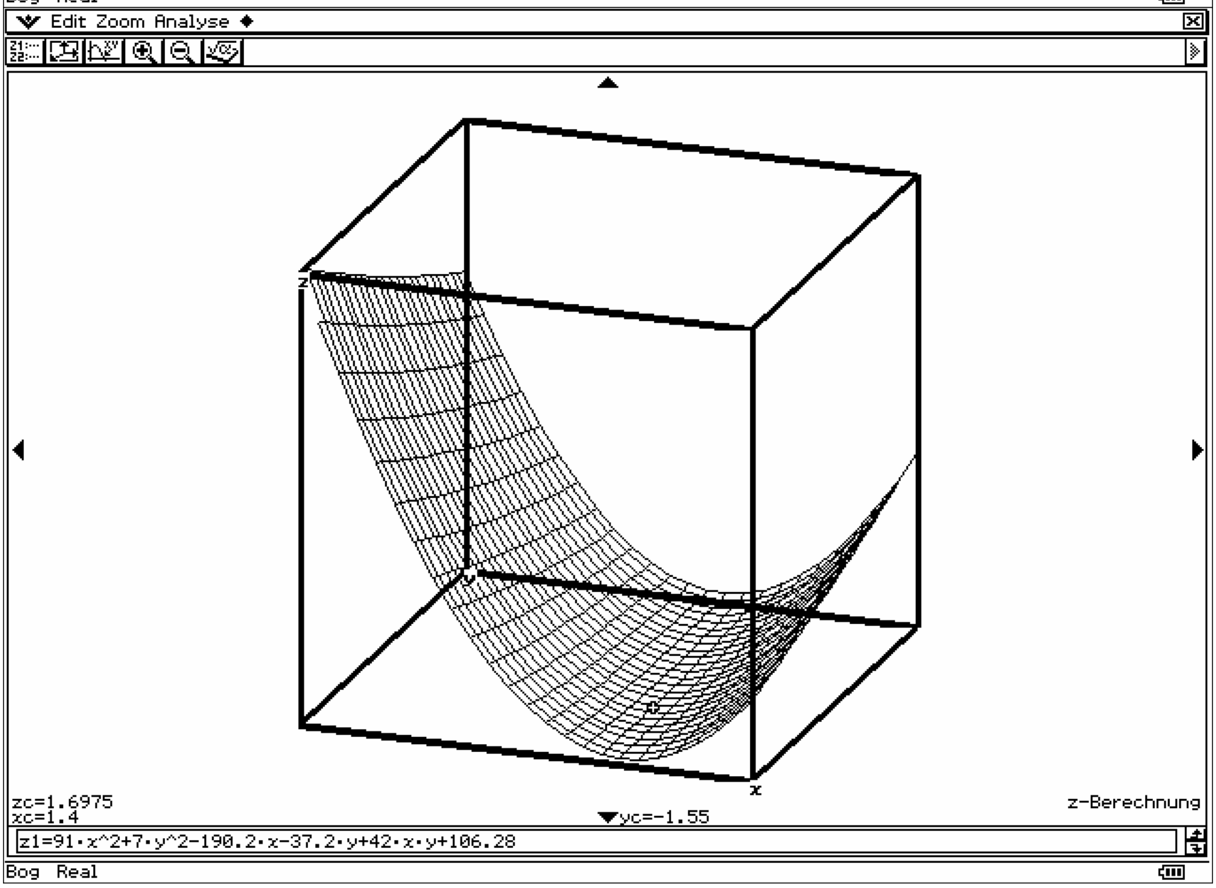
C3:N20

Das $-Zeichen bedeutet, dass sich diese Koordinate nicht ändert, ansonsten erfolgt eine dynamische Änderung. Probieren Sie es aus!

Die folgenden 3D-Grafiken (ClassPad) beziehen sich auf die oben tabellierte gekrümmte Fläche

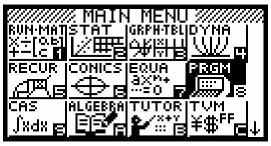
$z = D(m, b) = D(x, y) = 91x^2 + 7y^2 - 190.2x - 37.2y + 42x*y + 106.28$ (Jg.-St.12(T) S.107)

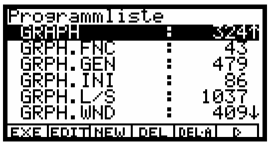




Wir untersuchen nun diese 3D-Grafik im ALGEBRA FX 2.0PLUS mithilfe der 3D-Add-In-Software 3D-GRAPH von Christian Roervik (2003):

Die Vorbereitung erfolgt mit dem Hilfsprogramm GRAPH im PRGM-Menü:

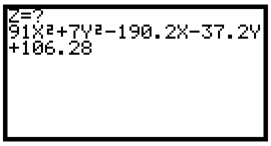


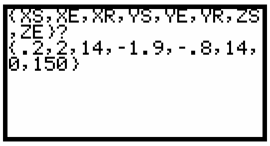


Nach dem Start mit EXE erscheint der **3D-Graph Generator** mit dem Menü:

[1] Generate
[2] Function
[3] View-Window
[4] Load/Store
[5] Exit

Wählen Sie [2] zur Eingabe der Funktion
$\mathbf{Z = 91X^2 + 7Y^2 - 190.2X - 37.2Y + 42X*Y + 106.28}$
und [3] zur Eingabe des Betrachtungsfensters (dann Auswahl [1] Change).

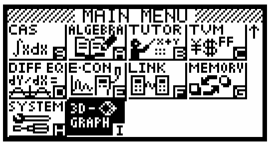




EXE drücken

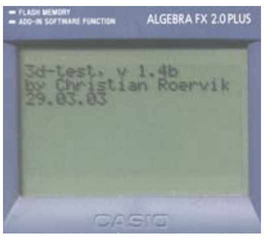
Es gilt dabei :
XS = Startwert = 0.2, YS = Endwert = 2.0, XR = Anzahl der Linien im Liniennetz = 14+1
YS = Startwert = -1.9, YS = Endwert = -0.8, YR = Anzahl der Linien im Liniennetz = 14+1
ZS = Startwert = 0, ZS = Endwert = 150 (Bem.: (XR+1) ∗ (YR+1) < 254 einhalten)

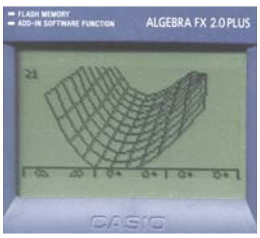
Nun im 3D-Graph Generator Menü die Auswahl **[1] Generate** wählen (Erzeugung der Datenmatrix für die Funktion Z im definierten Betrachtungsfenster), dann **[5] Exit**.

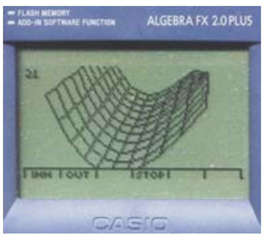
Ende des Hilfsprogramms GRAPH. Jetzt


EXE.

Die rotierende 3D-Grafik wird mit folgenden Tasten gesteuert:
CTRL: zusätzliche Funktionen in der unteren Menüleiste,
MENU: Ein- und Ausblenden der Menüleiste, Cursortasten zur Steuerung nutzbar,
ESC zum Abbruch, dann EXE zur Rückkehr in das MAIN MENU







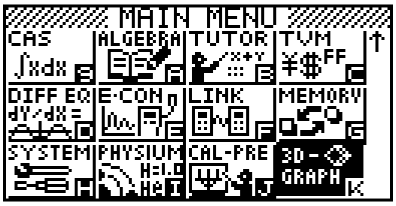
(hier XR=YR=10)

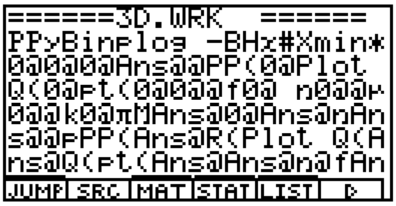
Da CTRL zur Steuerung genutzt wird, sind keine Kopien der Bildschirme über PC-Link möglich! (Download: http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/3dgraph_cfx.zip)

Hinweise zum 3D-grapher von Christian Roervik

Quelle: http://fgpstudios.free.fr/dl_file.php3?id_prog=20&action=view (veraltet)
Download: http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/3dgraph_cfx.zip

Über den Add-In-Installer ist die Software 3D-Graph zu installieren.





Über das Link-Menü FA 123USB (z.B.) sind die nachstehenden Programme zu installieren (Dateikatalog GRAPH.CAT nutzen).

"GRPH.PG"

```
Prog "GRPH.INI"↵
Do↵
ClrText↵
"   3D-Graph Generator                          [1]Generate
[2]Function              [3]View-Window         [4]Load/Store
[5]Exit"↵
Do↵
GetKey→K↵
LpWhile ((K=72)+(K=62)+(K=52)+(K=73)+(K=63)+(K=47))=0↵
K=72⇒Prog "GRPH.GEN"↵
K=62⇒Prog "GRPH.FNC"↵
K=52⇒Prog "GRPH.WND"↵
K=73⇒Prog "GRPH.L/S"↵
LpWhile ((K=63)+(K=47)=0) ↵
ClrText
```

"GRPH.FNC.PG"

```
ClrText↵
"Z="?→f1↵
0→K↵
Return
```

"GRPH.GEN.PG"

```
ClrText↵
List 20[2]→A↵
List 20[3]→B↵
List 20[4]→U↵
(B-A)/U→C↵
List 20[5]→D↵
List 20[6]→E↵
List 20[7]→V↵
(E-D)/V→F↵
```

```
List 20[8]→M↵
List 20[9]→N↵
(U+1)(V+1)+1→W↵
W→Dim List 1↵
2→P↵
Locate 1,1,"Generating Z-Values"↵
For A→X To B Step C↵
Locate 1,2,Int (100×(1-(B-X)/(B-A)))↵
For D→Y To E Step F↵
Rep f₁→G↵
If G<M↵
Then -2000→List 1[P]↵
Else If G>N↵
Then 2000→List 1[P] ↵
Else (G-M)/(N-M)×4000-2000→T↵
Int ((T>0)×.5-(T<0)×.5+T)→List 1[P] ↵
IfEnd:IfEnd↵
Isz P↵
Next↵
Next↵
Locate 1,3,"2's complement neg"↵
For 2→A To W↵
If List 1[A]<0↵
Then Locate 1,4,Int (100A/W)↵
List 1[A]+65535→List 1[A]↵
IfEnd↵
Next↵
U+V×256→List 1[1]↵
Locate 1,4,100↵
0→K↵
Return
```

"GRPH.INI.PG"

```
0→List 20[1]↵
If Dim List 20≠9↵
Then {0,-2π,2π,10,-2π,2π,10,-2,2}→List 20↵
IfEnd↵
Return
```

"GRPH.L/S.PG"

```
ClrText↵
"   Save and Load                                    [1]Load Function
[2]Load Graph          [3]Store Graph        [4]Return"↵
Do↵
GetKey→K↵
LpWhile ((K=72)+(K=62)+(K=52)+(K=73)+(K=47))=0↵
```

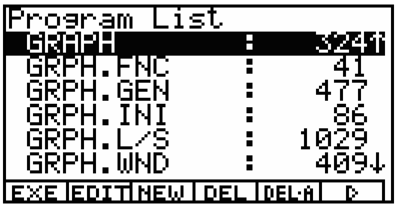
```
If (K=47) Or (K=73)↵
Then 0→K↵
Return↵
IfEnd↵
ClrText↵
If K=72↵
Then "[1]Z=sin X+cos Y      [2]Z=cos √(X²+Y²)     [3]Z=X×Y
[4]Z=sin X×sin Y      [5]Cancel"↵
Do↵
GetKey→K↵
LpWhile ((K=72)+(K=62)+(K=52)+(K=73)+(K=63))=0↵
If (K=63) Or (K=47) ↵
Then 0→K↵
Return↵
IfEnd↵
K=72⇒"sin X+cos Y"→f1↵
K=62⇒"cos √(X²+Y²)"→f1↵
K=52⇒"XY"→f1↵
K=73⇒"sin X×sin Y"→f1↵
Else If K=62↵
Then Do↵
"Load Graph No(2-19)"?→A↵
LpWhile A>19 Or A<2↵
Int A→A↵
A=2⇒List 2→List 1↵
A=3⇒List 3→List 1↵
A=4⇒List 4→List 1↵
A=5⇒List 5→List 1↵
A=6⇒List 6→List 1↵
A=7⇒List 7→List 1↵
A=8⇒List 8→List 1↵
A=9⇒List 9→List 1↵
A=10⇒List 10→List 1↵
A=11⇒List 11→List 1↵
A=12⇒List 12→List 1↵
A=13⇒List 13→List 1↵
A=14⇒List 14→List 1↵
A=15⇒List 15→List 1↵
A=16⇒List 16→List 1↵
A=17⇒List 17→List 1↵
A=18⇒List 18→List 1↵
A=19⇒List 19→List 1↵
Else Do↵
"Store in List(2-19)"?→A↵
```

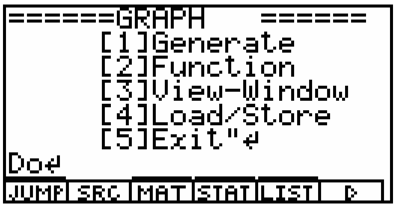
```
LpWhile A>19 Or A<2↵
Int A→A↵
A=2⇒List 1→List 2↵
A=3⇒List 1→List 3↵
A=4⇒List 1→List 4↵
A=5⇒List 1→List 5↵
A=6⇒List 1→List 6↵
A=7⇒List 1→List 7↵
A=8⇒List 1→List 8↵
A=9⇒List 1→List 9↵
A=10⇒List 1→List 10↵
A=11⇒List 1→List 11↵
A=12⇒List 1→List 12↵
A=13⇒List 1→List 13↵
A=14⇒List 1→List 14↵
A=15⇒List 1→List 15↵
A=16⇒List 1→List 16↵
A=17⇒List 1→List 17↵
A=18⇒List 1→List 18↵
A=19⇒List 1→List 19↵
IfEnd:IfEnd↵
0→K↵
Return
```

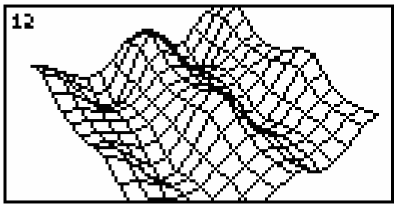
"GRPH.WND.PG"

```
ClrText↵
"XS=         YS=        XE=         YE=        XR=         YR=
ZS=         [1]Change ZE=         [2]Return"↵
1000→B↵
For 1→A To 3↵
Locate 4,A,Int (List 20[A+1]×B)/B↵
Locate 15,A,Int (List 20[A+4]×B)/B↵
Next↵
Locate 4,5,Int (List 20[8]×B)/B↵
Locate 4,6,Int (List 20[9]×B)/B↵
Do↵
GetKey→L↵
LpWhile ((L=72)+(L=62)+(L=47)=0)↵
If L≠72↵
Then 0→K↵
Return↵
IfEnd↵
Do↵
ClrText↵
"(XS,XE,XR,YS,YE,YR,ZS,ZE)"?→List 20↵
```

```
LpWhile (Dim List 20≠8)↲
For 1→A To 8↲
List 20[9-A]→List 20[10-A]↲
Next↲
0→K↲
Return
```








```
+----------------------------------------------------+
|                                                    |
| Program name:   3dtest                             |
| Last revised:   March 29th, 2003                   |
| Version:        1.4b                               |
| Author:         Christian Roervik, BiTwhise        |
| Author e-mail:  chroervi@online.no (veraltet!)     |
|                                                    |
+----------------------------------------------------+
|                                                    |
| History:                                           |
|    1.4b:                                           |
|    - keybar toggle                                 |
|    - screendump                                    |
|    - new rendering procedures                      |
|      * connecting points on the fly                |
|        +-> variable resolution                     |
|    - dynamic memory allocation                     |
|      * allocates through CMM                       |
|    - loading graphs from list files                |
|    1.3b:                                           |
|    - speed and F-Key indicators                    |
|    - new interaction routine                       |
|    - new rotation routines                         |
|      * F-Keys -> relative to graph axis            |
|      * Arrowpad -> relative to world axis          |
|    - added realtime fps                            |
|    - rewrote Calc_DrawVars procedure               |
|      * corrected some bugs                         |
|      * made it more general                        |
|      * added some comments                         |
|    - changed perspective calculation routine       |
|      * z = 0 at eye, not screen                    |
|        +-> rewrote z-clipping routine              |
|    - fixed some misc bugs                          |
|    - optimized clipping                            |
|    - "smart" clipping                              |
|      * 2 drawing procedures                        |
|    - selective operation                           |
|      * perform only necessary manipulations        |
|    1.2b:                                           |
|    - added prototype clipping                      |
|    - restructured code                             |
|    1.1b:                                           |
|    - small optmizations                            |
|       * inline lineprocedure                       |
|       * extensive use of stringfunctions           |
|         in rotation algorithm                      |
|    - partly commented                              |
|    - keybar togle function                         |
```

```
|     1.0b:                                           |
|     - first release                                 |
|     - included keybar                               |
|     0.9b:                                           |
|     - rotation and drawing routines optimized       |
|     0.8b:                                           |
|     - line algorithm optimized                      |
|     0.7b:                                           |
|     - included fps counter                          |
|     0.6b:                                           |
|     - added animation                               |
|     - fixed line bug                                |
|     - history start                                 |
|                                                     |
+-----------------------------------------------------+
```

Controls:

- Functionkeys: Rotation and general control
- CTRL: Additional functions
- OPTN: Take screen shot
- MENU: Toggle keybar on/off
- ArrowKeys: Rotation (hold)
- + / - : Rotation speed (ArrowKeys)
- ESC: Exit

The program:

The program displays a predefined 3D-graph, which can be rotated and zoomed. On program termination, the avarage fps is displayed. This is just a beta release of the "3d-engine" which will be used for my upcoming 3D-grapher, so many functions are yet to be implemented.
If data is present in List1, the program will load this as a graph. You can generate graphs with 3d-GRAPH Basic program.

Important Note: DO NOT LEAVE ANY MISC DATA IN LIST1 BEFORE RUNNING THE PROGRAM. THERE IS NO VALIDATION OF THE DATA YET, SO THIS MIGHT CRASH THE PROGRAM, AND MAYBE EVEN CORRUPT MEMORY.

Technical:

The graph is stored using 12:4 fixed point math. If the cpu had 32 bit registers I would have used 24:8, or maybe 16:16. But it's too old, and implementing this using 16 bit registers would cause a dramatic hit on performance.
I use a 512 word sintable, with sin values multiplied by 16384. Multiplying them by 256 would be easier to implement, and faster, but will cause errors much sooner. Multiplying by 65536 would also be more convenient, but then I would need double words to store them, and double word multiplication, causing a performance hit on this old 16 bit machine.
The program switches between two drawing procedures, one with and one without clipping. I might include a third one with z-sorted lines, for displaying when much of the graph is hidden (could just jump out of the loop on the first exclusion)
The line algorithm use strictly integer math, and might therefor not seem "correct" at all times, since a line might not start or end exactly mid-pixel... I might write a new one using 12:4, and see how it affects performance. I was thinking of including a supersample line / polyfill procedure for prerendering, but using only 2-layer grayscale I don't know if its worth it.
Keyboard handling is rather crappy and needs an overhaul. All delays are frame-based, which is not good, but that will be sorted out later.

New functions (since first release):

- Keybar toggle (v1.4b)
- Screen Dump (v1.4b)
- Loading graphs from list (v1.4b)
- F-Key and speed indicators (v1.3b)

- real rotation, relative to world, and graph (v1.3b)
- framerate display (v1.3b)
- clipping (v1.2b)
- keybar togle (1.1b)

Planed functions:
- Hidden surface removal
- Prerendering:
  - shading (grayscale)
- More precise notation
- Tracing

The graph (if no data is present in List1):
- 15 * 15 squares:
  - (16 * 16) points = 256 points
  - (15 * 16 * 2) lines = 480 lines

Performance:
The program now only only performes the necessary operations for each frame, thus measuring actual performance may be difficulte. Anyway, I have performed tests, and at the with the predefined graph at current zoomlevel (which require no clipping) the fps should not drop below 14. Zooming in will cause the fps to drop about 40% at first, but then climb as more and more lines can be excluded.

//MIGHT NOT BE INCLUDED
Source:
TASM source is included. It's porely commented, still here for anyone interested.
Comments and sugestions are most welcome :-)

Please let me know if you:
- find any bugs in my code
- improve my code
- use my code
- like my work
- have good documents or knowlegde on dynamic memory management in asm
- have a TASM manual in English or any Scandinavian language, French would be OK too :-)

Notes on Basic program:

Some notes before using:

the view window is inputted in list format, therefor you will have to include brackets..

example:

{XS,XE,XR,YS,YE,YR,ZS,ZE}?
{-pi,pi,14,-pi,pi,14,-3,3}

S = Start
E = End
R = resolution

this defines your viewing cube

resolution must be so that (XR+1)(YR+1) < 254, due to limitations with lists on calc

Hinweis:
dieses Add-In-Programm wurde bisher von CASIO nicht autorisiert. Die Installation und Benutzung geschieht auf eigene Gefahr!

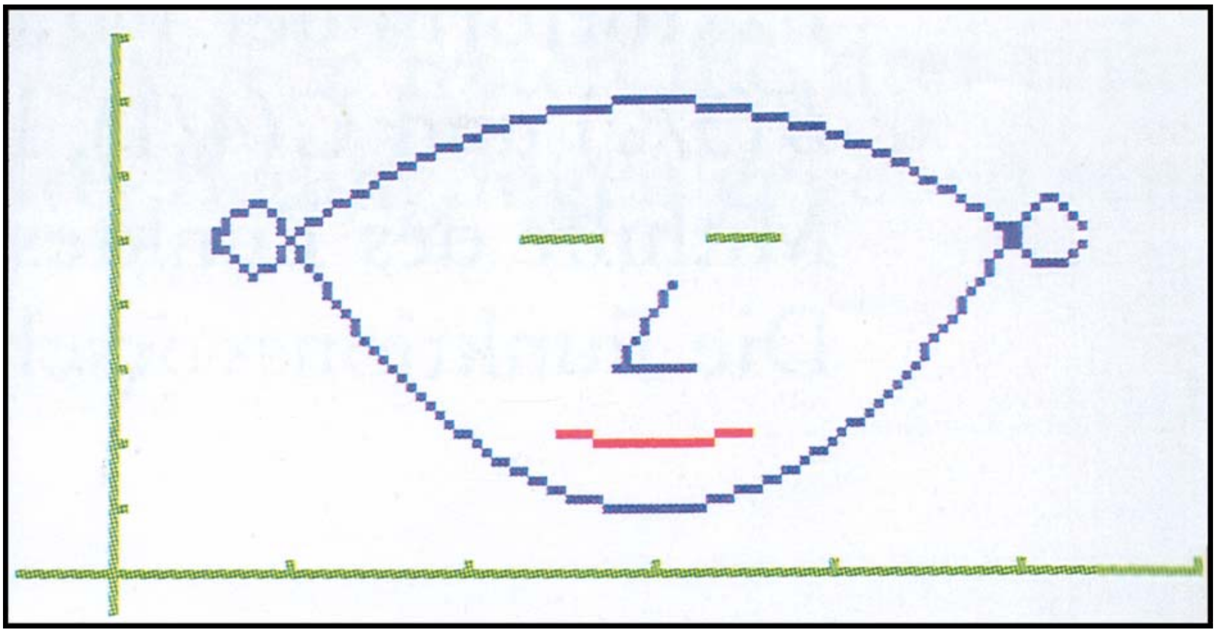
Arbeitsmaterial (Teil 3) zur Fortbildungsveranstaltung D01852

Einsatz des ALGEBRA FX 2.0PLUS im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

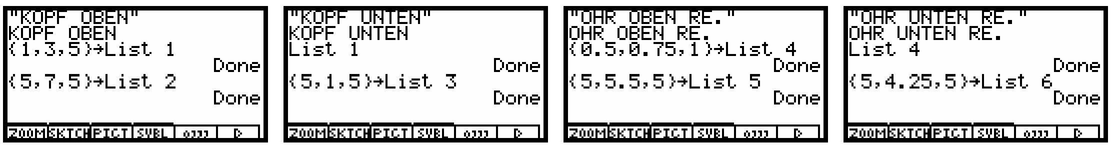
Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

Kl.-St. 11 S.124 (Taschenrechnergrafik mit unterschiedlichen Kurvenästen - Smiley)



Das Farbbild wurde aus dem Schulbuch herauskopiert und vergrößert.

