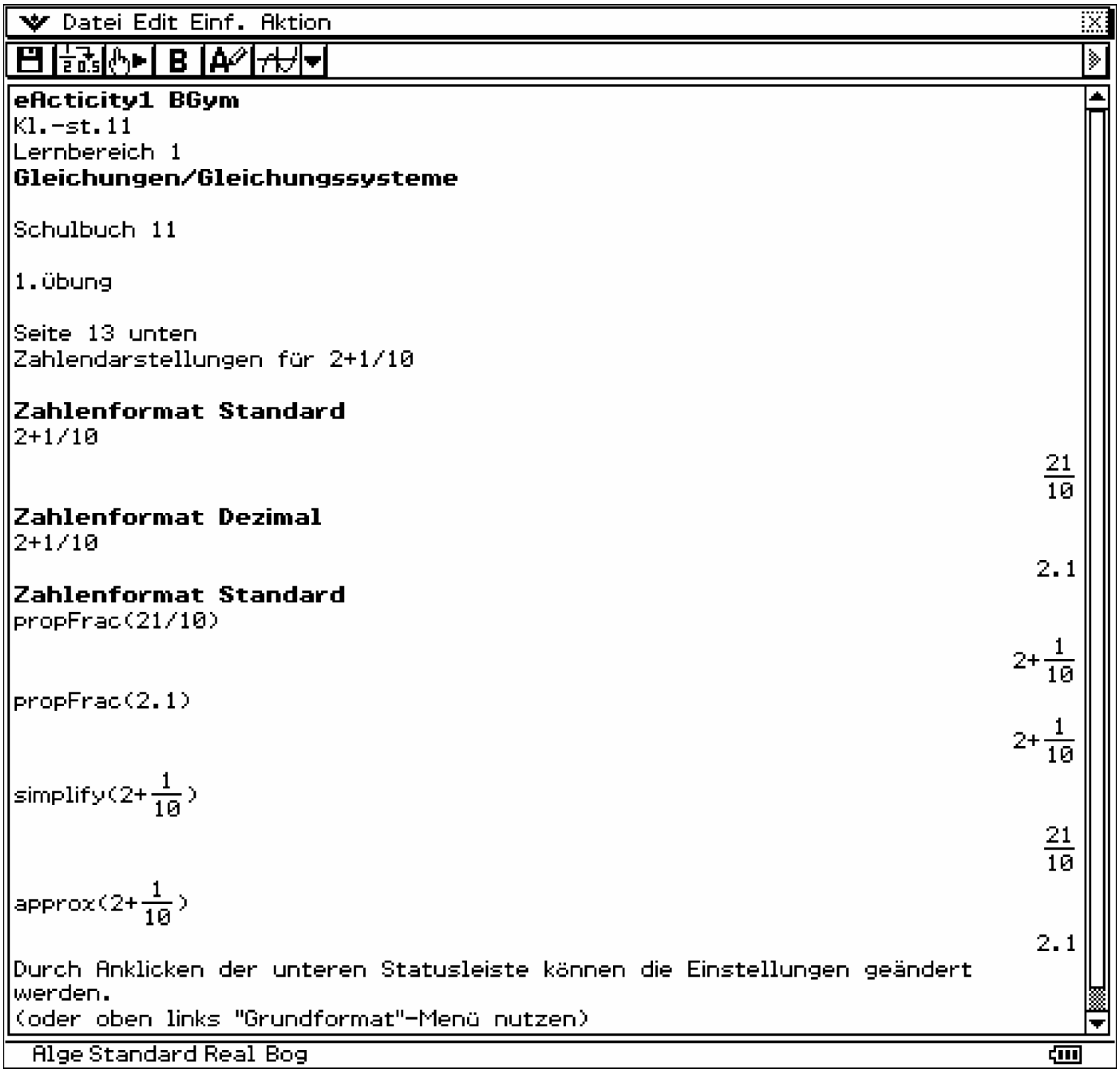
Arbeitsmaterial (Teil 1) zur Fortbildungsveranstaltung D01856

Einsatz des ClassPad 330 im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

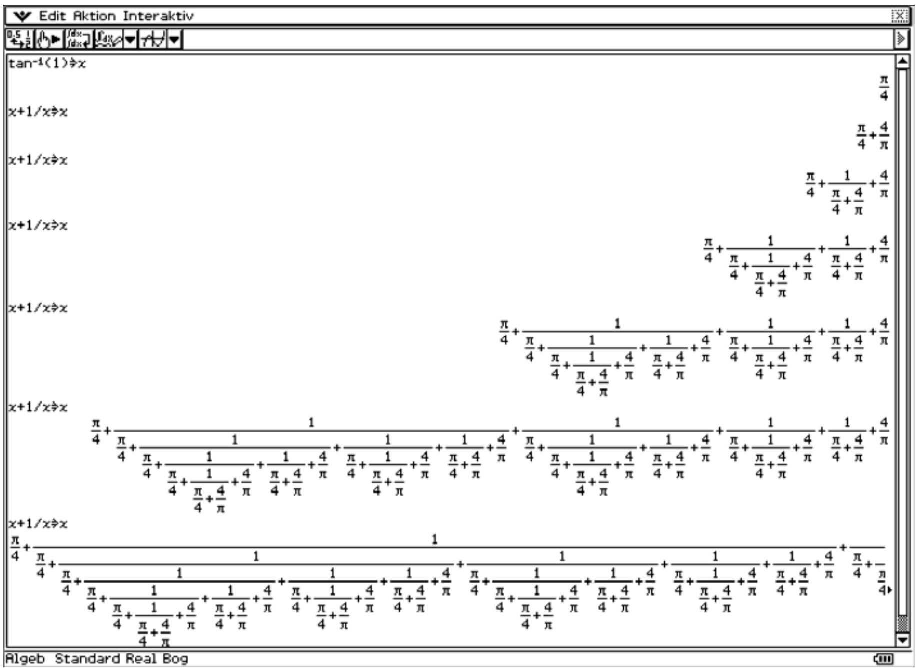
Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

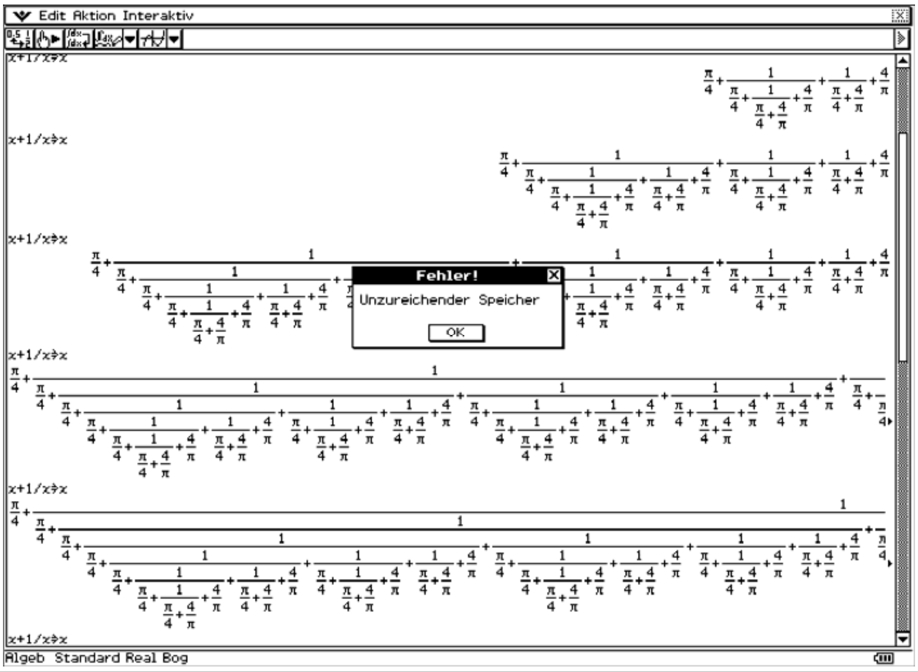


Das obige Screenshot ist im **eActivity-Menü** entstanden. Die Arbeitsblätter im eActivity-Menü gestatten sowohl Textverarbeitung und im Wechsel Verarbeitung von Rechenoperationen sowie das Einfügen von unterschiedlichen Fenstern, die über besondere Eingabezeilen geöffnet werden können.