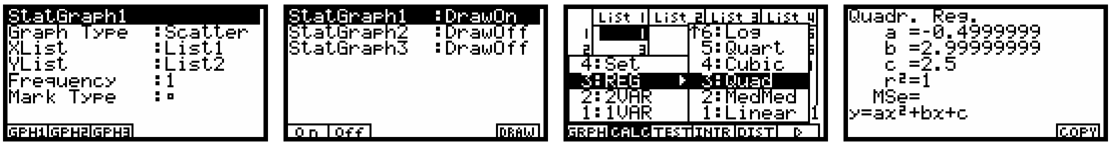
Die ausgelesenen Daten werden zunächst in Listen erfasst (Skalierung: $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 8$).



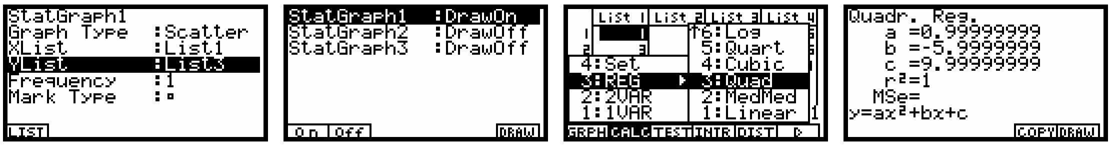
Damit sind in verbundenen Listen jeweils drei Punkte erfasst, um Parabeln zu bestimmen. Für den Mund wurde dann die Parabel über dem Intervall [2.4, 3.6] gezeichnet.

Geraden für Augen: **y = 5** für $2.2 \leq x \leq 2.75$ oder $3.25 \leq x \leq 3.8$
und Nase: **y = 3** für $2.8 \leq x \leq 3.2$ **und** **y = 3+4∗(x-2.8)** für $2.8 \leq x \leq 3.1$

Die quadratischen Gleichungen werden als quadratische Regressionsfunktionen im STAT-Menü ermittelt und in GRPH-Menü abgespeichert:

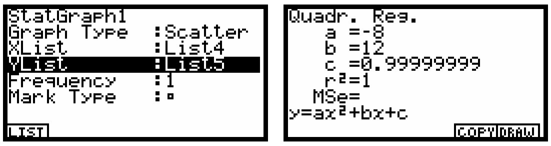


Y1

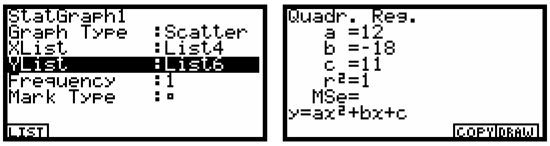


Y2

usw. für Y3 und Y4:

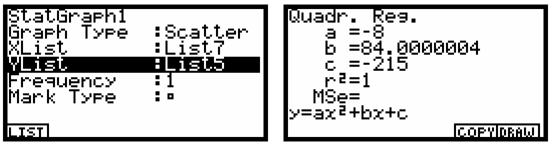


Y3

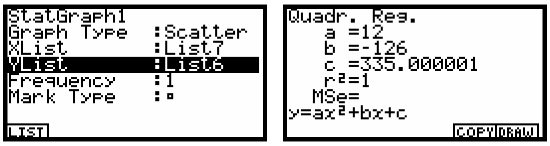


Y4

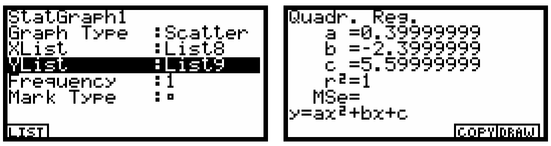
usw. für Y5 und Y6:



Y5

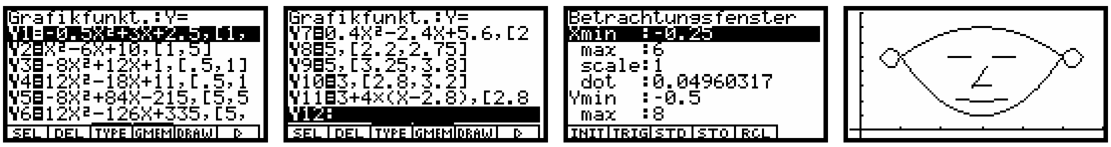


Y6

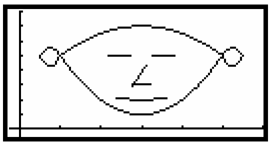
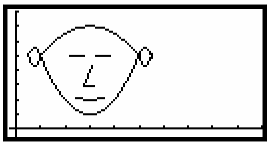
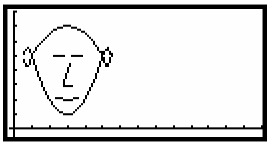
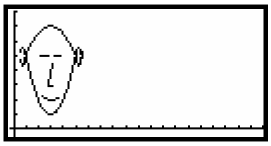


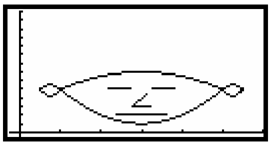
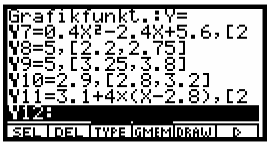
Y7 (Mund)

Die x-Intervalle werden im GRPH-Menü hinzugefügt (überflüssige Dezimalstellen werden gelöscht):

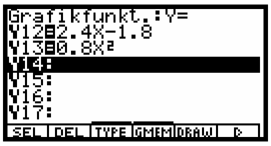


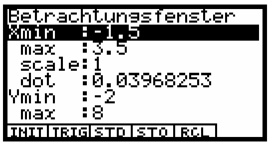
Nach dem Zeichnen können die Formeln individuell nachkorrigiert werden, um das Bild zu verbessern. Die Veränderung der Betrachtungsfenstereinstellung führt zu lustigen Bildverzerrungen.

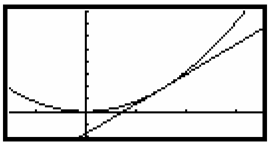
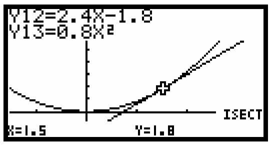





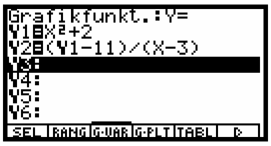
Weiter: S.129 (Parabel und Tangente)

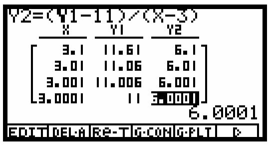


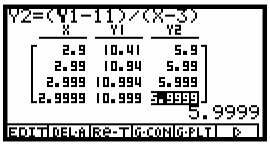


S.133 (Differenzenquotient – Sekantenanstieg – Grenzfall)



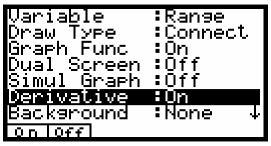


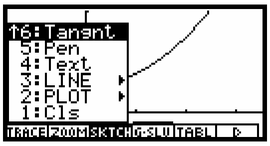


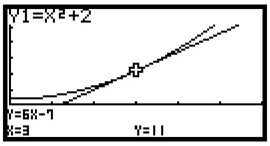
Manuelle Tabellierung ohne feste Schrittweite (x-Wert markieren und neu eintippen)

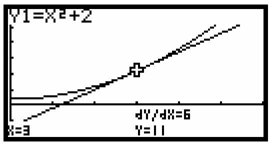
Die Tabellierung wurde hier im GRPH-TBL-Menü vorgenommen und auf die manuelle Eingabe der x-Werte ausgerichtet (da hier nicht mit variabler Schrittweite automatisch tabelliert werden kann). Zuerst wurde eine Tabelle automatisch generiert und dann per Hand modifiziert.
Um einen x-Wert individuell zu ändern, ist dieser zu markieren. Mit Eingabe des neuen Wertes öffnet sich das Dialogfenster!

Im SKTCH-Untermenü kann die Tangente aktiviert werden:



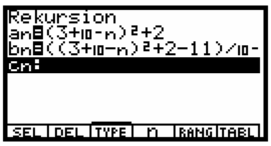


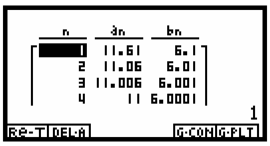




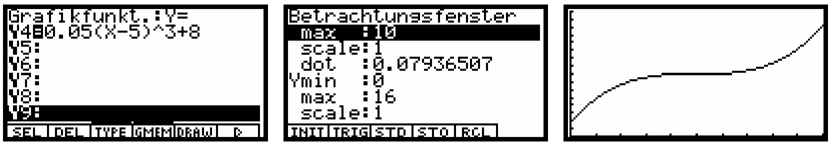
Einstellung im SET UP, damit dy/dx im Bild erscheint!
Umschaltung zwischen Tangente und Kurvenanstieg mit Pfeiltaste!

Die Tabellierung (Sekantenanstieg) ist auch im Zahlenfolgemenü (RECUR) möglich:





S. 136 AUFGABE 07 b)

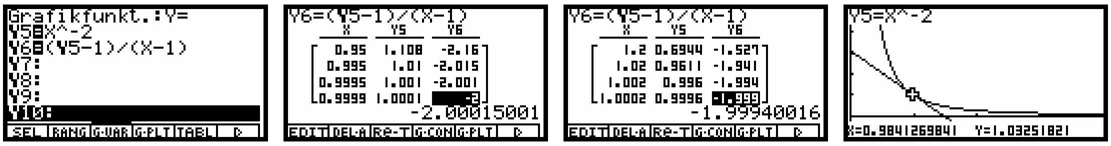


Eine mögliche Definition von y(x).

Weiter:

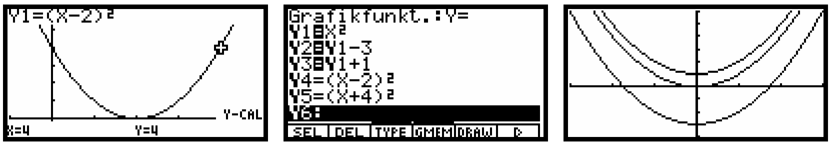
S. 139f, Untersuchung des Anstieges der Funktion $y = x^{-2}$

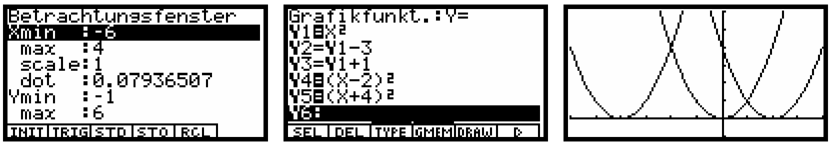
(Tabellierung des Anstieges der Sekante mit manueller Eingabe der x-Werte)



Die Tangente wurde wieder über das Skizzen-Untermenü erzeugt.

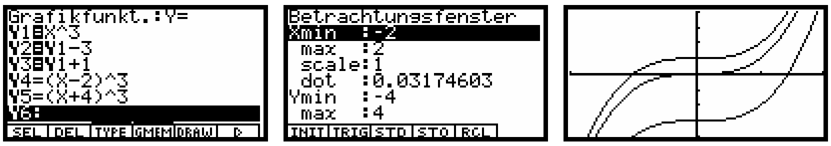
S. 142ff, Abbildungen von Kurven

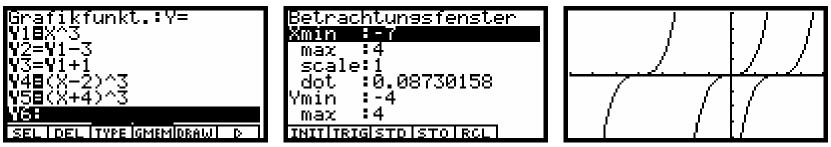




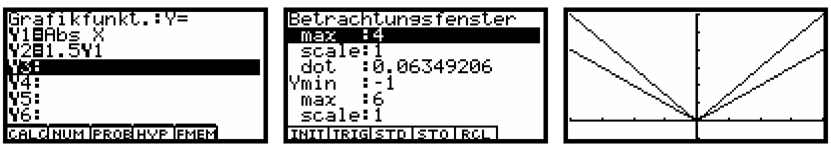
Nutzen Sie auch die Zoom-Funktion zur optimalen Fenstereinstellung!

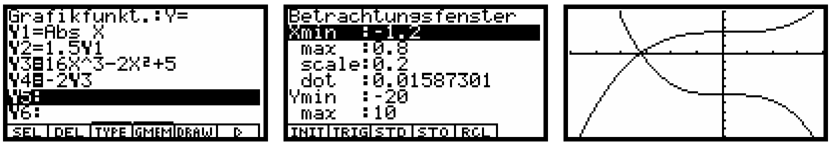
Jetzt wird der Exponent 2 durch 3 ersetzt:

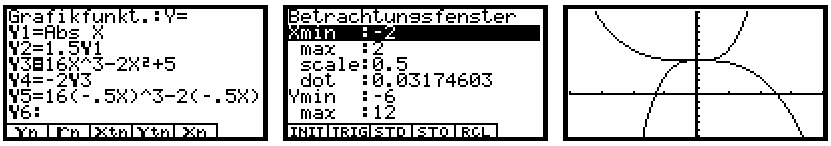


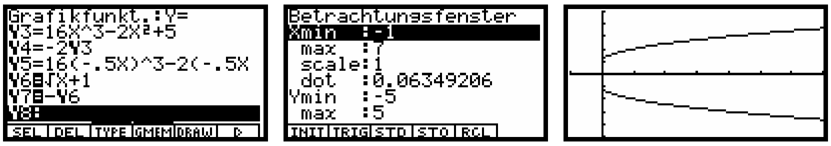


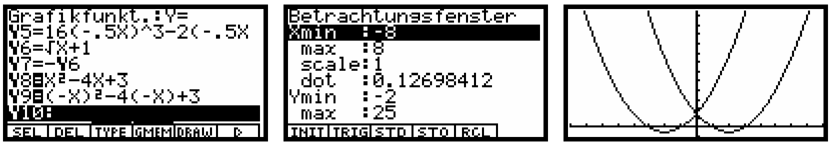
S.146ff (Streckung in y-Richtung)





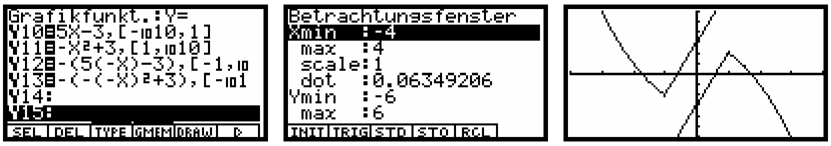






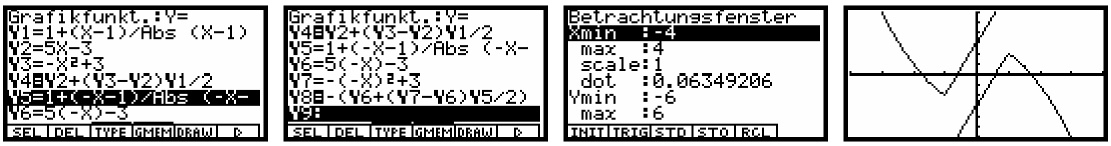
Die graphische Darstellung stetiger Funktionen mit Knickstellen wurde bereits im Arbeitsmaterial (Teil 2) auf S.6 diskutiert. Wir betrachten hier noch folgendes Beispiel:

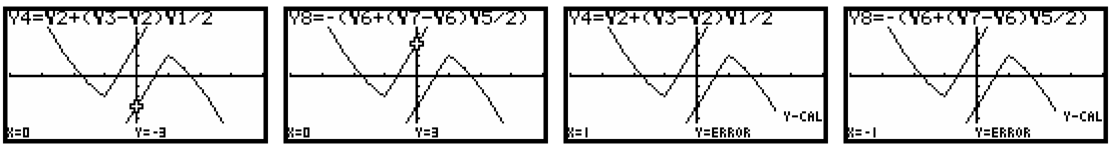
$$y = f(x) = \begin{cases} 5x-3 & \text{für} \quad x \le 1 \\ -x^2+3 & \text{sonst} \end{cases}$$



Die stückweise Zusammensetzung der Kurvenäste ist nicht sehr elegant gelöst, da hier mehrere Funktionen Y10, Y11 bzw. Y12, Y13 beteiligt sind.

In der folgenden Definition kommt man mit einer Vorschrift Y4 bzw. Y8 aus:

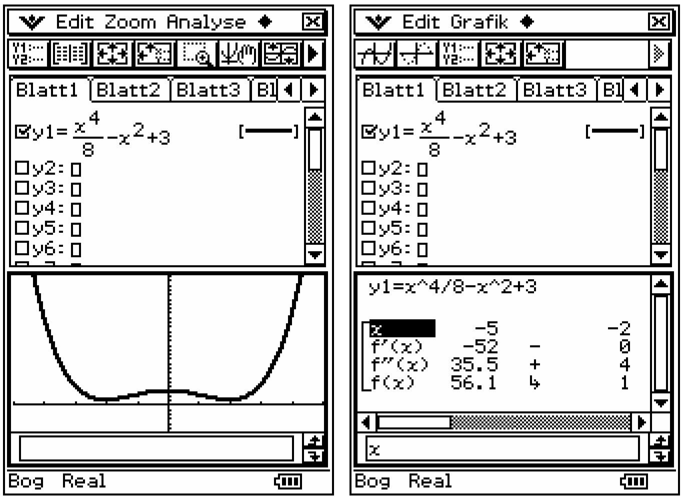




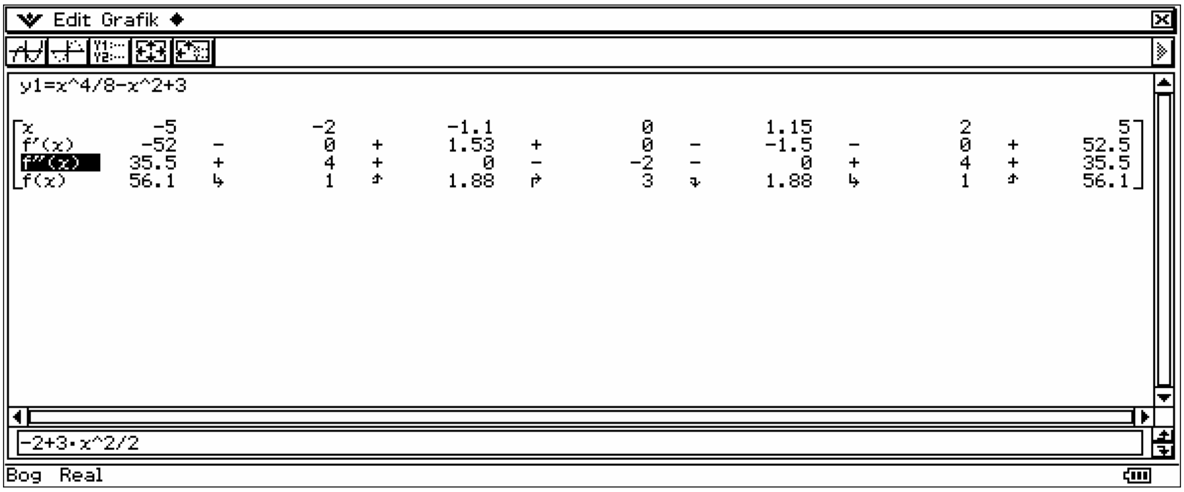
Allerdings ist in der Knickstelle kein Funktionswert mehr definiert.

Hinweis:

Für die Auswertung der ganzrationalen Funktionen kann der ClassPad eine Übersichtstabelle generieren (Ergebnistabelle, Summary-Table): S. 172



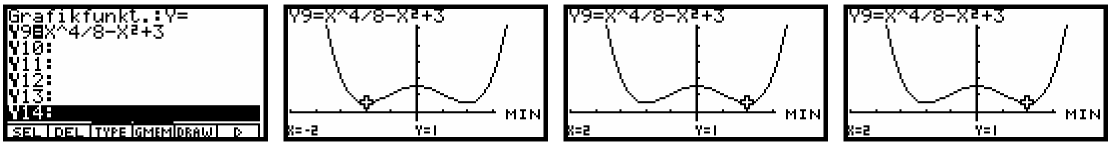
Ergebnistabelle ausführlich:



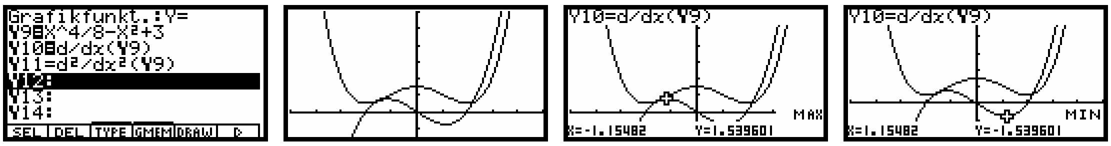
Die Tabelle gibt uns Informationen über den Anstieg und die Krümmung der Funktion. Extremwerte und Wendepunkte werden angegeben.

S. 172

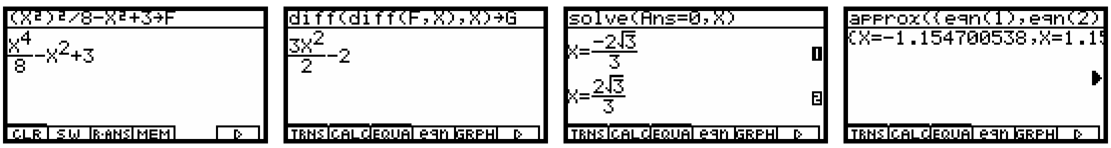
Mit dem ALGEBRA FX 2.0PLUS können diese Informationen einzeln abgerufen werden:



Die Wendepunkte sind die Extremwerte der 1. Ableitung (zeitaufwändige Berechnung):

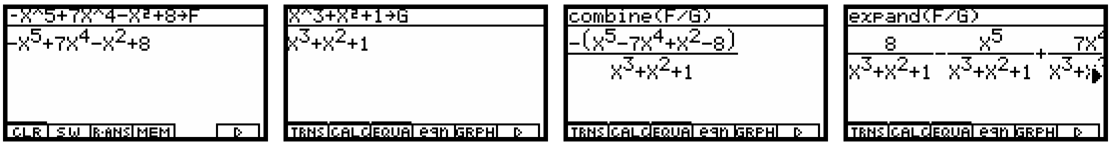


Im GRPH-Menü erfolgt die Berechnung rein numerisch und ohne CAS. Im CAS folgt:

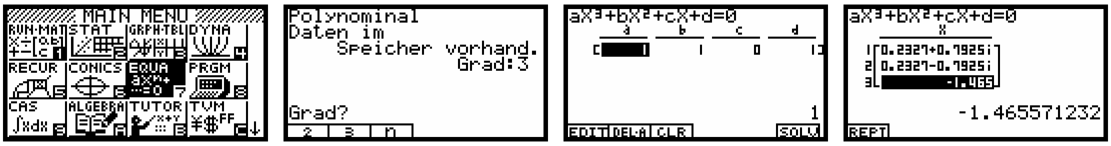


Damit war die numerische Lösung erst in der 4. Dezimalen ungenau.

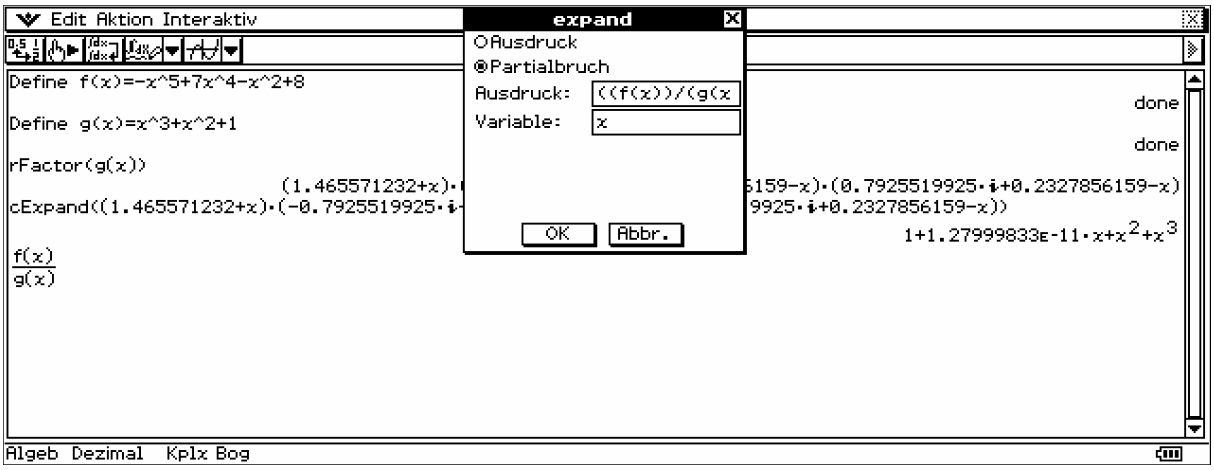
S. 180, Polynomdivision mit CAS, AUFGABE 03 e)

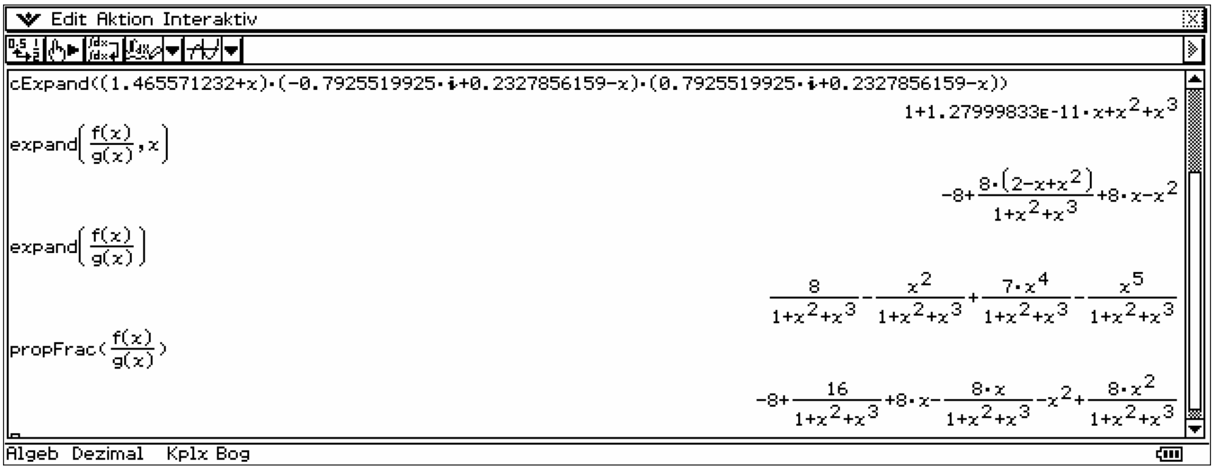


Da das Nennerpolynom nur irrationale Nullstellen besitzt, ist auch über eine Faktorisierung im CAS keine weitere Umformung zu erwarten:



Der ClassPad beherrscht die Polynomdivision:

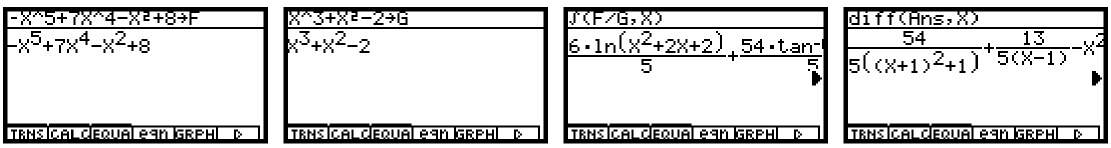




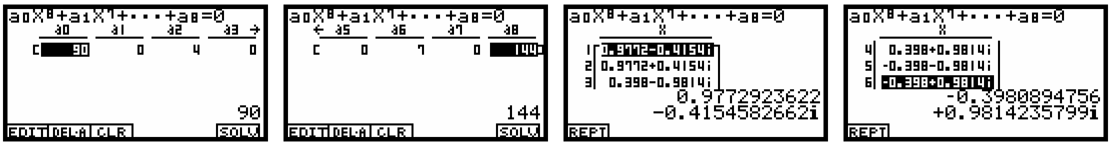
Die Befehle haben unterschiedliche Wirkung!

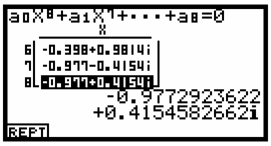
Tipp: Wenn das Nennerpolynom rationale Nullstellen besitzt, gelingt die Faktorisierung im CAS und eine Polynomdivision sowie Partialbruchzerlegung sind wie folgt möglich:

Sei $g(x) = x^3 + x^2 -2$ (statt $x^3 + x^2 +1$): Die Integration erfordert die Partialbruchzerlegung:



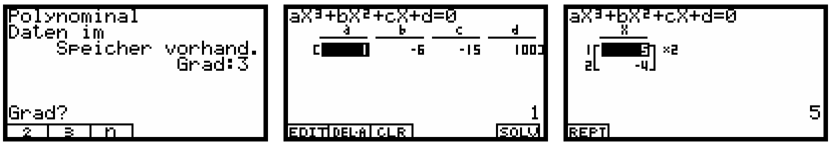
S. 183 Nullstellensuche AUFGABE 03 c) (im EQUA-Menü)





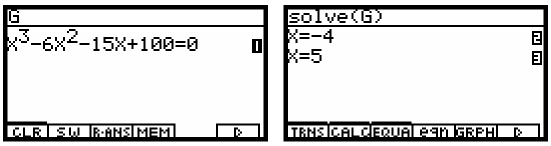
Der FX 2.0PLUS ist leistungsstark in der Nullstellenberechnung!

Ermittlung reeller Nullstellen (Lösung nichtlinearer Gleichungen), S. 189 (EQUA-Menü)



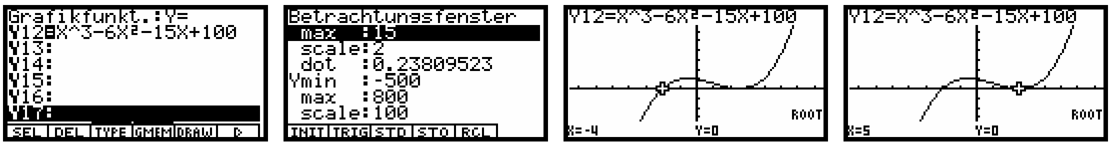
Vielfachheit 2 beachtet!

Lösung im CAS-Menü

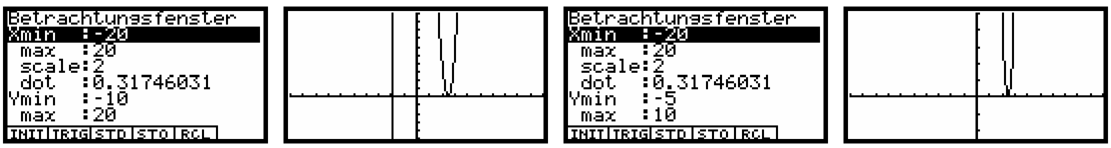


kein Hinweis auf Vielfachheiten von Nullstellen!

Schließlich kann auch wieder eine grafische Lösung gefunden werden:



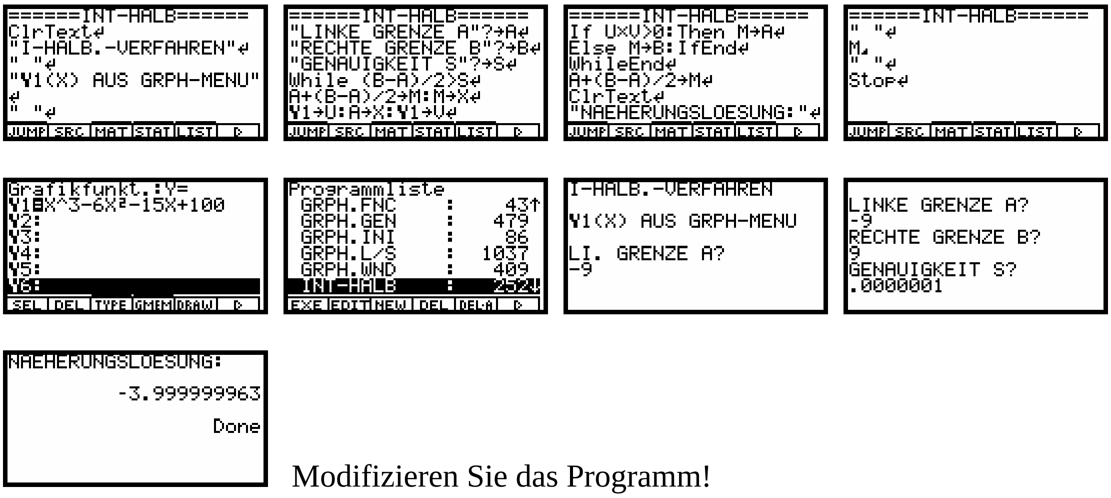
Hinweis: Die Betrachtungsfenstereinstellung ist manchmal etwas schwer zu optimieren:



Diese Bilder sind nicht sehr aufschlussreich!

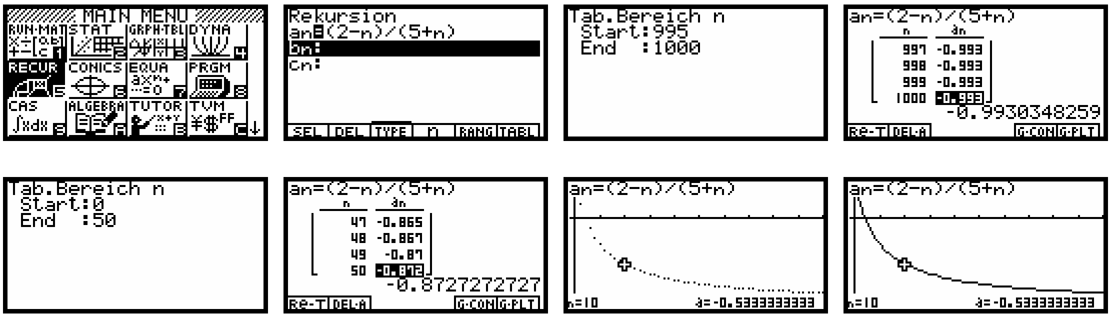
Programmierung von Näherungsverfahren: S. 193ff

In der Tat ist es für Anfänger, die noch wenig programmiert haben, schwierig, alle Befehle im FX 2.0PLUS zu finden. Die Befehle liegen auf verschiedenen Ebenen versteckt in Untermenüs und dahinter versteckten Untermenüs, die teilweise nur im Programm-Modus erreichbar sind!
In der Bedienungsanleitung, vgl.
http://www.casio-europe.com/de/files/manuals/sgr/ALGEBRA_FX2.0PLUS_FX1.0PLUS_Teil1_de.pdf
finden Sie auf S.8-7-1 bis 8.7.3 den Zugang zu den Befehlen (Programm-Menü-Befehlsliste).



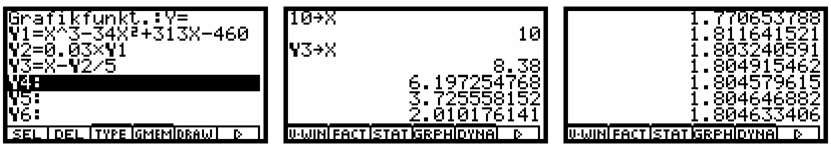
Modifizieren Sie das Programm!

S. 196, Zahlenfolgen (Rekursionsformeln) im Zahlenfolge-Menü (RECUR-Menü)



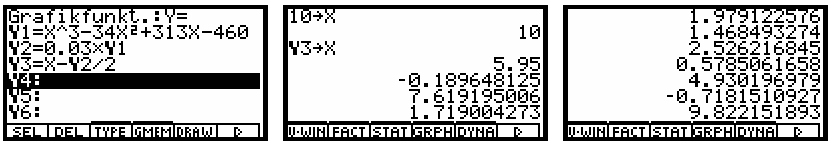
„ZOOM Auto“ nutzen! Oder wählen Sie ein passendes Betrachtungsfenster aus!
Probieren Sie die Grafik-Stile aus (connect bzw. plot)!

S. 198ff, Sägezahnverfahren (Funktionen im GRPH-Menü vorgeben)

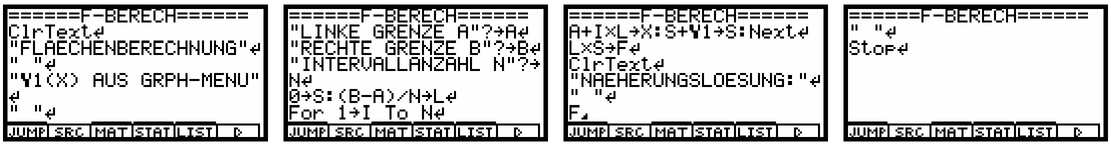


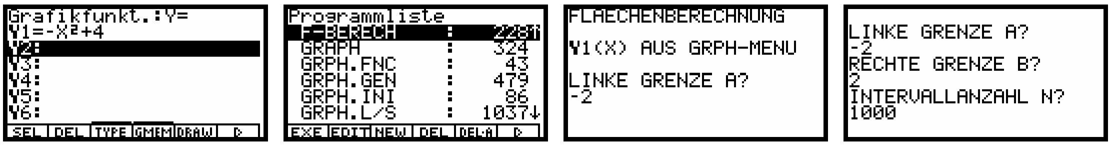
Wiederholtes Drücken der EXE-Taste reproduziert den vorherigen Befehl!

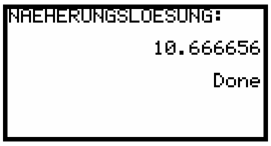
Veränderung der Steigung von 5 auf 2 (S. 200 unten): das Verfahren divergiert nun offenbar:



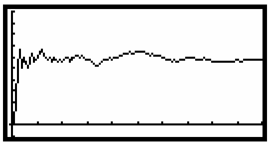
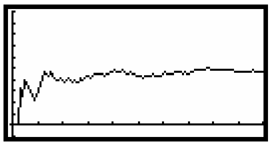
S. 202, Flächenberechnungen (Approximation mit Rechtecken)

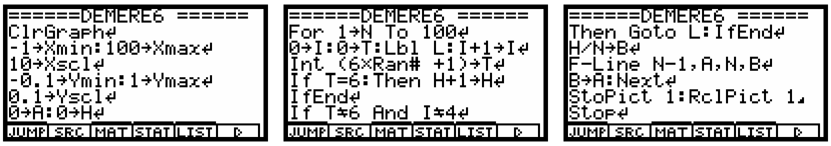




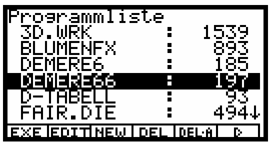


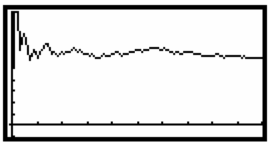
S. 261, Wahrscheinlichkeiterechnung (Würfelprogramme)

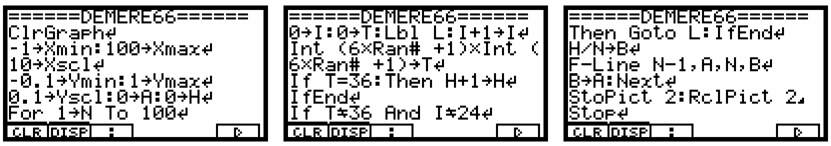
so  oder so  usw.



Ran# ohne Argument erzeugt eine Zufallszahl aus]0;1[.



 (Programm benötigt eine längere Laufzeit)

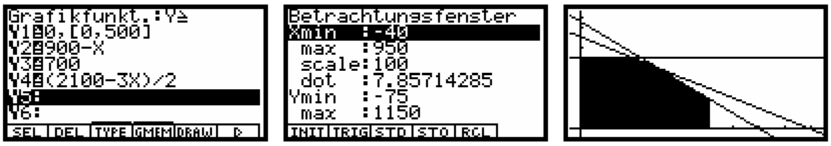


Viel Spaß beim Testen der Programme!

Abschließend betrachten wir lineare Optimierungsprobleme (Ungleichungsgrafik) S.291ff

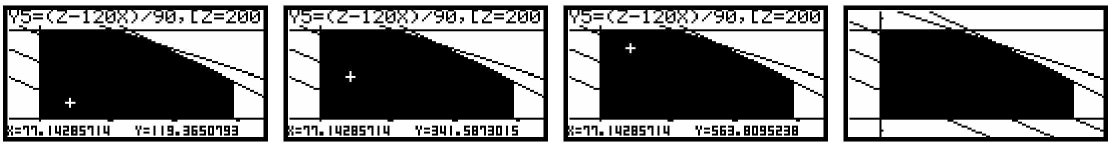
Hierbei: x1 entspricht x und x2 entspricht y

Die drei Bedingungen $y \geq 0$ und $x \geq 0$ und $x \leq 500$ werden mit dem FX 2.0PLUS zusammengefasst zu einer Bedingung **$y \geq 0$,[0,500].**



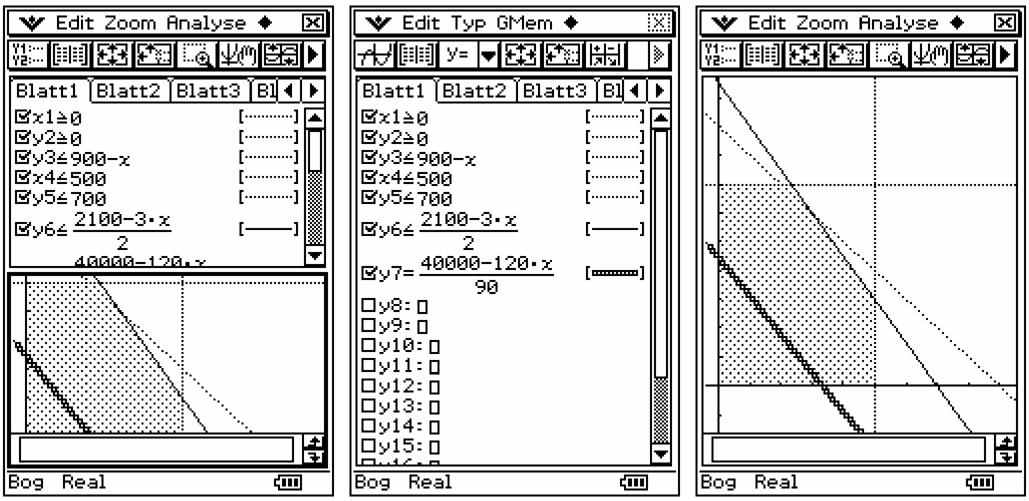
Damit haben wir den zulässigen Bereich korrekt schraffiert!
Nun wird die Zielfunktion mit dem „Parameter z“ eingezeichnet:
y = (z - 120x) / 90 mit z.B. z = 20000, 40000, 60000

Wir tasten nun die Kurvenschar ab:



z = 20000 z = 40000 z = 60000

Mit dem ClassPad haben wir mehr graphische Möglichkeiten:



Mit veränderter Schattierung wird es noch eindrucksvoller!

Anlage:
Programm-Menü-Befehlsliste für die Eigenprogrammierung des FX 2.0PLUS zum schnellen Auffinden der benötigten Befehle

8-7 Programmmenü-Befehlsliste

RUN-Programm

Ebene 1	Ebene 2	Ebene 3	Befehl
MAT	Swap		Swap_
	*Row		*Row_
	*Row+		*Row+_
	Row+		Row+_
STAT	S-GPH	S-Gph1	S-Gph1_
		S-Gph2	S-Gph2_
		S-Gph3	S-Gph3_
	DRAW	On	DrawOn
		Off	DrawOff
	GRAPH	Scat	Scatter
		xyLine	xyLine
		NPPlot	NPPlot
		Hist	Hist
		Box	MedBox
		ModBox	ModifiedBox
		N-Dist	N-Dist
		Broken	Broken
		Linear	Linear
		MedMed	Med-Med
		Quad	Quad
		Cubic	Cubic
		Quart	Quart
		Log	Log
		Exp	Exp
		Power	Power
		Sin	Sinusoidal
		Lgstic	Logistic
	List		List_
	MARK	□	Square
		×	Cross
		•	Dot
	CALC	1VAR	1-Variable_
		2VAR	2-Variable_
		Linear	LinearReg_
		MedMed	Med-MedLine_
		Quad	QuadReg_
		Cubic	CubicReg_
		Quart	QuartReg_
		Log	LogReg_
		Exp	ExpReg_
		Power	PowerReg_
		Sin	SinReg_
		Lgstic	LogisticReg_
LIST	SortA		SortA(
	SortD		SortD(

GRPH	SelOn		G_SelOn_
	SelOff		G_SelOff_
	TYPE	Y=	Y=TYPE
		r=	r=TYPE
		Param	ParamTYPE
		X=c	X=cTYPE
		Y>	Y>Type
		Y<	Y<Type
		Y≥	Y≥Type
		Y≤	Y≤Type
	GMEM	Store	StoGMEM
		Recall	RclGMEM
DYNA	SelOn		D_SelOn_
	SelOff		D_SelOff_
	Var		D_Var_
	TYPE	Y=	Y=Type
		r=	r=Type
		Param	ParamType
RECR	n,an..	n	n
		an	an
		an+1	an+1
		bn	bn
		bn+1	bn+1
		cn	cn
		cn+1	cn+1
	SelOn		R_SelOn_
	SelOff		R_SelOff_
	Sel ao		Sel_ao
	Sel a1		Sel_a1
	TYPE	an	anType
		an+1	an+1Type
		an+2	an+2Type

[OPTN]-Taste			
Ebene 1	Ebene 2	Ebene 3	Befehl
LIST	List		List_
	Dim		Dim_
	Seq		Seq(
	Min		Min(
	Max		Max(
	Mean		Mean(
	Median		Median(
	Sum		Sum_
	Prod		Prod_
	Cuml		Cuml_
	%		Percent_
	⊿List		⊿List_
	Augmnt		Augment(
	Fill		Fill(
	L→Mat		List→Mat(
MAT	Mat		Mat_
	Dim		Dim_
	Det		Det_
	Trn		Trn_
	Augmnt		Augment(
	Ident		Identity_
	Fill		Fill(
	M→List		Mat→List(
CPLX	Abs		Abs_
	Arg		Arg_
	Conjg		Conjg_
	ReP		ReP_
	ImP		ImP_
	▸re^θi		▸re^θi
	▸a+bi		▸a+bi
CALC	d/dx		d/dx(
	d²/dx²		d²/dx²(
	∫dx		∫(
	Σ		Σ(
	FMin		FMin(
	FMax		FMax(
	Solve		Solve(
NUM	Abs		Abs_
	Int		Int_
	Frac		Frac_
	Rnd		Rnd
	Intg		Intg_
	E-SYM	m	m
		μ	μ
		n	n
		p	p
		f	f
		k	k
		M	M
		G	G
		T	T
		P	P
		E	E

PROB	x!		!
	nPr		P
	nCr		C
	Ran#		Ran#_
	P(		P(
	Q(		Q(
	R(		R(
	t(		t(
HYP	sinh		sinh_
	cosh		cosh_
	tanh		tanh_
	sinh⁻¹		sinh⁻¹_
	cosh⁻¹		cosh⁻¹_
	tanh⁻¹		tanh⁻¹_
ANGL	°		°
	r		r
	g		g
	° ' "		° ' "
	▸DMS		▸DMS
	Pol(		Pol(
	Rec(		Rec(
STAT	x̂		x̂
	ŷ		ŷ
FMEM	fn		fn
ZOOM	Factor		Factor_
	Auto		ZoomAuto
SKTCH	Cls		Cls
	PLOT	On	PlotOn_
		Off	PlotOff_
		Change	PlotChg_
		Plot	Plot_
	LINE	F-Line	F-Line_
		Line	Line
	GRAPH	Y=	Graph_Y=
		∫dx	Graph_∫
	Text		Text_
	PIXEL	On	PxlOn_
		Off	PxlOff_
		Change	PxlChg_
		Test	PxlTest(
	Tangnt		Tangent_
	Normal		Normal_
	Invrse		Inverse_
	Circle		Circle_
	Vert		Vertical_
	Horz		Horizontal_
PICT	Store		StoPict_
	Recall		RclPict_
SYBL	'		'
	"		"
	~		~
	*		*
	#		#
° ' "			□