Einzelheiten zur Bedienung und Syntax der Befehle findet man im Bedienhandbuch, vgl.
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/CPver3_E.pdf
(aktuelle engl. Version zum OS 3.02, 17MB, 934 Seiten)

Im Standardmodus werden die Zahlen exakt dargestellt und im Dezimalmodus als Gleitkommazahlen, wobei sich der CP330 die exakte Darstellung im Hintergrund „merkt" und bei späterem Wechsel in den Standardmodus wieder die exakte Darstellung aufzeigt.
Berechnung im **Main-Menü**:





So (im Standardmodus) kann es schnell zum Speicherüberlauf kommen!

Mit dem approx-Befehl wird die Vergangenheit der Zahlendarstellung ausgelöscht und es können ohne Speicherprobleme weit aus mehr Rechenschritte realisiert werden.

Lesen Sie hierzu auch im Schulbuch Jg.-st.12 (Nichttechn. Gymn.) S.363f nach!
(Direkter Hinweis auf den ClassPad mit Screenshots)

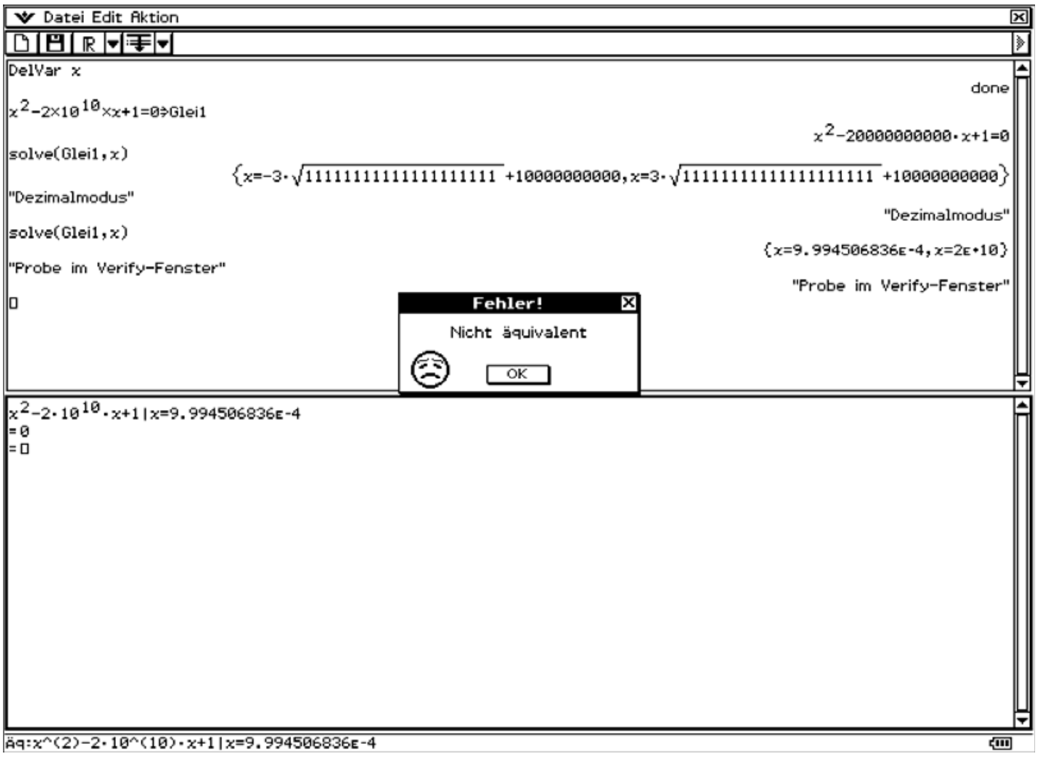
Die nichtexakte Zahlendarstellung bringt jedoch auch ungewollt numerische Probleme hervor, wie folgendes Beispiel zeigt (vgl. Schulbuch 11, S.44ff: **Quadratische Gleichungen**):