20010901

8-7-2 Programmmenü-Befehlsliste

[VARS]-Taste			
Ebene 1	**Ebene 2**	**Ebene 3**	**Befehl**
V-WIN	Xmin		**Xmin**
	Xmax		**Xmax**
	Xscale		**Xscl**
	Xdot		**Xdot**
	Ymin		**Ymin**
	Ymax		**Ymax**
	Yscale		**Yscl**
	Tθmin		**Tθmin**
	Tθmax		**Tθmax**
	Tθptch		**Tθptch**
	R-Xmin		**RightXmin**
	R-Xmax		**RightXmax**
	R-Xscl		**RightXscl**
	R-Xdot		**RightXdot**
	R-Ymin		**RightYmin**
	R-Ymax		**RightYmax**
	R-Yscl		**RightYscl**
	R-Tmin		**RightT θmin**
	R-Tmax		**RightT θmax**
	R-Tpch		**RightT θptch**
FACT	Xfact		**Xfct**
	Yfact		**Yfct**
STAT	n		**n**
	X	$\bar{x}$	**$\bar{x}$**
		Σx	**Σx**
		Σx^2	**Σx^2**
		$x\sigma n$	**$x\sigma n$**
		$x\sigma n-1$	**$x\sigma n-1$**
		minX	**minX**
		maxX	**maxX**
	Y	$\bar{y}$	**$\bar{y}$**
		Σy	**Σy**
		Σy^2	**Σy^2**
		Σxy	**Σxy**
		$y\sigma n$	**$y\sigma n$**
		$y\sigma n-1$	**$y\sigma n-1$**
		minY	**minY**
		maxY	**maxY**
	GRAPH	a	**a**
		b	**b**
		c	**c**
		d	**d**
		e	**e**
		r	**r**
		r^2	**r^2**
		Q1	**Q1**
		Med	**Med**
		Q3	**Q3**
		Mod	**Mod**
		H-Strt	**H_Start**
		H-ptch	**H_pitch**
⋮			⋮
	PTS	x1	**x1**
		y1	**y1**
		x2	**x2**
		y2	**y2**
		x3	**x3**
		y3	**y3**
GRPH	Yn		**Y**
	rn		**r**
	Xtn		**Xt**
	Ytn		**Yt**
	Xn		**X**
DYNA	Start		**D_Start**
	End		**D_End**
	Pitch		**D_pitch**
TABL	Start		**F_Start**
	End		**F_End**
	Pitch		**F_pitch**
	Result		**F_Result**
RECR	FORM	an	**an**
		an+1	**an+1**
		an+2	**an+2**
		bn	**bn**
		bn+1	**bn+1**
		bn+2	**bn+2**
		cn	**cn**
		cn+1	**cn+1**
		cn+2	**cn+2**
	RANGE	R-Strt	**R_Start**
		R-End	**R_End**
		a0	**a0**
		a1	**a1**
		a2	**a2**
		b0	**b0**
		b1	**b1**
		b2	**b2**
		c0	**c0**
		c1	**c1**
		c2	**c2**
		anStrt	**anStart**
		bnstrt	**bnStart**
		cnStrt	**cnStart**
	Result		**R_Result**
EQUA	S-Rslt		**Sim_Result**
	S-Coef		**Sim_Coef**
	P-Rslt		**Ply_Result**
	P-Coef		**Ply_Coef**

Tasten [SHIFT][VARS](PRGM)			
Ebene 1	**Ebene 2**	**Ebene 3**	**Befehl**
Prog			**Prog_**
JUMP	Lbl		**Lbl_**
	Goto		**Goto_**
	Isz		**Isz_**
	Dsz		**Dsz_**
?			**?**
◢			**◢**
I/O	Locate		**Locate_**
	Getkey		**Getkey**
	Send		**Send(**
	Receiv		**Receive(**
IF	If		**If_**
	Then		**Then_**
	Else		**Else_**
	IfEnd		**IfEnd**
FOR	For		**For_**
	To		**_To_**
	Step		**_Step_**
	Next		**Next**
WHLE	While		**While_**
	WhlEnd		**WhileEnd**
	Do		**Do**
	LpWhle		**LpWhile_**
CTRL	Prog		**Prog_**
	Return		**Return**
	Break		**Break**
	Stop		**Stop**
LOGIC	= ≠ <	=	**=**
		≠	**≠**
		>	**>**
		<	**<**
		≥	**≥**
		≤	**≤**
	And		**_And_**
	Or		**_Or_**
	Not		**Not_**
CLR	Text		**ClrText**
	Graph		**ClrGraph**
	List		**ClrList_**
	Matrix		**ClrMat_**
DISP	Stat		**DrawStat**
	Graph		**DrawGraph**
	Dyna		**DrawDyna**
	F-TBL	Table	**DispF-Tbl**
		G-Con	**DrawFTG-Con**
		G-Plot	**DrawFTG-Plt**
	R-TBL	Table	**DispR-Tbl**
		Web	**DrawWeb_**
		R-Con	**DrawR-Con**
		RΣ-Con	**DrawRΣ-Con**
		R-Plot	**DrawR-Plt**
		RΣ-Plt	**DrawRΣ-Plt**
:			:

Tasten [CTRL][F3](SET UP)			
Ebene 1	**Ebene 2**	**Ebene 3**	**Befehl**
ANGL	Deg		**Deg**
	Rad		**Rad**
	Gra		**Gra**
DISP	Fix		**Fix_**
	Sci		**Sci_**
	Norm		**Norm**
	EngOn		**EngOn**
	EngOff		**EngOff**
CPLX	Real		**Real**
	a+bi		**a+bi**
	$re^\wedge\theta i$		**$re^\wedge\theta i$**
GRPH	G-FUNC	On	**FuncOn**
		Off	**FuncOff**
	D-TYPE	G-Con	**G-Connect**
		G-Plot	**G-Plot**
	BG	None	**BG-None**
		Pict	**BG-Pict_**
	SIMUL	On	**SimulOn**
		Off	**SimulOff**
	COORD	On	**CoordOn**
		Off	**CoordOff**
	GRID	On	**GridOn**
		Off	**GridOff**
	AXES	On	**AxesOn**
		Off	**AxesOff**
	LABEL	On	**LabelOn**
		Off	**LabelOff**
STAT	S-WIN	Auto	**S-WindAuto**
		Manual	**S-WindMan**
	File		**File_**
	RESID	None	**Resid-None**
		List	**Resid-List_**
DERIV	On		**DerivOn**
	Off		**DerivOff**
T-VAR	Range		**VarRange**
	List		**VarList_**
Σ•DSP	On		**ΣdispOn**
	Off		**ΣdispOff**

20010901

Tasten [SHIFT][OPTN](V-Window)			
Ebene 1	Ebene 2	Ebene 3	Befehl
V-Win			**ViewWindow_**
Sto			**StoV-Win_**
Rcl			**RclV-Win_**

BASE-Programm

Ebene 1	Ebene 2	Ebene 3	Befehl
d~o	d		**d**
	h		**h**
	b		**b**
	o		**o**
LOG	Neg		**Neg_**
	Not		**Not_**
	and		**and**
	or		**or**
	xor		**xor**
	xnor		**xnor**
DISP	►Dec		**►Dec**
	►Hex		**►Hex**
	►Bin		**►Bin**
	►Oct		**►Oct**

Tasten [SHIFT][VARS](PRGM)			
Ebene 1	Ebene 2	Ebene 3	Befehl
Prog			**Prog_**
JUMP	Lbl		**Lbl_**
	Goto		**Goto_**
	Isz		**Isz_**
	Dsz		**Dsz_**
?			**?**
◢			**◢**
= ≠ <	=		**=**
	≠		**≠**
	>		**>**
	<		**<**
	≧		**≧**
	≦		**≦**
:			**:**

Tasten [CTRL][F3](SET UP)			
Ebene 1	Ebene 2	Ebene 3	Befehl
Dec			**Dec**
Hex			**Hex**
Bin			**Bin**
Oct			**Oct**

Arbeitsmaterial (Teil 4) zur Fortbildungsveranstaltung D01852

Einsatz des ALGEBRA FX 2.0PLUS im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

1) Lösungsverfahren für (parameterbehaftete) lineare Gleichungssysteme:

Kl.11, S.92ff (Kap. 2.8 und 2.9), Jg.12, S.8ff (Kap. 1 und 5), Jg.13 NT, S. 79ff (Anwendungen)

a) Notationen von LGS:

i) in Einzelgln. (Jg.12, S.9 o.):

$$-3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 23 \quad (g1)$$
$$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 11 \quad (g2)$$

ii) als Vektorgl.: $x_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}$, d.h.

als Linearkombination (Jg.12,tech.FR, S.283): $x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 + x_4 \cdot \vec{a}_4 + 1 \cdot \left(-\vec{b}\right) = \vec{o}$

iii) als Matrixgl.: $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & -2 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}$, d.h. $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

b) denkbares Lösungsverhalten eines LGS:

keine Lös. (unlösb. LGS), genau eine Lös. (eind. lösb. LGS), unendl. viele Lös. (mehrd. lösb. LGS)

c) Lösbarkeitskriterien:

i) $\underline{A}$ reguläre Matrix, d.h. quadratische Matrix und $\det(\underline{A}) \neq 0 \Rightarrow$ eind. Lös. $\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ bzw. Cramer'sche Regel anwendbar.

ii) $\underline{A}$ singuläre Matrix, d.h. quadr. Matrix u. $\det(\underline{A}) = 0$ oder $\underline{A}$ nichtquadratisch ($\det(\underline{A})$ nicht def.)

$\Rightarrow \begin{cases} \text{keine Lös.: } Rg(\underline{A}) < Rg(\underline{A},\vec{b}),\ \vec{b} \text{ lin. unabhängig von } \vec{a}_1 \text{ bis } \vec{a}_4 \text{ (Vektoren in } \underline{A}\text{)}, \\ \text{Lös. vorhanden: } Rg(\underline{A}) = Rg(\underline{A},\vec{b}),\ \vec{b} \text{ lin. abhängig von } \vec{a}_1 \text{ bis } \vec{a}_4 \text{ (Vektoren in } \underline{A}\text{)}. \end{cases}$

(Jg. 12, tech. FR, S.287, Satz 5.4 u. Def. 5.3, $Rg(\underline{A})$ … Rang der Matrix $\underline{A}$.)

Rang … Anzahl der lin. unabh. Vektoren (Zeilen oder Spalten) in der Matrix $\underline{A}$ bzw. $\underline{A},\vec{b}$.

Hinweis: $\underline{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ und $\underline{A}, \vec{b} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{b})$ (sogen. erweiterte Matrix)

Sei $\underline{A} \in \mathfrak{M}(n, m)$ mit $m \le n$, d.h. $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, dann ist das LGS eindeutig lösbar, falls $\mathrm{Rg}(\underline{A})=\mathrm{Rg}(\underline{A},\vec{b}) = m$ und mehrdeutig lösbar, falls $\mathrm{Rg}(\underline{A})=\mathrm{Rg}(\underline{A},\vec{b}) = r<m$ (m-r Unbekannte frei wählbar) gilt.

Ein homogenes LGS ist stets lösbar, da immer $\mathrm{Rg}(\underline{A})=\mathrm{Rg}(\underline{A},\vec{o})$ gilt ($\vec{o}$ … Nullvektor).

d) Lösungsmethoden:

Durch geeignete Umformungsschritte erfolgt Übergang zu äquivalenten LGS, aus denen schließlich die Lös. sofort abgelesen werden kann.

Einzelschrittverfahren: Gauß'sche Algorithmus oder Austauschverfahren für $\underline{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} = \vec{o}$
(letzteres, vgl. Simplexverfahren Kl.11 S.302, freie Pivotwahl)

Spezielle Verfahren: Inverse Matrix oder Determinanten nutzen, falls sinnvoll: $\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ bzw. Cramer'sche Regel

Die TR-Befehle: ref($\underline{A},\vec{b}$) bzw. rref($\underline{A},\vec{b}$) zur Erzeugung der Stufenform (Dreiecksform) bzw. reduzierten Stufenform (Diagonalform) sind im FX 2.0PLUS im CAS-Menü vorhanden.

Hinweis: im CAS mit parameterbehafteten LGS kommt es hier z.T. zu fehlerhaften Ergebnissen!

Lit.-hinw.:

[1] Paditz, L. (2004):
Mathematische Modelle und wissenschaftlich-technische Anwendungen
Beispiele aus Schule und Studium mit dem grafikfähigen Symbol-Taschenrechner ClassPad300
Hrg. v. CASIO Europe GmbH im Bildungsverlag EINS, Norderstedt 2004 (1.Aufl.), 112 S.,
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/ClassPad_01.pdf (Kapitel 1)

[2] Paditz, L. (2006):
Solving Problems in Algebra and Analysis with the CAS-Calculator
Beitrag in: Schriftenreihe des Collegium Europaeum Jenense 2006, Band Nr. 34,
Herausgeber: Fothe, Michael; Hermann, Martin; Zimmermann, Bernd;
"Learning in Europe - Computers in Mathematics Instruction", p. 88-112,
ISBN 978-3-933159-12-0 (im Buch formal falsche ISBN 978-3-933159-12-1) bzw. ISBN 3-933159-12-1
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Paditz_Beitrag_CEJ_2006.pdf

[3] Paditz, L. (2006):
The Rank of a Matrix with Parameters and the Solution of a Linear System of Equations with Parameters
DES-TIME-2006 - Dresden Int Symp on Technology and its Integration into Mathematics Education, July 20 - 23, 2006, Dresden (Germany) - Proceedings, ISBN 3-901769-74-9.
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Paditz_DES-TIME-2006.pdf

Download: http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Rank_LinEqSys.zip
(u.a. mit *.vcp-files für den ClassPad mit den in [2] genannten Programmen AVRank und LinEqSys)

Weitere Lösungsmöglichkeiten im FX 2.0PLUS mit dem **solve**-Befehl (CAS-Menü) bzw. im EQUA- oder RUN-Menü zur Lösung von n Gleichungen mit n Unbekannten (Systeme ohne Parameter).

e) Beispiele aus den Schulbüchern (ohne Parameter):

z.B. Jg. 12 techn.FR, S.30f, Jg.13 NT S.79ff (mehrstufige Prod.-prozesse)

f) Beispiele aus den Schulbüchern (mit Parametern):
z.B. Jg.12 techn.FR, S.33ff (Musteraufg. S.35)

g) Beispiele mit einer besten Näherungslösung (Bestapproximation) in unlösbaren LGS:
z.B. Jg.12 techn.FR S. 286, Skizze S. 286, Orthogonalität s. S. 295.

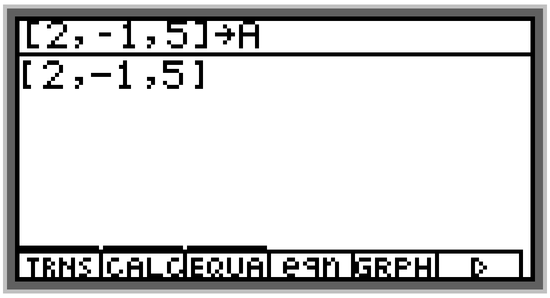
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \quad (g1) \\ -1x_1 + 2x_2 &= 1 \quad (g2) \\ 5x_1 - 2x_2 &= 2 \quad (g3) \end{aligned} \quad , \text{ d.h. } \quad x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

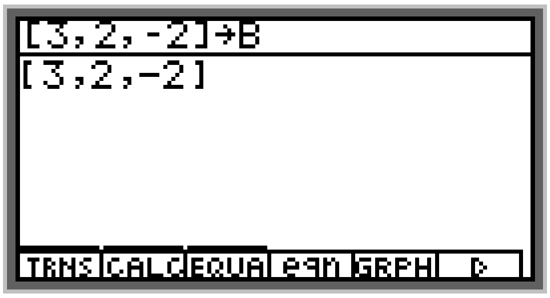
Die beste Näherungslösung ist offenbar erreicht, wenn die Linearkombination links $x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ der rechten Seite $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sehr nahe kommt, d.h. der Differenzvektor $\left(x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu der Ebene steht, die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, vgl. Skizze im Schulbuch Jg.12 S. 286.

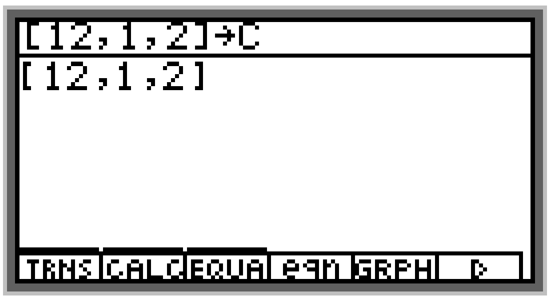
Ansatz (Orthogonalitätsbedingungen als Skalarprodukt):

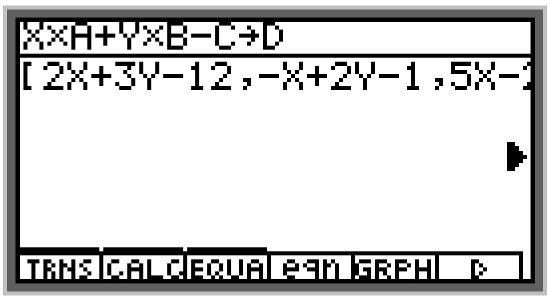
$$\left(x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \left(x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Dieses LGS liefert die optimalen Koeffizienten für die Bestapproximation:

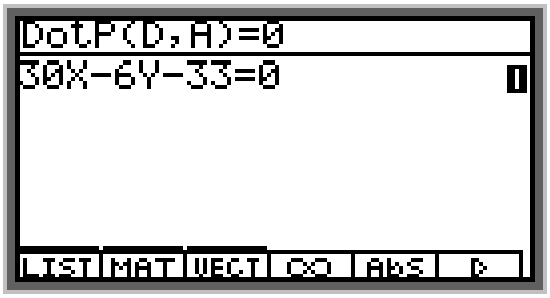


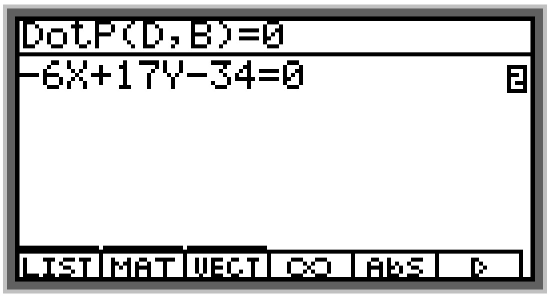


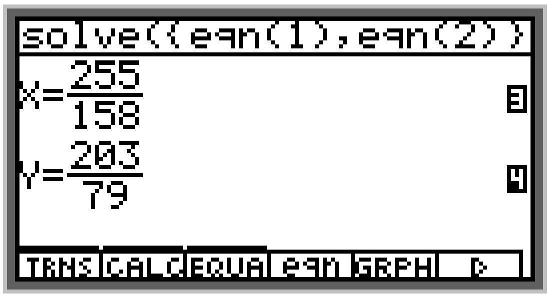


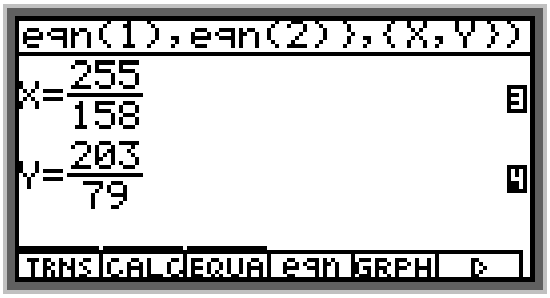


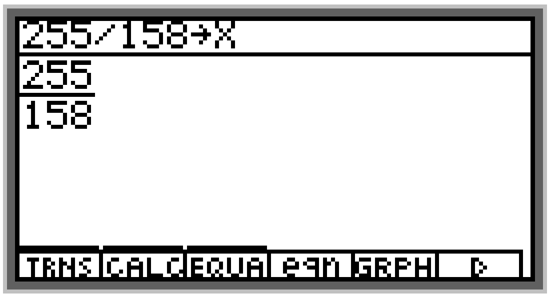
Nachdem die Vektoren A, B, C, D (Differenzvektor) abgespeichert sind, werden die Gleichungen erzeugt. Statt x_1 und x_2 werden jetzt X und Y genutzt.

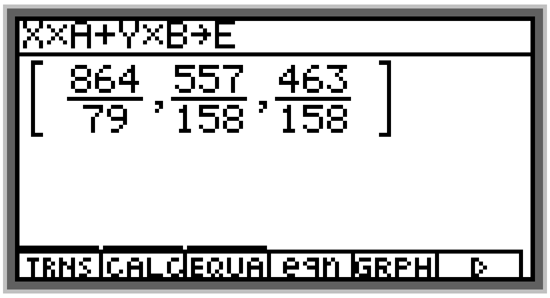


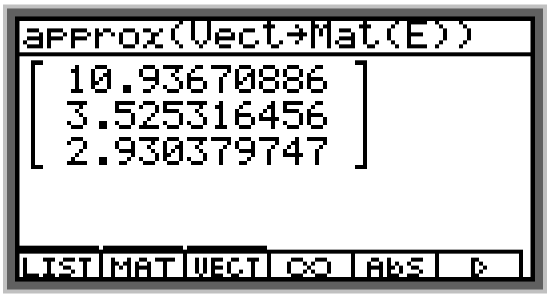




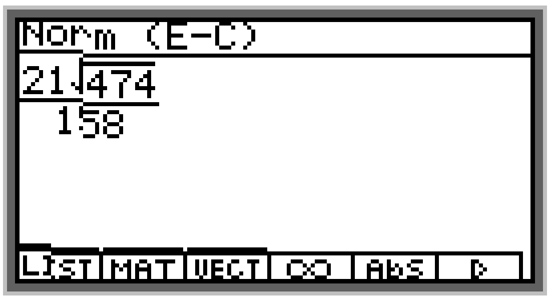


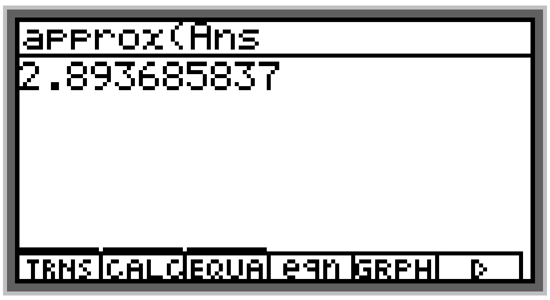






Ein Zeilenvektor kann im FX 2.0PLUS nicht transponiert werden. Er wurde deshalb in eine Matrix konvertiert. Jetzt wird der Abstand zwischen C und E berechnet (Norm des Differenzvektors).



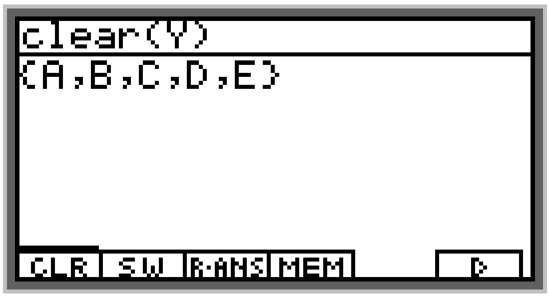


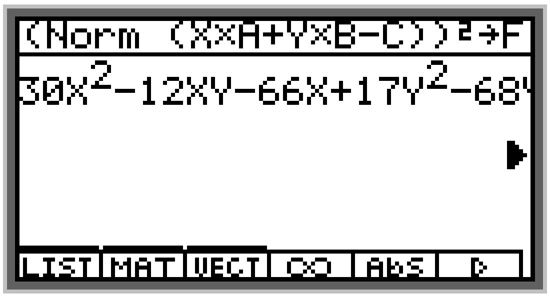
Die „beste“ Näherungslösung $\begin{pmatrix} 10,9 \\ 3,5 \\ 2,9 \end{pmatrix}$ hat damit den (minimalen) Abstand von 2,9 Einheiten zu $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

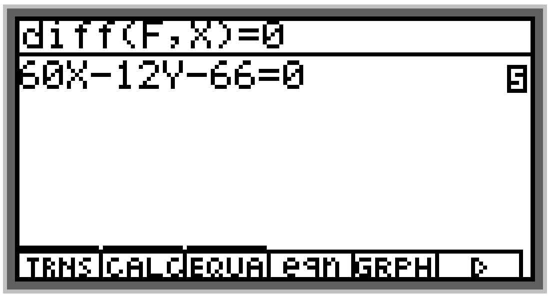
In praktischen Anwendungsaufgaben hat man oft unlösbare Systeme und sucht dann nach einer besten Näherungslösung (Bestapproximation). Einen anderen Zugang bietet die Analysis:

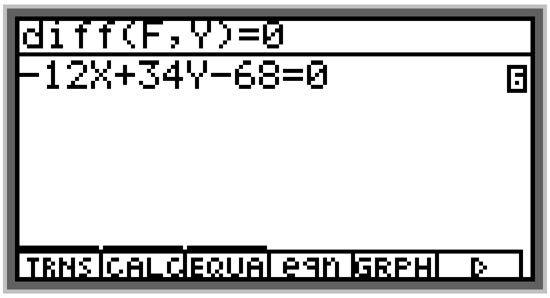
$$F(x_1,x_2) = \left\| x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 \to \text{min!}$$

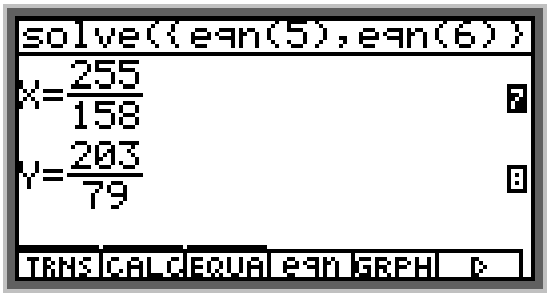
(Mit clear(X) und clear(Y) löscht man zuerst X, Y.)





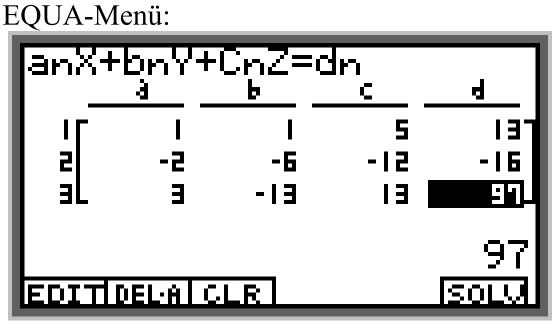


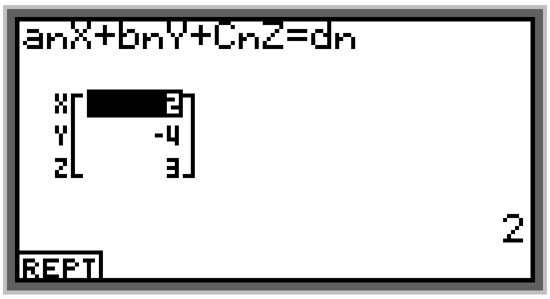




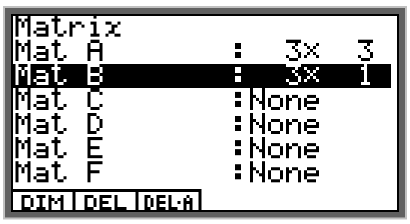
zu e) Beispiele aus den Schulbüchern (ohne Parameter): Kl.11, S.99 Musteraufgabe

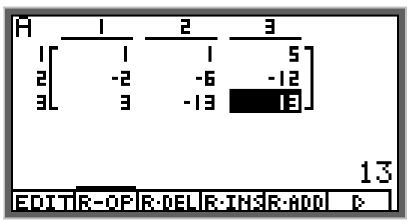
im EQUA-Menü:

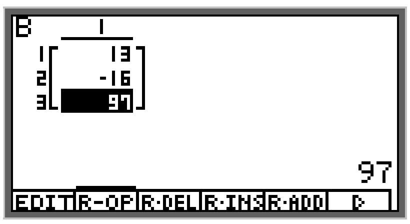


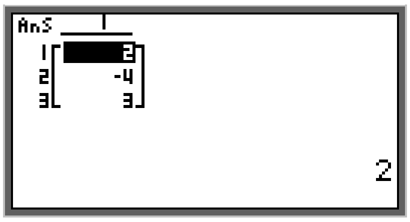


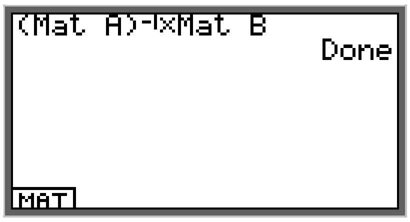
im RUN-Menü:



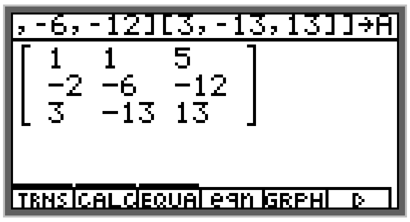


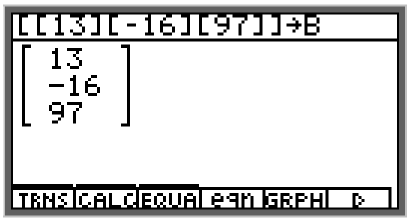


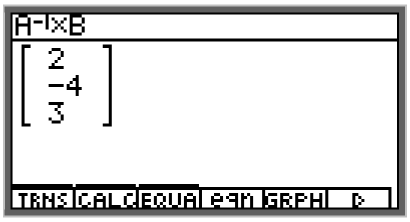


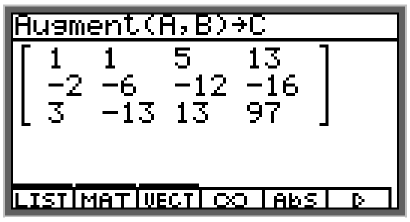


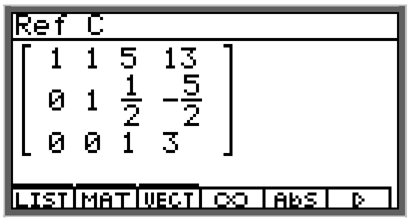
Nutzung der inversen Matrix im CAS-Menü:

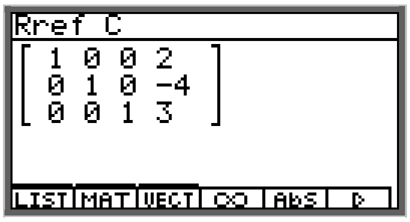




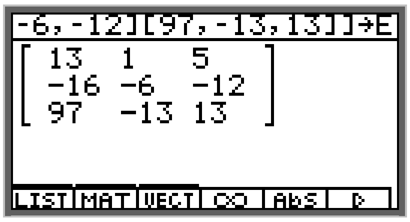


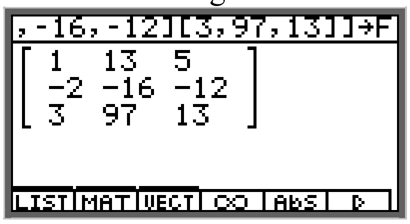


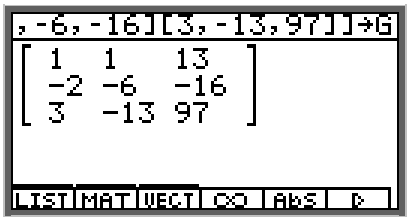


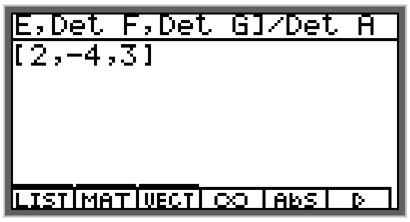


Schließlich betrachten wir noch die Cramersche Regel:

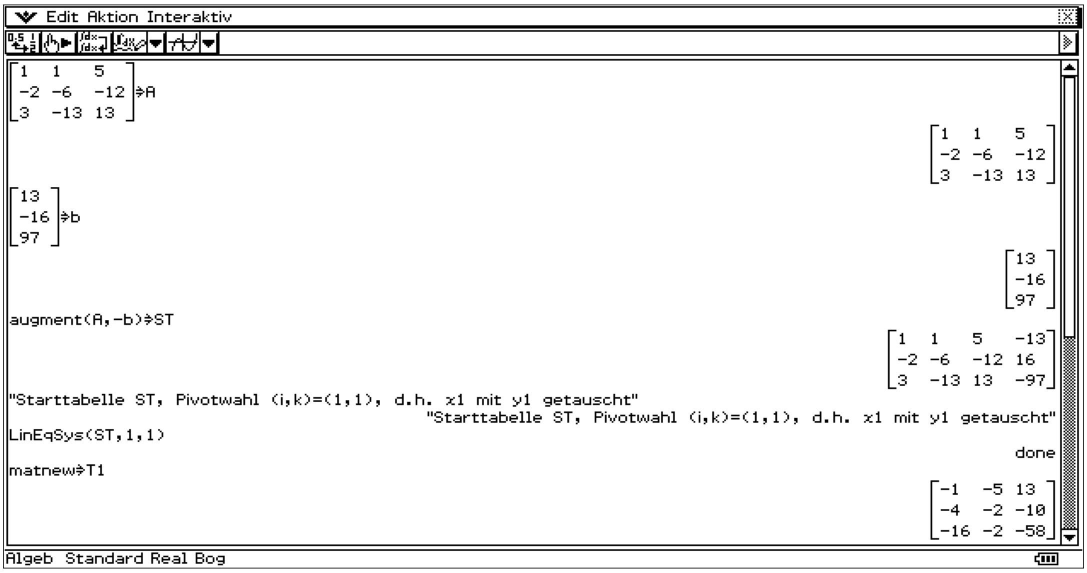


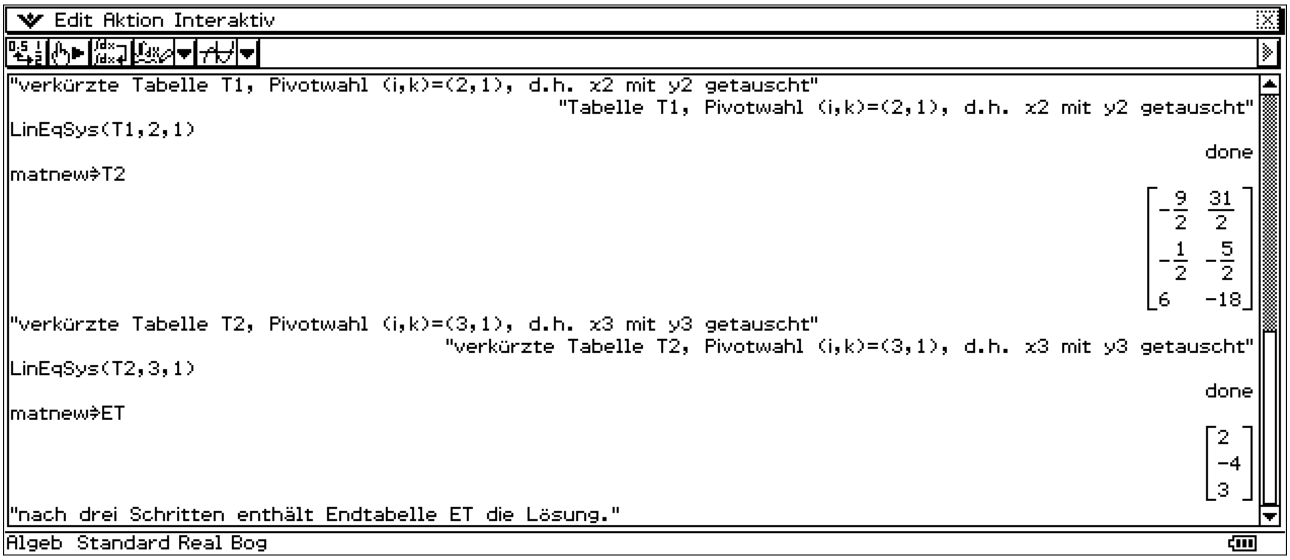






Austauschverfahren für $\underline{A}\cdot\vec{x}-\vec{b}=\vec{o}$: Wir haben das CP-Programm LinEqSys (mit Spaltentilgung)

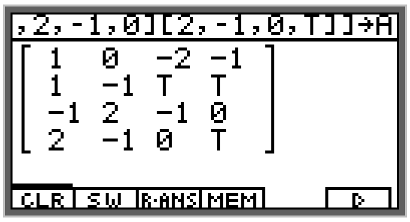


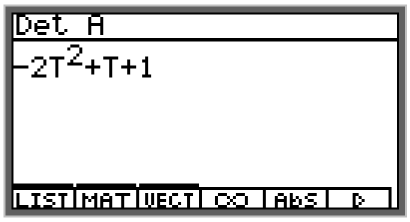


Das CP-Programm ist für den FX noch nicht vorhanden. Wir rechnen das ATV per Hand durch.

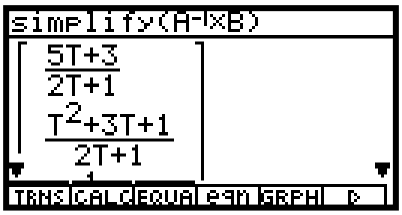
zu f) Beispiele aus den Schulbüchern (mit Parameter): Kl.12 techn.FR, S.35 Musteraufgabe

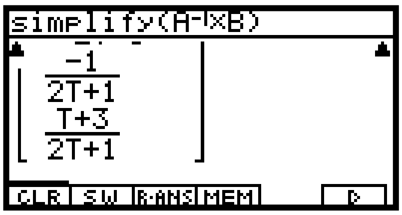
Wir rechnen wieder im CAS-Menü, nachdem wir zuvor alle Einträge gelöscht haben.





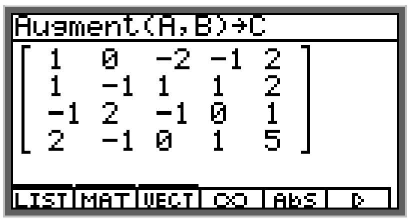
Für T≠1 und T≠-1/2 ist A regulär, d.h. Lösung des LGS eindeutig.

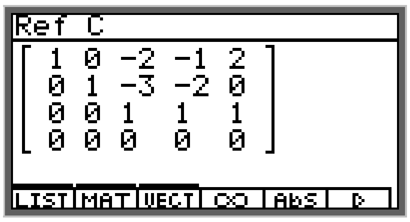


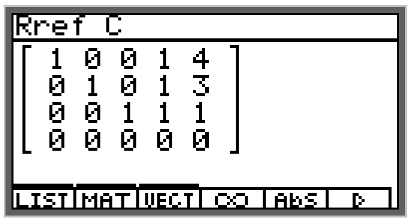


Lösung: $\begin{pmatrix} (5T+3)/(2T+1) \\ (T^2+3T+1)/(2T+1) \\ -1/(2T+1) \\ (T+3)/(2T+1) \end{pmatrix}$

Wir untersuchen nun den Fall T=1: Eingabe in FX 2.0PLUS (CAS-Menü): $1 \to T$



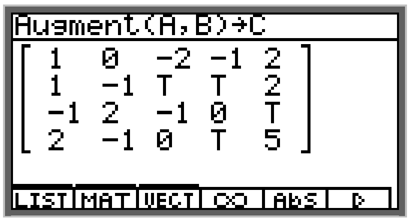


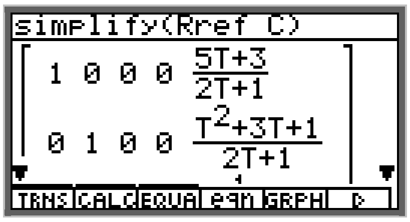


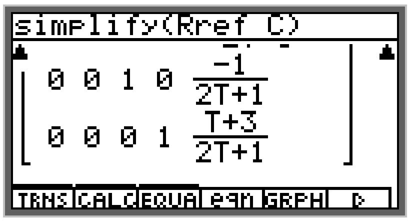
x_4 wird frei gewählt (parametrisiert): $x_4=s$, $x_3=1-s$, $x_2=3-s$, $x_1=4-s$, s beliebig reell (mehrdeutige Lösung).

In der Darstellung Rref C mit C=Augment(A,B) erkennt man ein zu (A,B) äquivalentes System mit 3 unabhängigen Zeilen, d.h. Rg(A)=Rg(A,B)=3<4. Maximalrang 4 nicht erreicht, d.h. wegen Rangübereinstimmung erhält man eine mehrdeutige Lösung (unendlich viele Lösungen).

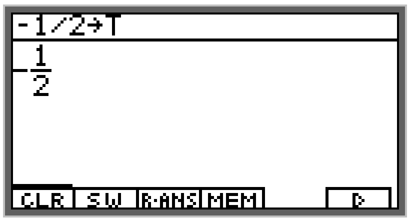
Angenommen, das LGS wird ohne Voruntersuchung mit den vorhandenen Befehlen gelöst:

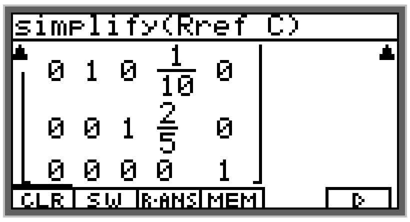






Offenbar ist nur T = -1/2 kritisch (Division durch Null).

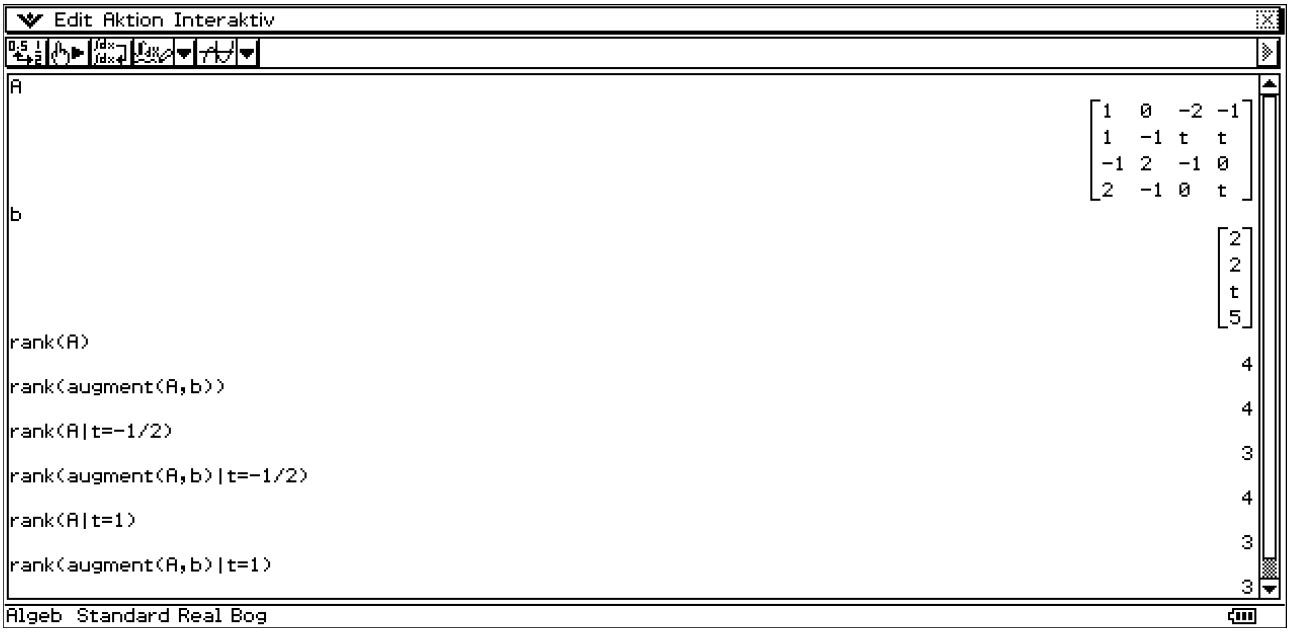




Widerspruch in letzter Zeile.

Damit entsteht die Vermutung der eindeutigen Lösung für alle t ≠ -1/2, was unkorrekt ist. Der Fall t=1 ergibt eine mehrdeutige Lösung, die hier nicht erkannt wird.

Anmerkung: Der **rank**-Befehl im ClassPad gibt den t-unabhängigen Maximalrang 4 an, was falsch ist.

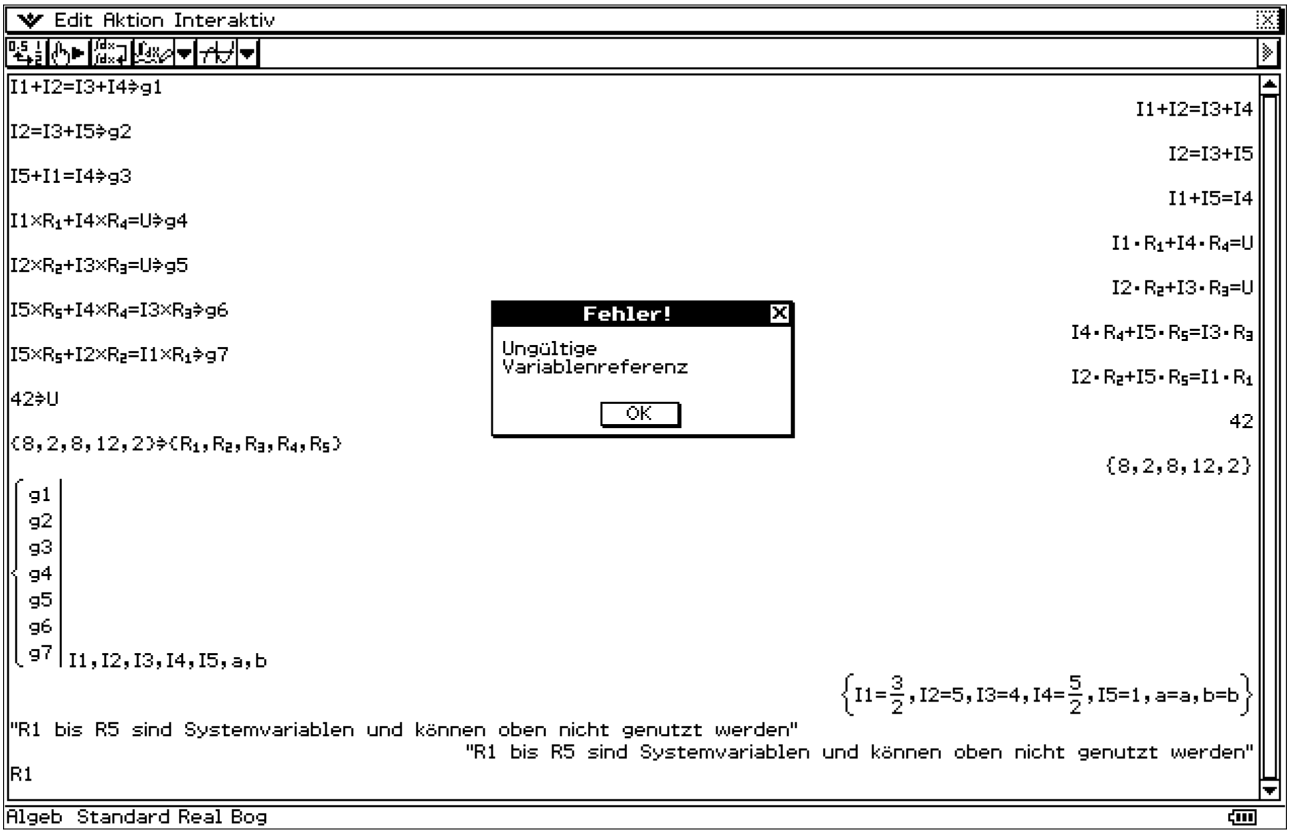


Ursprünglich wurden die Befehle für reine Zahlenschemata ohne symbolische Variablen programmiert und dann in das CAS übernommen, wobei hier keine Fallunterscheidungen erkannt werden!
Damit bleibt die Empfehlung, eine **quadratische Matrix** A zuerst über deren Determinante zu untersuchen.

Für **nichtquadratische Matrizen** sind Einzelschrittverfahren zu bevorzugen, da Ref(…), Rref(…) und rank(…) in der Regel nicht für Fallunterscheidungen programmiert sind und fehlerhafte Ergebnisse anzeigen können.

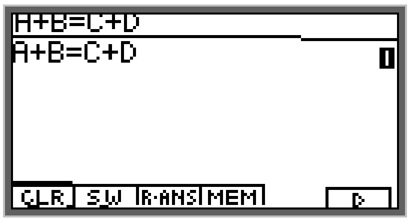
Wird nicht per Hand gerechnet, sind die oben genannten CP-Programme LinEqSys und AVRank als Einzelschrittverfahren zu empfehlen. (Rang = Anzahl der möglichen Austauschritte im Austauschverfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung.)

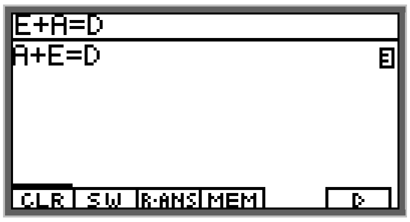
Beispiel Jg.12 techn.FR S.37 Aufg. 03: **Wheatstone'sche Messbrücke** (7 denkbare Einzelgleichungen.)

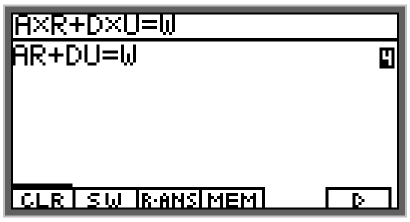


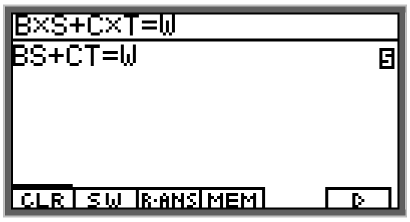
Obiges Bild zeigt zunächst im Überblick einen denkbaren Lösungsweg, wenn man alle Gleichungen benutzt. Das überbestimmte LGS wurde gelöst durch Hinzunahme der fiktiven Variablen a, b. Die Fehlermeldung entstand durch den zuletzt gestarteten Aufruf R1. R1(phi) ist im 2D-Grafik-Menü nicht definiert worden.
Im FX 2.0PLUS können Systemvariablen nicht miteinander kollidieren, da jedes Menü über einen eigenen Speicherbereich verfügt und ein Zugriff zwischen den Menüs nur über die Zwischenablage (FMEM-Speicher) erfolgen kann.

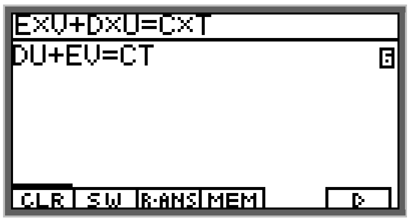
Im CAS-Menü haben wir keine indizierten Variablen, so dass wir A, B, … nutzen:
I1=A, I2=B, I3=C, I4=D, I5=E,   R1=R, R2=S, R3=T, R4=U, R5=V sowie U=W.

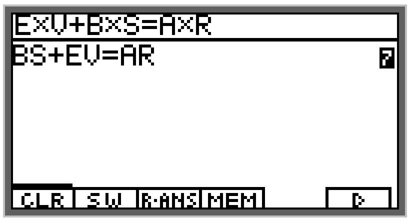


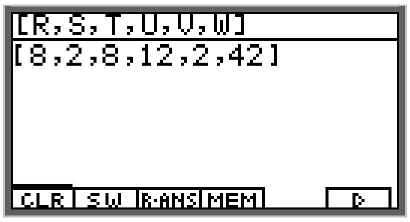






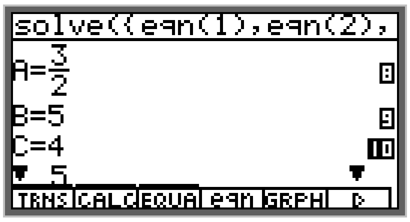


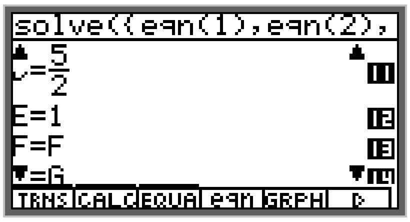


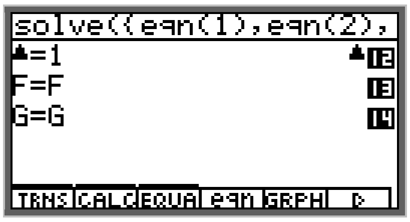


F, G sind fiktive Variablen

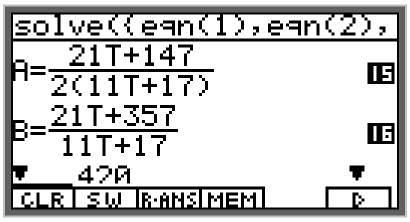
Mit **solve({equ(1), equ(2), equ(3), equ(4), equ(5), equ(6), equ(7)},{A,B,C,D,E,F,G})** erhält man

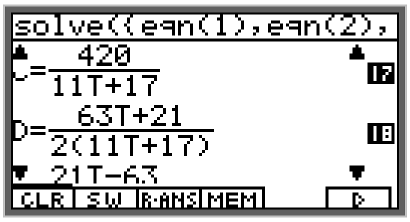


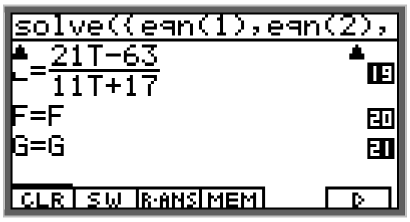




Jetzt wird R3=T variabel gehalten: Eingabe clear(T), damit sind nur noch R,S,U,V,W mit Werten belegt.







Man erkennt, dass für T=63/21=3 die Größe E=I5 verschwindet, d.h. 0 wird. Abspeicherung von 3 auf T.

Wir erhalten also: I1=2,1 I2=8,4 I3=8,4 I4=2,1 I5=0 für [R1,R2,R3,R4,R5,U]=[8, 2, 3, 12, 2, 42].

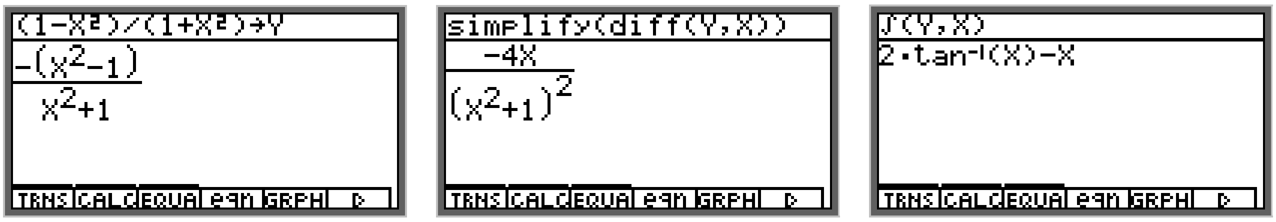
Lit.-hinw.: s. [4] S. 94 Beisp. 3.4 und S. 104 Beisp. 3.7

[4] Aulenbacher,G., Paditz,L., Wabel-Frenk,U. (1996, 2001):
Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Band 3: Lineare Algebra - Stochastik
(Hrg. v. Prof. Dr .W.Preuß, HTW Dresden(FH), u. Prof. Dr. G.Wenisch, FH Darmstadt),
Fachbuchverl. Leipzig im Hanser Verl. München 1996 (1.Aufl.), 2001 (2.Aufl.), 356 S., ISBN: 3-446-21682-0.

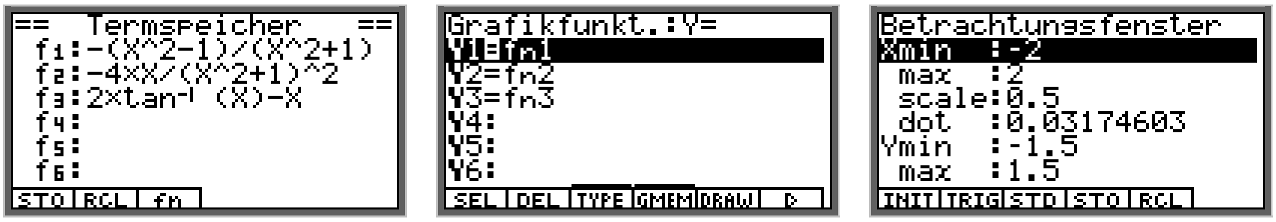
2) Stammfunktionen und Ableitungsfunktionen:

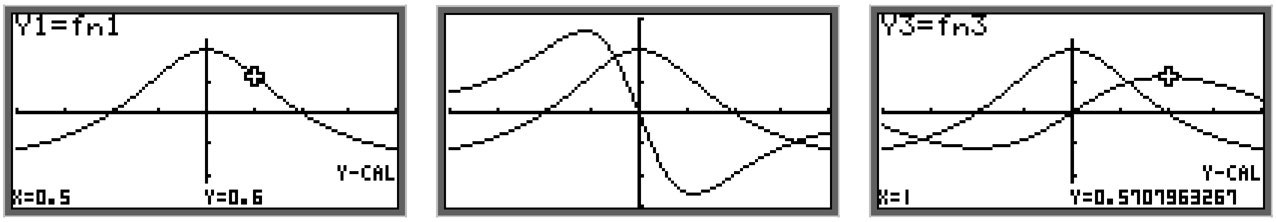
Jg. 12, NT, S.125 und techn.FR S. 150.

Die Differenziation und Integration von Formeltermen ist ein zentrales Anliegen im CAS.



Die Formelterme werden im Termspeicher FMEM abgelegt und dann im GRPH-TBL-Menü abgerufen.

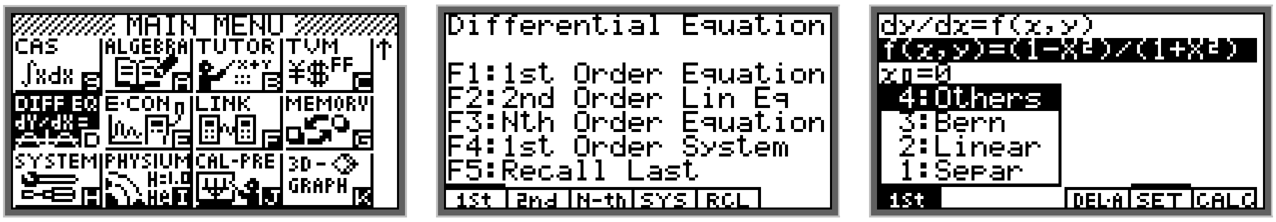




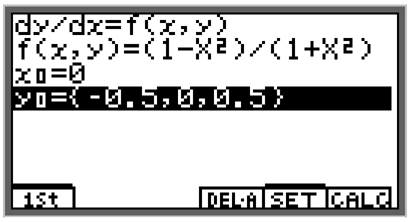
Es sei F'(x) = f(x) = (1-x^2)/(1+x^2) eine Ableitungsfunktion einer (unbekannten) Stammfunktion y = F(x).

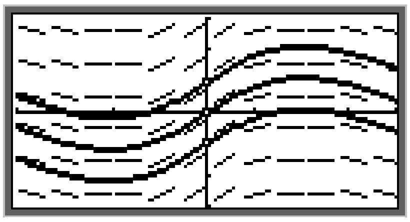
Die Ableitung kann sehr negativ, nur etwas negativ, null oder etwas positiv oder sehr positiv sein. Daraus kann man den Verlauf der Stammfunktion vermuten (bis auf eine additive Konstante C, die Integrations-konstante). Über f(x) = F'(x) = y' findet man für ein festes xo in jedem Punkt P(xo,yo) ein Geradenstück, das den vermutlichen Verlauf von F(x) tangiert.

Gleichung für das Geradenstück (Tangente an y=F(x)): **y = yo + f(xo)*(x-xo)**.
Diese Geradenstücke werden auch **Linienelemente** genannt.
Das **Richtungsfeld** ist die Gesamtheit der Linienelemente. Im **Menü zur Differenzialgleichungsgrafik** des FX 2.0PLUS können Richtungsfelder generiert werden:



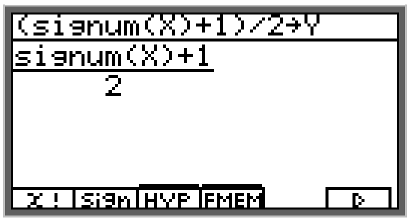
Mittelpunkte paralleler Linienelemente liegen auf einer sogenannten **Isokline** (Punkte mit festem Anstieg f(x)=F'(x)=const.). Um Linienelemente und damit Richtungsfelder schneller zeichnen zu können, zeichnet man oft die Kurvenschar y' = f(x) = (1-x^2)/(1+x^2) = const. = c (Isoklinenschar), d.h. in diesem Fall x = const. Damit liegen hier parallele Linienelemente senkrecht übereinander. Mögliche Stammfunktionen folgen dem Verlauf der Linienelemente und werden auch **Integralkurven** genannt.

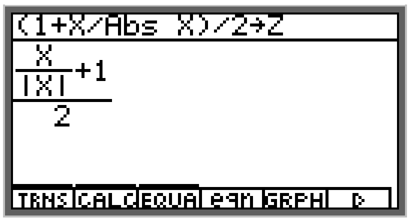


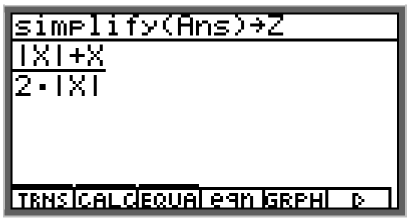

yo wurde als Liste eingegeben.

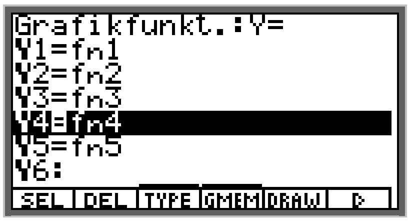
Als Anfangsbedingungen wurden die Punkte P1(0, 0.5), P2(0, 0), P3(0, -0.5) gewählt.
Man erkennt die Parallelität der Integralkurven (senkrechte Verschiebung in Richtung y-Achse).

Die Heaviside-Funktion y=H(x) ist im FX 2.0PLUS nicht implementiert und kann aber mithilfe der Signum-Funktion oder Abs-Funktion im CAS-Menü unkompliziert dargestellt werden:

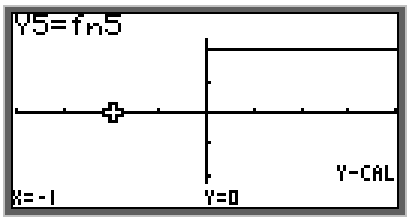


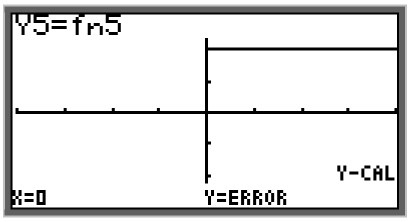






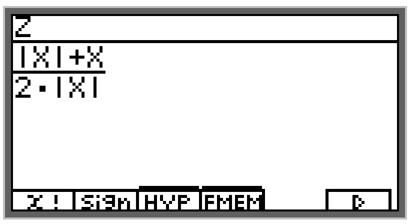
Im GRPH-TBL-Menü kann die Signum-Funktion nicht benutzt werden: Syntax-ERROR.

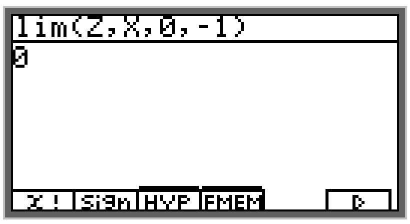


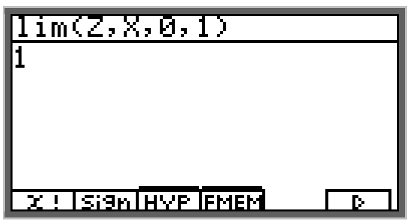


Y5 ist als Einheitssprungfunktion erkennbar, allerdings für X=0 nicht definiert (ERROR).

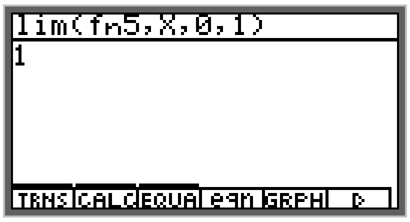
Wir untersuchen die einseitigen Grenzwerte im CAS:

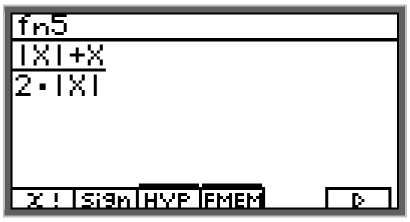






Im Schulbuch Jg.12 techn.FR, S. 152 (NT S. 127) ist H(x) als linksseitig stetig definiert.





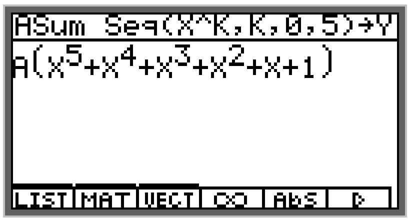
Der rechtsseitige Grenzwert ist im mittleren Bild unkorrekt. Warum wohl? Der Term fn5 ist ohne Argument einzugeben!

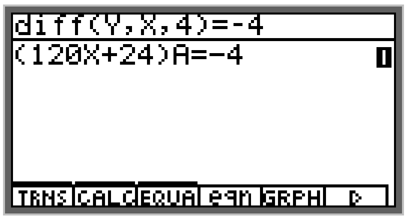
Die Stammfunktion zu y = f(x) = H(x) ist y = F(x) = x * H(x) + C.

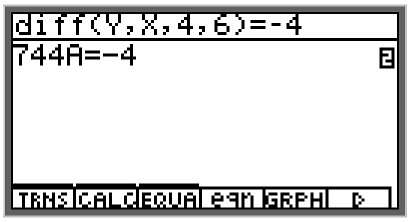
In technischen Anwendungen wird H(x) auch als **Einheitssprungfunktion** bezeichnet. Die Stammfunktion wird dann **Rampenfunktion** genannt.

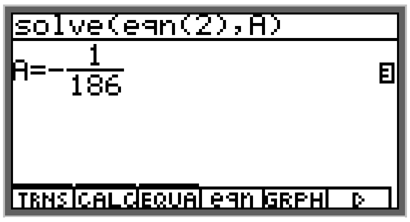
Zur Berechnung von Ableitungen haben wir im CAS bzw. RUN-Menü spezielle Befehle:

Jg.12 techn.FR, S.156 (NT S. 131), Aufg. 10 e) **Hinweis:** ASum … bedeutet A*Sum …







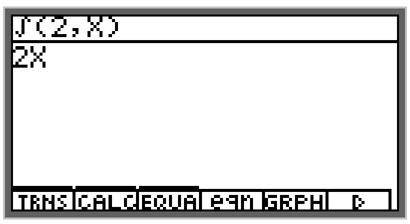


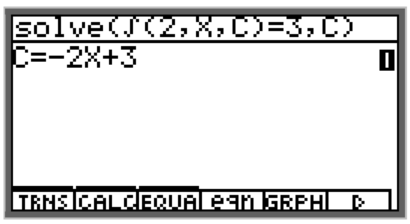
3) Differenzialgleichungen: Jg.12 NT S.314ff, techn.FR S,307

Druckfehlerhinw.: Jg.12 techn.FR:
S.307 12.Z.v.u.: vgl. Seite **168**,
S.307 4.Z.v.u.: vgl. Seite **170**,
S.311 11.Z.v.u.: vgl. Seite **118f.**

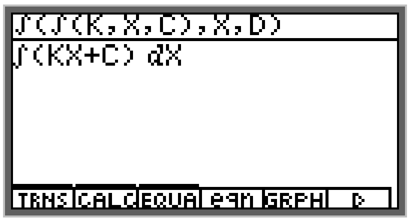
Einfache DGLn können im FX 2.0PLUS nur gelöst werden, wenn die elementaren Integrationsschritte ersichtlich sind und der Integrationsbefehl genutzt werden kann.

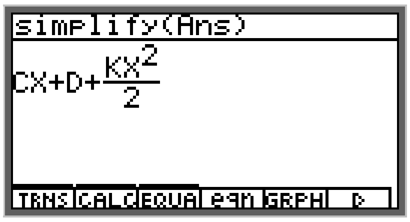
Syntax: ∫(f(x), x) bzw. ∫(f(x), x, C) mit additiver Integrationskonstante C. Beisp.1 Kap. 7.1:





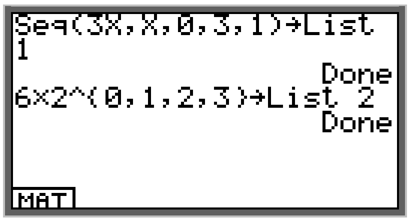
Mit der Anfangsbedingung 3 an der Stelle x=0 ergibt sich C=3, d.h. y=2x+3 ist die Lösung der DGL y'=2 mit y(0)=3. Wir betrachten nun das 2. Beispiel in Kap. 7.1: y''=k:

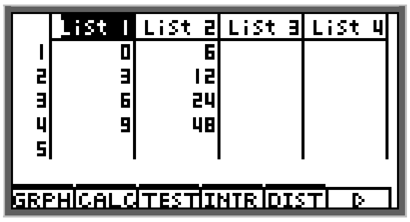


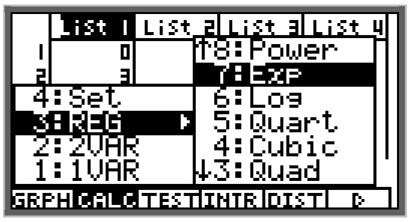


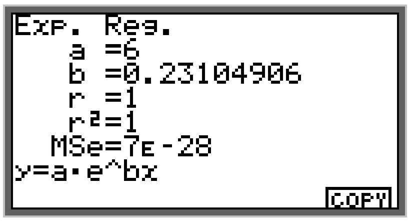
C, D … Integrationskonstanten

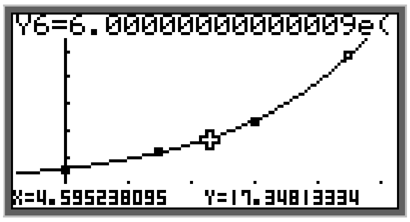
Exponentielles Wachstum (Exponentielle Regression oder Lösung einer DGL.)



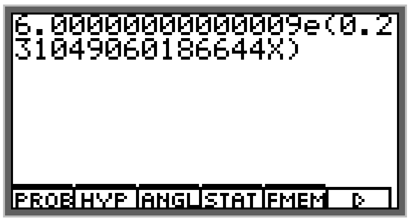






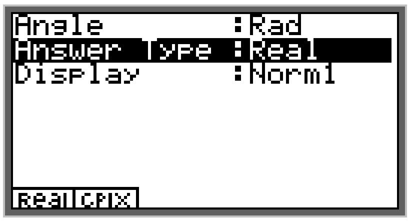


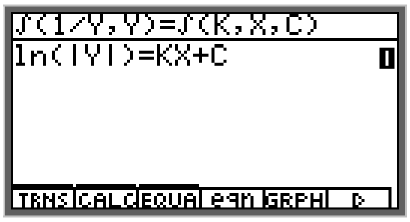
Zahlendarstellung 15 Ziffern!

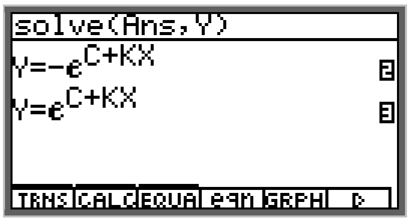


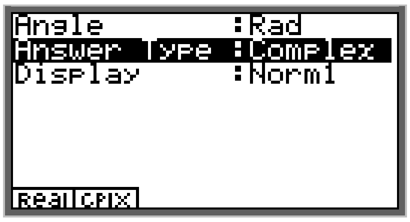
Die tatsächliche Regressionsfunktion

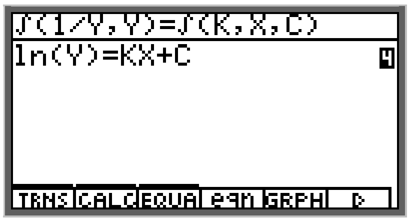
Wir lösen nun die DGL y'=k*y wie folgt (Trennung der Variablen): ∫ 1/y dy = ∫ k dx

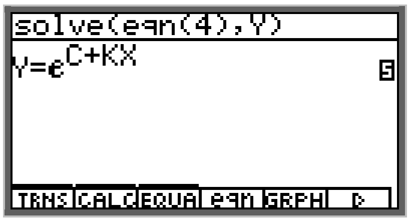










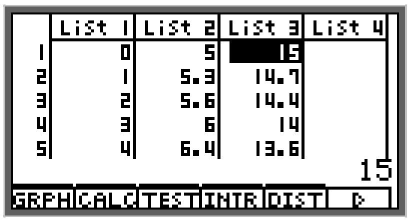


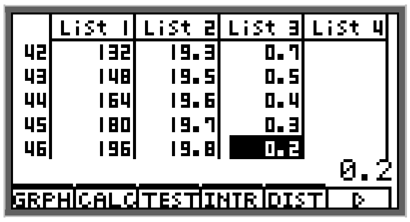
Das Ergebnis kann auch als $y = e^C * e^{k*x}$ notiert werden. (Allg. Lös. $y = C_1 \times e^{k \times x}, C_1 \in \mathbb{R}$.)

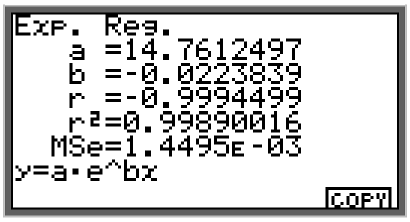
Während im real-Mode zwei Teillösungen (mit „+" bzw. „-") ausgegeben werden, erhält man im komplex-Mode sofort die Gesamtlösung in einem Formelterm.

Beschränktes Wachstum:

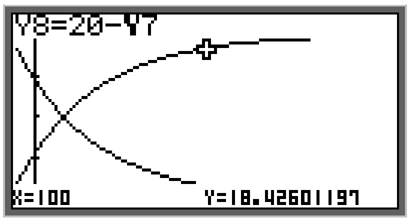
Wir versuchen zuerst, die Datenpunkte durch eine exponentielle Regression anzunähern.

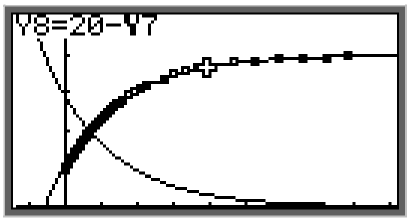






Formel über FMEM kopiert.





gute Anpassung an die Daten

Die Datenpaare werden (nach Transformation) durch eine exponentielle Regressionsfunktion wie folgt approximiert.
Der GTR hat y=f(x)=c+a*exp(b*x) nur für c=0 implementiert (und rechnet dann intern quasilinear: ln(y)=ln(a)+b*x).
Wir betrachten deshalb den transformierten Datensatz 20-yk, k=1(1)46, um zunächst den e-Funktionsanteil mit der Standard-Statistik-Software des FX 2.0PLUS zu bekommen.

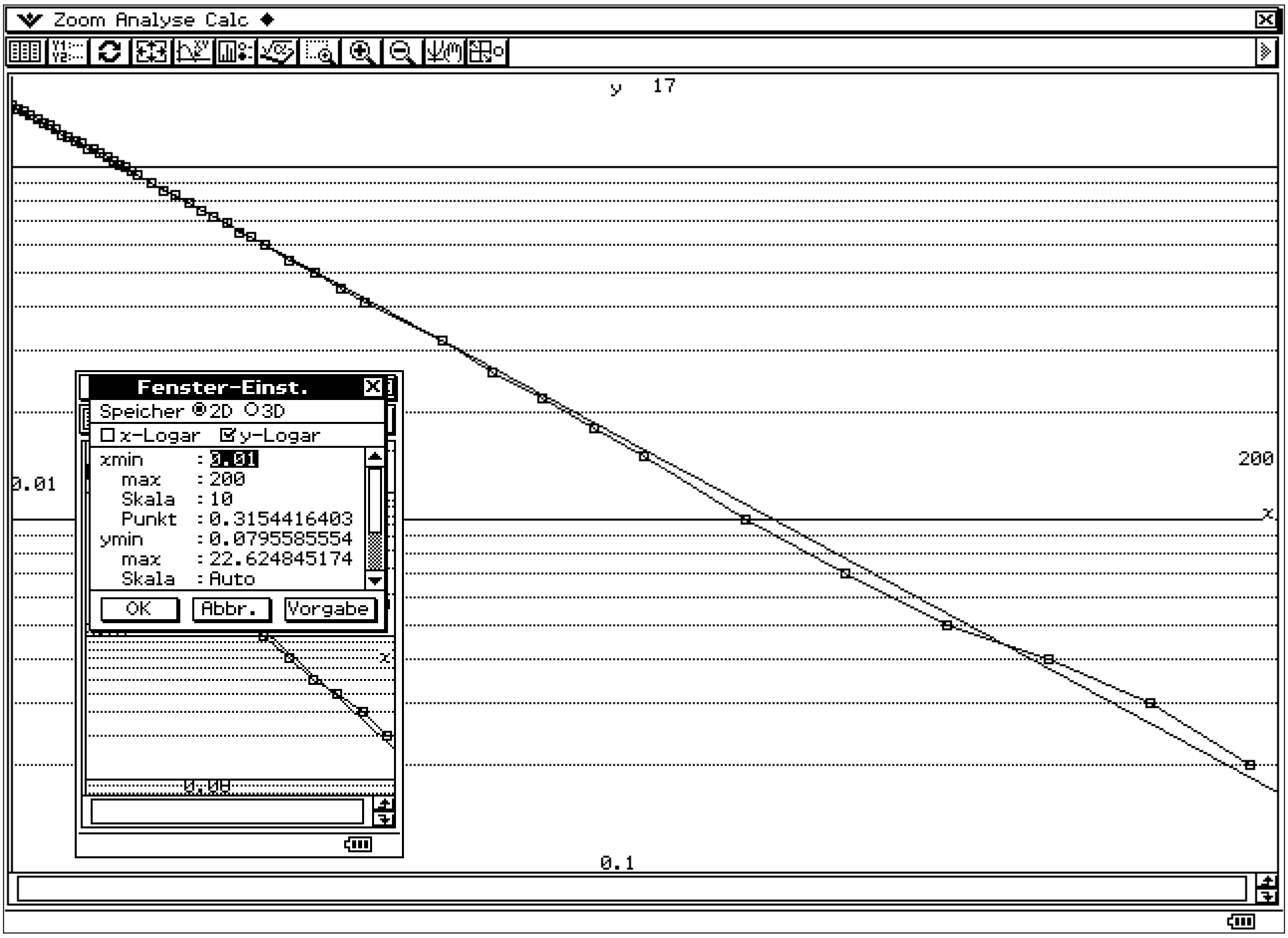
Ergebnis nach Rücktransformation: **y = f(x) = 20 – 14,76*exp(-0,0224*x)** .

Anmerkung: Durch die Anwendung der MKQ-Berechnung auf das quasilineare Modell ist die Berechnung einfacher aber damit auch etwas ungenau:

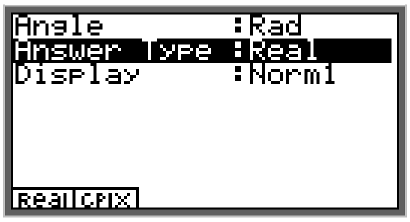
MKQ direkt wäre: $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a * e^{b*x_i}\right)^2 \rightarrow \text{min!}$ quasilinear: $\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(y_i) - \left(\ln(a) + b * x_i\right)\right)^2 \rightarrow \text{min!}$

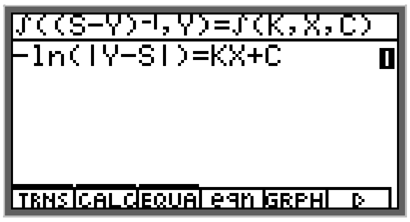
Die beiden genannten min-Aufgaben haben analytisch wie auch numerisch gesehen unterschiedliche Lösungen, die allerdings nahe beieinander liegen, insbesondere dann, wenn die positiven y_i -Koordinaten nicht zu nahe an Null liegen.

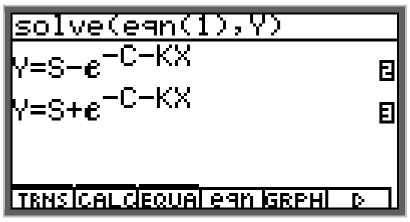
Unter Nutzung der logarithmischen Skalierung (y-Achse) des Betrachtungsfensters (ClassPad) erscheint die quasilineare Regression als Gerade und man erkennt die Abweichungen zwischen den Daten und der Regressionsfunktion.



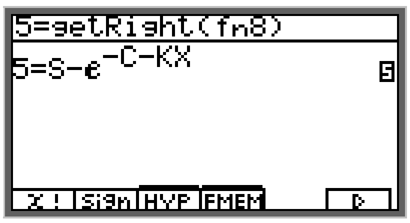
Wir lösen nun die DGL **f'(x)=k*(S-f(x))** mit der Anfangsbedingung **f(0)=5** und der Vorgabe S=20 sowie der Vorgabe f(3)=6 zur anschließenden Bestimmung von k. Wir trennen die Variablen in der DGL, um dann bequem integrieren zu können: $\int 1/(S-y)\,dy = \int k\,dx$.

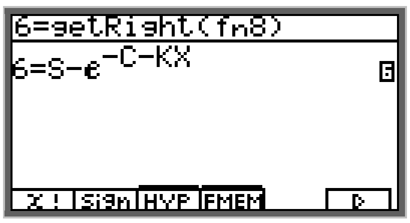




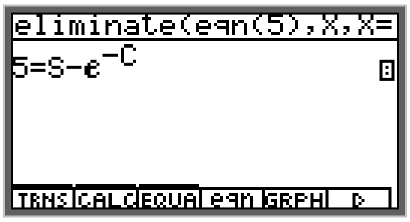


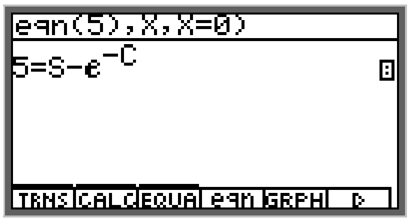
Da $0 < y=f(x) < S$ gilt, ist equ(2) die gesuchte Lösung der DGL (equ(3) entfällt als Scheinlösung).

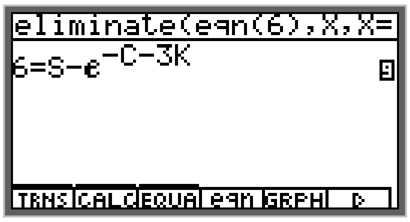


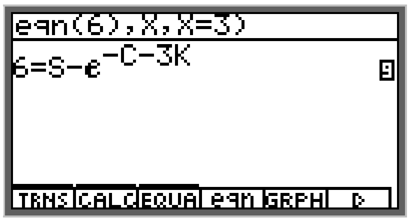


Wir setzen den Term fn8 (siehe FMEM) auf 5 bzw. 6 (y-Werte aus den vorgegebenen Bedingungen) und anschließend setzen wir in equ(5) x auf 0 bzw. in equ(6) x auf 3. Wir nutzen dazu im CAS den eliminate-Befehl:

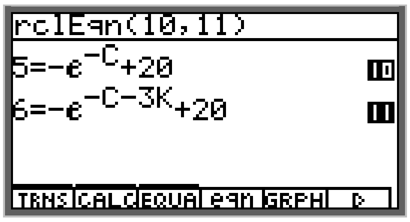


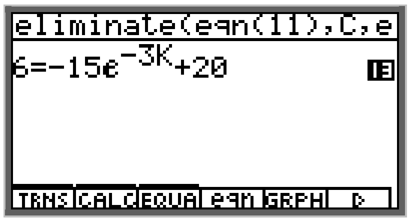


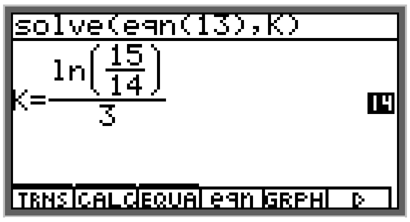


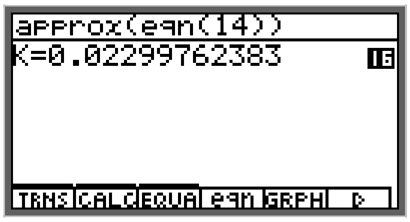


Jetzt wird S=20 gesetzt: 20 →S.









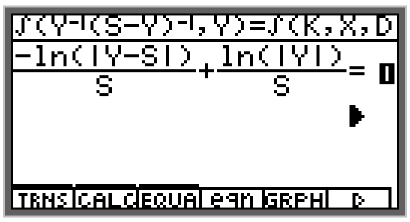
Lösung: $y = 20-15 * e^{-0,023x}$.

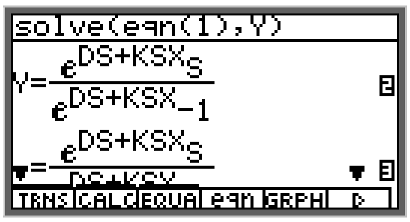
Damit unterscheiden sich die analytische Lösung (über eine DGL) und die Lösung der Regressionsanalyse nur unwesentlich. Während mit der Lösung der DGL die Formelstruktur $y = f(x) = c + a * \exp(b*x)$ erst gefunden wird, geht die exponentielle Regression bereits von einem Regressions-Ansatz aus und schätzt lediglich noch die Parameter gemäß MKQ (quasilineare Regression).

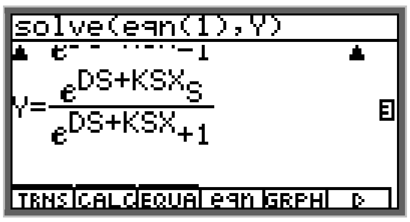
Logistisches Wachstum:

Wir untersuchen die im Schulbuch Jg.12 Kap. 7.4 betrachtete Wachstumsfunktion $y = f(x)$ mit der Eigenschaft $f'(x) = k * f(x) * (S - f(x))$, wobei $k>0$ und $S>0$ fest vorgegebene Parameter sind.
Es gilt außerdem $0 < f(x) < S$. Der Anfangswert des logistischen Wachstums sei $f(0) = c>0$ mit $c<S$. $f'(x)>0$ beschreibt die Veränderungsrate (Wachstumsgeschwindigkeit). Im Beispiel sind $f(1)=9$ und $f'(1) = 6$ vorgegeben, d.h. für k gilt dann $k = f'(1) / (f(1) * (S - f(1)))$. Hierbei sei $S=3000$, $c=3$.

Wir lösen die DGL mit dem FX 2.0PLUS wie folgt (um die angegebene Funktion nachzuprüfen). Trennung der Variablen und anschließende Integration: $\int 1/(y * (S-y))\, dy = \int k\, dx$.

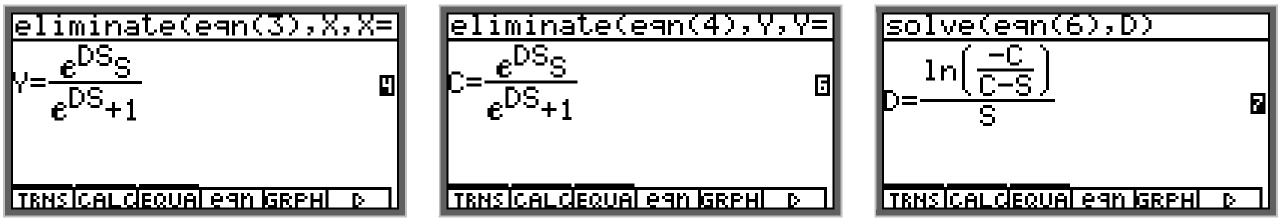






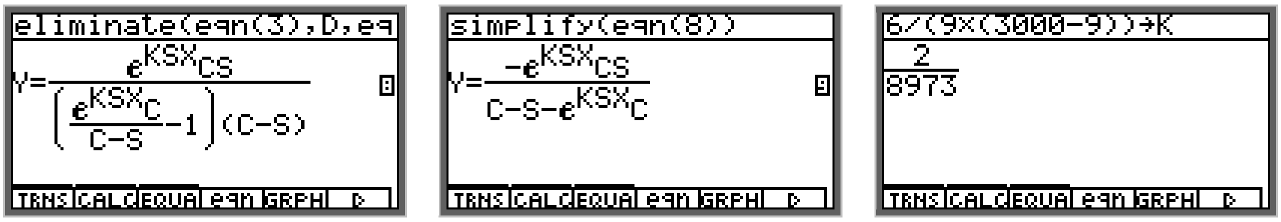
Da y<S sein soll, gilt equ(3) und equ(2) entfällt als Scheinlösung. D ist die Integrationskonstante.

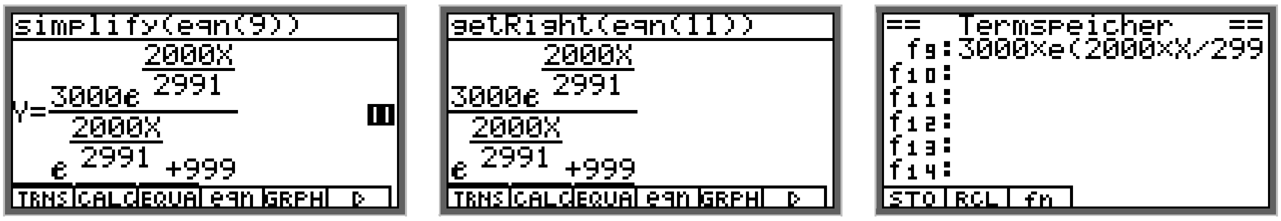
Übung: equ(1) per Hand nach y auflösen. Wir wissen, dass $0<y<S$ und $0<y(0)=c<S$ gilt.



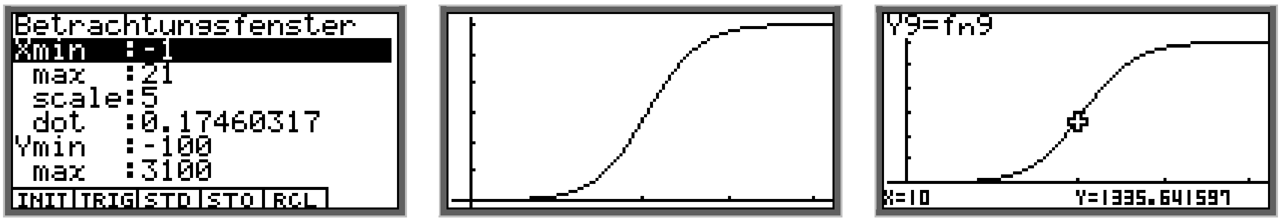
Einarbeiten der Anfangswerte x=0 und y=c. Auflösen nach der Integrationskonstante D.

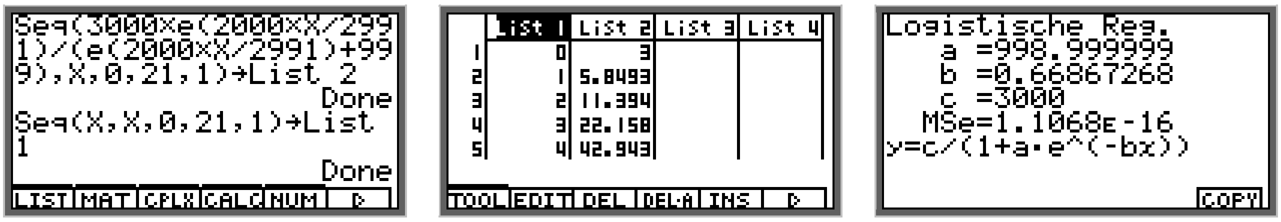
Nun wird equ(7) in equ(3) eingesetzt. Dann wird zugeordnet: S→3000, c→3, 6/(9*(3000-9))→k .





Nunmehr können wir die Wachstumsfunktion zeichnen und tabellieren:





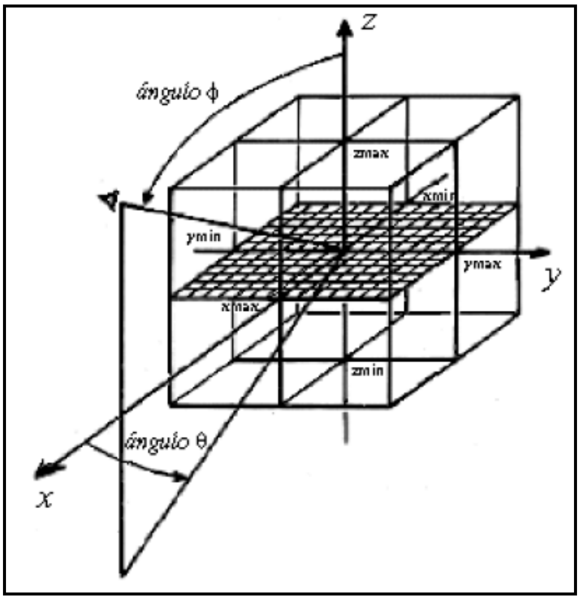
Damit haben wir über die logistische Regression die Ausgangsformel zurückerhalten!

y = c/(1+a*exp(-b*x)) = 3000/(1+999*exp(-b*x)) mit b=k*S=3000*2/8973=0,66867268.

4) 3D-Grafik von Punkten, Geraden, Ebenen und Körpern

Punkte sind als Pixelpunkt in einer 3D-Grafik sicher schwer zu erkennen, so dass sich hier anbietet, den Punkt als kleine Kugel (genauer Kugeloberfläche) dazustellen. Das 3D-Menü des ClassPad gestattet die parameterfreie Darstellung von Funktionen z=f(x,y) oder Parameterdarstellungen x=x(s,t), y=y(s,t), z=z(s,t) mit Vorgabe entsprechender x-y-Bereiche (Definitionsbereiche) bzw. s-t-Bereiche (Parameterbereiche).

Die 3D-Grafik erscheint im ClassPad unter einer vorzugebenden Blickrichtung (Augenpunkt des Betrachters durch den Höhenwinkel über dem Äquator zum Nordpol sowie einem Winkel zur x-z-Ebene vorzugeben (Azimutwinkel)).



Literaturhinweis :

Paditz,L. (2007): **Modelos Matemáticos y Aplicaciones Científico - técnicas**
Ejemplos escolares y universitarios con la calculadora gráfica y simbólica Classpad 300
Hrg. v. CASIO Europe GmbH, Norderstedt 2007 (1.Aufl., spanische Übersetzung), 117 S.,
http://www.aulamatematica.com/libros/pdf%20libros/Paditz.pdf

3D-Objekte werden über Liniennetze visualisiert, so dass in der Betrachtungsfenstereinstellung zusätzlich die Anzahl der Gitterlinien in x- bzw. y-Richtung vorzugeben ist.

Zur besseren Anschaulichkeit kann ein zusätzlicher Betrachtungsquader parallel zu den Koordinatenebenen eingeblendet werden.

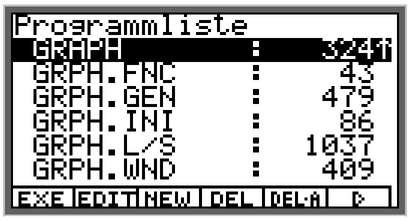
Eine Geradengleichung kann bekanntlich nur als Parameterdarstellung x=x(t), y=y(t), z=z(t) und nicht als parameterfreie Einzelgleichung dargestellt werden, da die Einzelgleichung Ax+By+Cz=D bereits eine Ebene beschreibt.
Die parameterfreie Darstellung einer Geraden könnte deshalb nur durch die gleichzeitige Angabe zweier nichtparalleler Ebenengleichungen realisiert werden, z.B. Ax+By+Cz=D und ax+by+cz=d, wobei die Normalenvektoren $[A,B,C]^T$ und $[a,b,c]^T$ linear unabhängig sind.

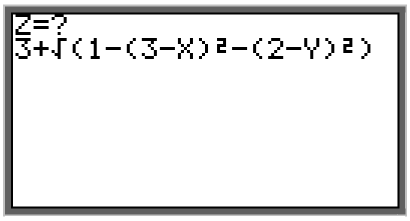
Die 3D-Grafik hat die Einschränkung, dass nur ein mathematisches Objekt gleichzeitig dargestellt werden kann. Geraden werden dann hier mittels einer Parameterdarstellung visualisiert.

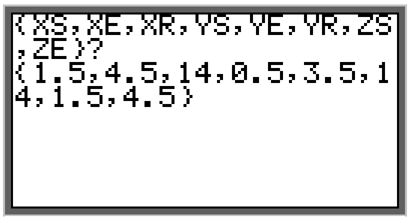
Im FX 2.0PLUS gibt es vom Betriebssystem her keine 3D-Grafik. Es existiert lediglich eine inoffizielle von einem Studenten erstellte 3D-Add-In-Software, die nicht von CASIO autorisiert wurde, vgl. Teil 2 dieses Arbeitsmaterials. Wir zeigen hier beispielhaft die Möglichkeiten mit dieser 3D-Add-In-Software im FX 2.0PLUS und die weiterführenden Möglichkeiten mit dem ClassPad.

Es wird darauf hingewiesen, dass bei unsachgemäßer Handhabung der 3D-Grafik im FX 2.0PLUS der TR hängenbleibt und nur ein totales Reset (P-Knopf auf der TR-Rückseite) Abhilfe bringt. Alle nicht systemresistenten Daten und Programme werden dabei gelöscht!
Insbesondere müssen auch die 6 Unterprogramme zur Definition der 3D-Grafik wieder neu installiert werden. Eine Parameterdarstellung kann nicht eingegeben werden, nur z=f(x,y).

Wir untersuchen nun die 3D-Grafik im FX 2.0PLUS mithilfe der genannten 3D-Add-In-Software 3D-GRAPH von Christian Roervik (2003):
Darstellung einer oberen Halbkugel über der Äquatorebene **z = 3 + √ (1 - (3-x)^2 - (2-y)^2)**
Die Vorbereitung erfolgt mit dem Hilfsprogramm GRAPH im PRGM-Menü:



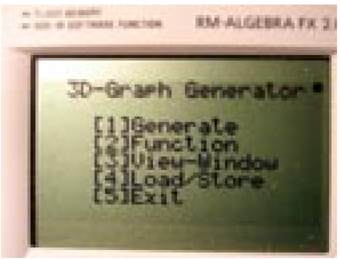


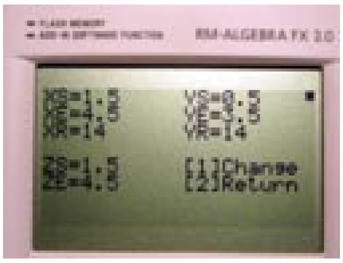


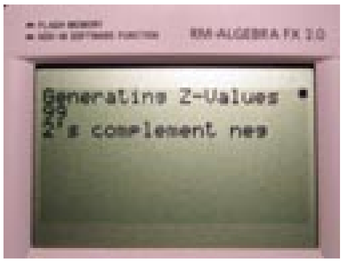
Nach dem Start von GRAPH mit EXE erscheint der **3D-Graph Generator** mit dem Menü:
[1] Generate
[2] Function
[3] View-Window
[4] Load/Store
[5] Exit

Wählen Sie [2] zur Eingabe der Funktion (Ablage im Termspeicher fn1, siehe FMEM)
Z = 3 + (1 - (x-3)^2 - (y-2)^2)^0.5
und [3] zur Eingabe des Betrachtungsfensters (dann hier Auswahl [1] Change).

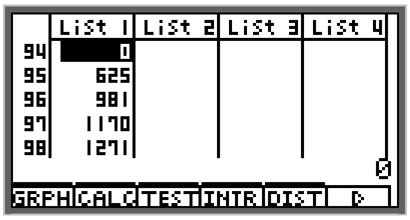
Es gilt dabei (Ablage in List20, siehe STAT-List-Editor):
XS = Startwert = 1.5, YS = Endwert = 4.5, XR = Anzahl der Linien im Liniennetz = 14+1
YS = Startwert = 0.5, YS = Endwert = 3.5, YR = Anzahl der Linien im Liniennetz = 14+1
ZS = Startwert = 1.5, ZS = Endwert = 4.5 (Bem.: (XR+1) * (YR+1) < 254 einhalten)



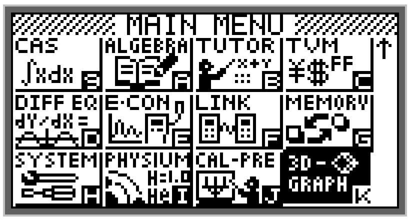


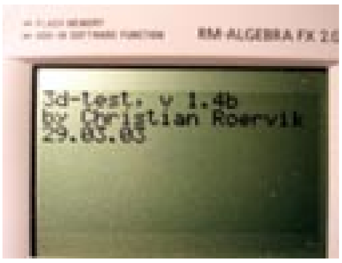


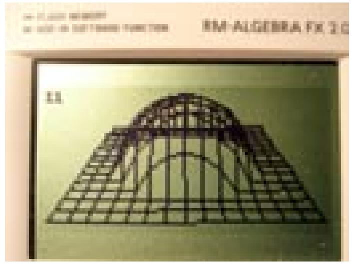
Nun im 3D-Graph Generator Menü die Auswahl **[1] Generate** wählen (Erzeugung der Datenmatrix für die Funktion Z im definierten Betrachtungsfenster, Ablage in List1, siehe STAT-List-Editor), dann **[5] Exit**. Ende des Hilfsprogramms GRAPH.



Jetzt wird die eigentliche 3D-Add-In-software 3D-GRAPH gestartet:

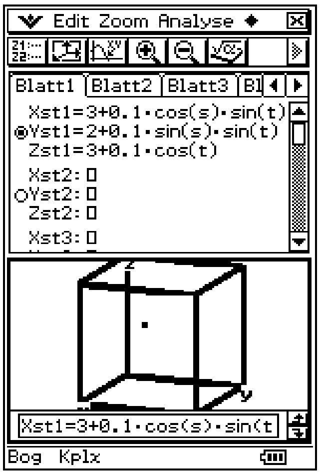


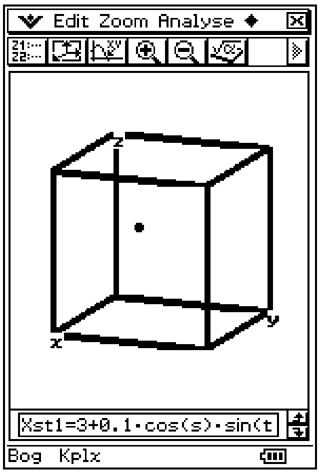


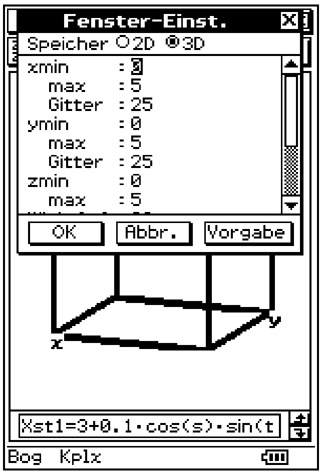


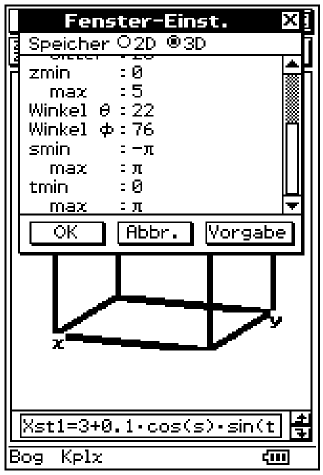
Zur Navigation dienen die F1- bis F6-Tasten und zur Menüauswahl CTRL (Ausblenden MENU). Programmende mit ESC und dann EXE. Neben der Halbkugel erscheint die Äquatorebene.

Die folgenden Bilder stammen wieder vom ClassPad zur Visualisierung eines Punktes (Minikugel):

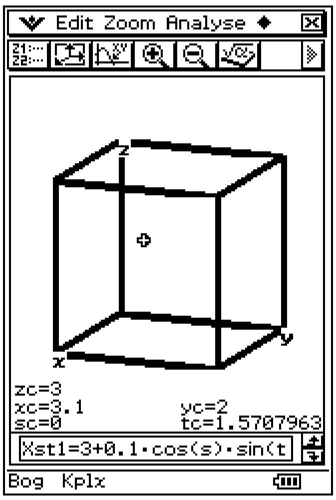








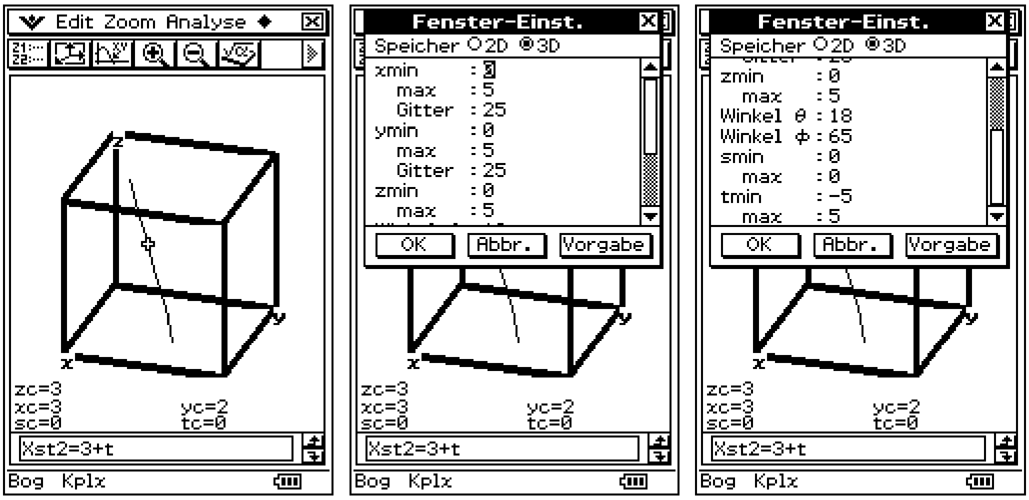
Wenn Sie mit dem Stift über das Bild gleiten, dreht sich die Grafik in die gewünschte Richtung!



Darstellung der Koordinaten auf der Mini-Kugeloberfläche (r = 0.1)

Wir wollen nun die Geradengleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$ darstellen.

Diese Darstellungsmöglichkeit ist im FX 2.0PLUS nicht vorhanden und wird im ClassPad gezeigt.



Man erkennt den Verlauf der Geraden nur im Betrachtungsquader. **Übung:** Durchstoßpunkte?

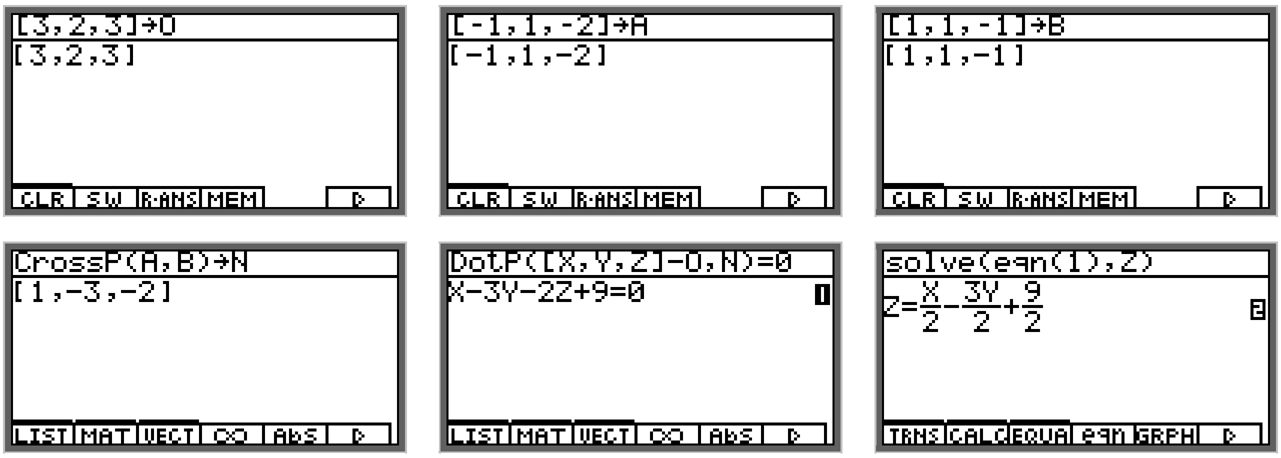
Schließlich kommen wir zu einer Ebenendarstellung mit zwei linear unabhängigen Richtungs-vektoren, z.B. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$, (Parameterdarstellung).

Die parameterfreie Darstellung erhalten wir mithilfe des Normalenvektors

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{i} - \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{j} + \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$ und dem

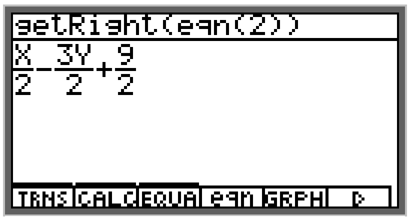
Ansatz $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ (Skalarprodukt Differenzvektor in der Ebene orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$).

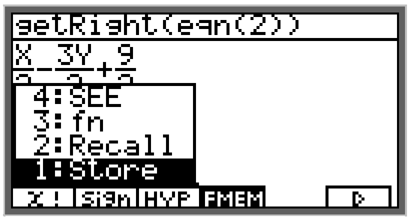
Damit lautet die Ebenengleichung (parameterfrei): 1x-3y-2z=-9 oder z=(9+x-3y)/2. Weiter im CAS:

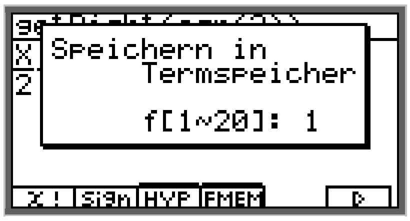


Skalarprodukt und Kreuzprodukt haben die Befehle DotP(…, …) bzw. CrossP(…, …).

Wir visualisieren nun die parameterfreie Ebenengleichung mit 3D-GRAPH im FX 2.0PLUS:



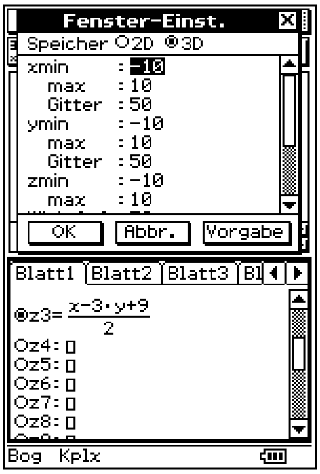


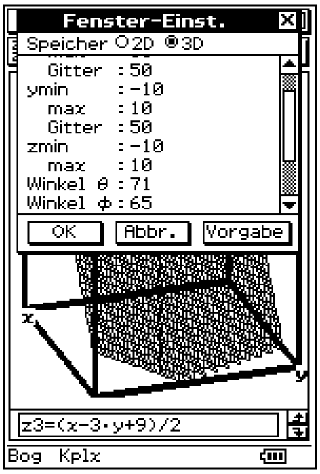


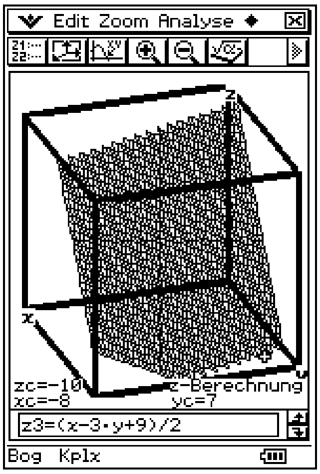
Vorgaben für „Generate" [1]

Die Qualität der Ebenendarstellung im 3D-GRAPH ist unbefriedigend.

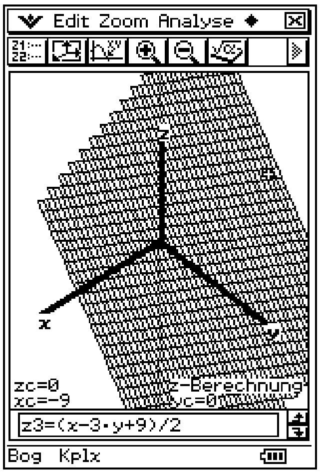
Im ClassPad haben wir wieder bessere Möglichkeiten der Darstellung:

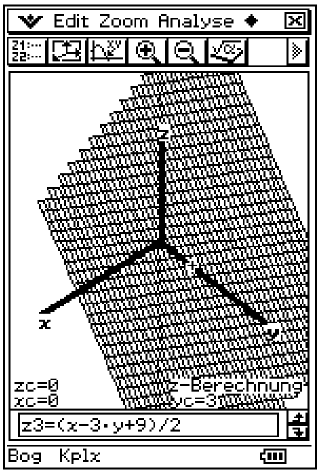


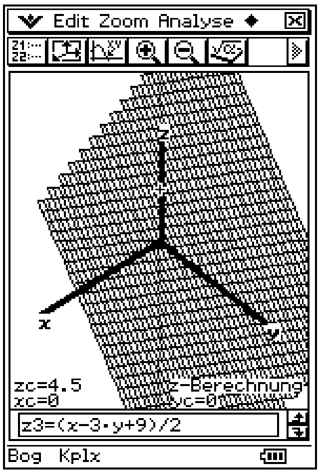




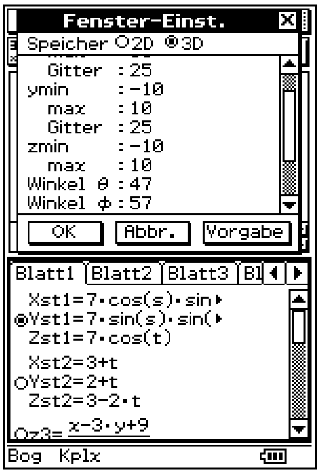
Darstellung der Achsenabschnitte (Fenstereinstellung: Intervalle symmetrisch um Null wählen!):

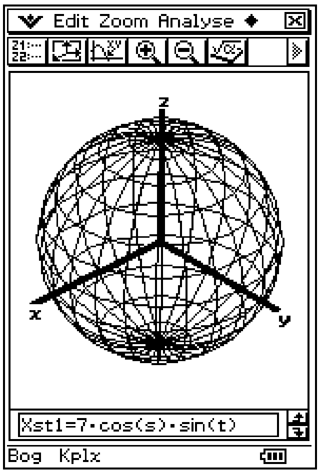


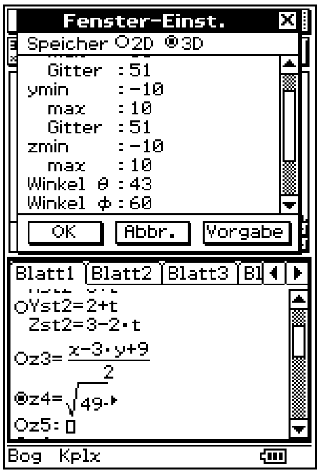


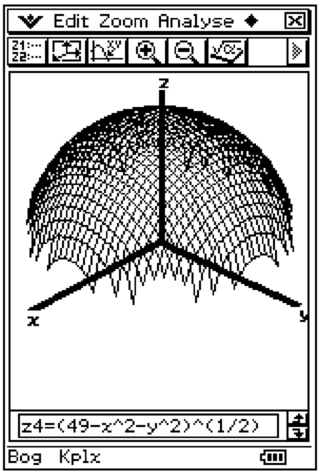


Weitere Bilder: Kugeldarstellungen mit unterschiedlichen Liniennetzen im ClassPad.







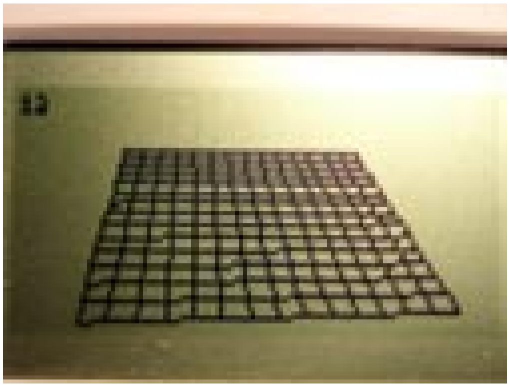
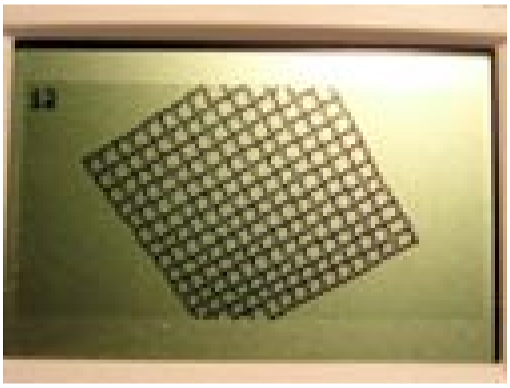


Beachten Sie die unterschiedlichen Liniennetze zur Visualisierung der Oberfläche! Die Formel $z4(x,y)=\sqrt{49-x^2-y^2}$ entspricht der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ \sqrt{49-s^2-t^2} \end{pmatrix}, s\in[-7,7], t\in\left[-\sqrt{49-s^2}, \sqrt{49-s^2}\right].$$

Abschließend betrachten wir noch einmal eine Ebene im 3D-GRAPH-Menü.

Die Darstellung der x-y-Ebene mit der Gleichung z=0x+0y+0=0 gelingt fehlerfrei:

Man erkennt deutlich in jeder Koordinatenrichtung 14+1 Gitterlinien (14 Zwischenräume).

Da die Ebene ohne Koordinatensystem gezeichnet wird, ist sie stellvertretend für jede Ebene eine gute Visualisierung. Die Ebene kann mit 3D-GRAPH in alle Richtungen gedreht werden.

The Mathematics Education into the 21st Century Project

together with

The University of Applied Sciences (FH), Dresden (Germany)

are proud to announce our

10th (Anniversary!) International Conference

“Models in Developing Mathematics Education”

September 11 – 17, 2009
Dresden, Saxony, Germany

in cooperation with

Saxony Ministry of Education

Chairmen
Dr. Alan Rogerson, International Coordinator of the Mathematics in Society Project (Poland).
Prof Dr Fayez Mina, Dept. of Curriculum & Instruction, Faculty of Education, Ain Shams University (Egypt).

You are invited to attend our project conference to be held in the historic and beauty-ful city of Dresden, Germany.
The chairman of the Local Organising Committee will be Prof. Dr. Ludwig Paditz of the Dresden University of Applied Sciences.
For ALL further conference details and updates please email arogerson@inetia.pl .

Hinweis für deutschsprachige Lehrer:
Parallel zum Konferenzprogramm ist ein Lehrerfortbildungsangebot in deutsch ge-plant (Teacher’s Day in German). Dafür können auch Tagungsbeiträge in Deutsch eingereicht werden.

Parallel-Programm am Wochenende in Deutsch (Lehrerfortbildungsangebot)

Gemeinsam mit Herrn Dr. Rainer Heinrich vom Sächsischen Staatsministerium für Kultus in Dresden wird ein spezielles Programm (in deutscher Sprache) vorbereitet, das **durch das Ministerium als Lehrerfortbildung anerkannt** wird.

Freitag, 11. September	
Registrierung der Konferenzteilnehmer im Mercure Hotel (Prager Strasse)	
18.00 – 21.30	**Empfang zur Begrüßung** im Mercure Hotel
Samstag, 12. September	**Alle Vorträge in der HTW Dresden (FH), Friedrich-List-Platz 1**
9.00 – 9.25	Begrüssung & Bekanntmachungen **Prof. Fayez Mina & Dr. Alan Rogerson** (Projekt-Koordinatoren) **Prof. Dr. Ludwig Paditz** (Vorsitzender des lokalen Organisationskomitees)
9.30 – 10.30	**Eröffnungsvortrag**
10.30 – 11.00	Vormittagspause mit Tee/Kaffee
11.00 – 13.00	**Offenes Forum zum Austausch von Ideen/Erfahrungen/Materialien** Dieses Forum stellt eine Wiederholung gleichartiger Veranstaltungen auf zurückliegenden Konferenzen dar, wo Materialien, Schulbücher, Taschenrechner und Software zum Mathematikunterricht ausgestellt wurden und alle Teilnehmer an den Ausstellungstischen im Foyer Gelegenheit hatten, sich die Exponate anzusehen und darüber vor Ort zu diskutieren. Es handelt sich also um eine Art „offener Bildungsmarkt“ mit einem breiten Angebot, wo die Konferenzteilnehmer frei umhergehen und sich alles ansehen und/oder dabei auch ihre eigenen Materialien präsentieren können. **Hierbei sollen nicht nur deutschsprachige Exponate/Materialien sondern auch englischsprachige (und polnischspachige und andere Sprachen, so hoffen wir es!) zur Geltung kommen.**
Bis zum Mittagessen handelt es sich hier um das gemeinsame Programm für alle Teilnehmer	
13.00 – 14.00	gemeinsames Mittagessen
14.00 – 16.00	**1. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch)**
15.30 – 16.00	Nachmittagspause mit Tee/Kaffee
16.00 – 18.00	**2. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch)**
19.00 – 21.30	**Empfang der Teilnehmer durch das Kultusministerium**
Sonntag, 13. September	**Alle Vorträge in der HTW Dresden (FH), Friedrich-List-Platz 1**
9.00 – 10.45	**Diskussionsveranstaltung über Innovationen im Mathematikunterricht in Deutschland**,
eine Diskussionsrunde mit praktisch tätigen Mathematiklehrern und Erfahrungsberichten, u.a. mit Rüdiger Vernay, Lehrer in Bremen, Schulbuchautor ("Mathe live"); Regina Puscher, Lehrerin und Fachleiterin in Bremen, Schulbuchautorin ("Mathe live"); Heinz Böer, Lehrer am Ricarda-Huch-Gymnasium in Gelsenkirchen; MUED in Appelhülsen; SINUS in Hessen 2007-2009; Eckhard Müller, Lehrer an der Georg-Christoph-Lichtenberg-Schule, Gymnasium in Kassel; Jan Mueller, Lehrer am Rivius-Gymnasium Attendorn, Comenius EU Projekt: Entwicklung der Qualität in der mathematischen Schulausbildung,	
11.00 – 11.30	Vormittagspause mit Tee/Kaffee
11.30 – 13.00	**3. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch) – einschließlich zweier unmittelbar an die Diskussionsveranstaltung anschließender Sitzungen in Deutsch bzw. in Englisch!**
13.00 – 14.00	gemeinsames Mittagessen
14.00 – 15.30	**4. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch)**
15.30 – 16.30	Nachmittagspause mit Tee/Kaffee **Verabschiedung zu den Arbeitsgruppen**

Einer der Vortragenden wird Herr Michael Katzenbach, ehemaliger Lehrer an der Heinrich-Böll-Schule, Hattersheim, sein, gegenwärtig tätig am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB), Berlin, sowie tätig für MUED.

Die Teilnehmer am deutschsprachigen Programm sind herzlich eingeladen zur Teilnahme am Ganztagesausflug am Montag (in die Sächsische Schweiz) und am Mittwoch zum Festlichen Abendessen (mit Tanz in der alten TU Mensa) (optional, Teilnahmekosten sind zu entrichten).