Die quadratische Gleichung $\mathbf{x^2 - 2*10^{10} * x + 1 = 0}$ kann jeder Schüler im Grunde per Hand lösen! Doch wie soll die Lösung notiert werden? Wird von der exakten Lösung abgewichen, funktioniert die Probe nicht mehr!

Die exakte Lösung lautet $x_{1,2} = 10^{10} \pm \sqrt{10^{20} - 1}$.
Ausgeschrieben ist das

$$x_{1,2} = 10.000.000.000 \pm \sqrt{99.999.999.999.999.999.999}$$
$$= 10.000.000.000 \pm 3 * \sqrt{11.111.111.111.111.111.111}$$

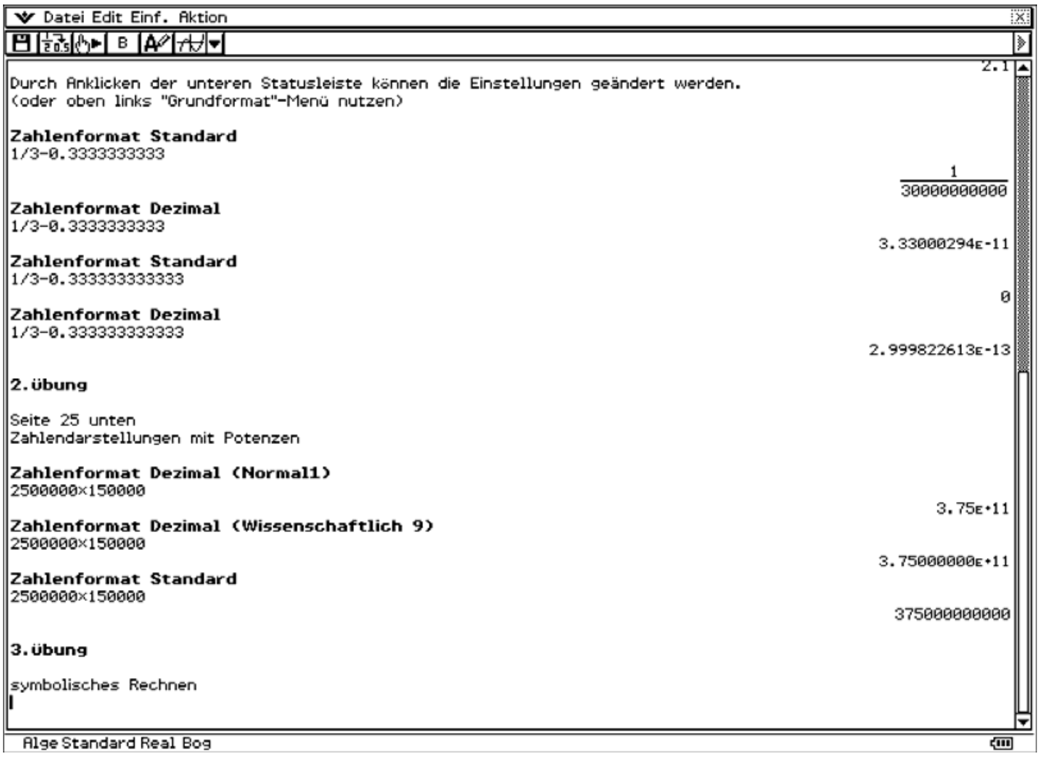
Werden diese irrationalen Zahlen als (gerundete) Gleitkommazahlen notiert, ist die quadratische Gleichung nicht mehr erfüllt!



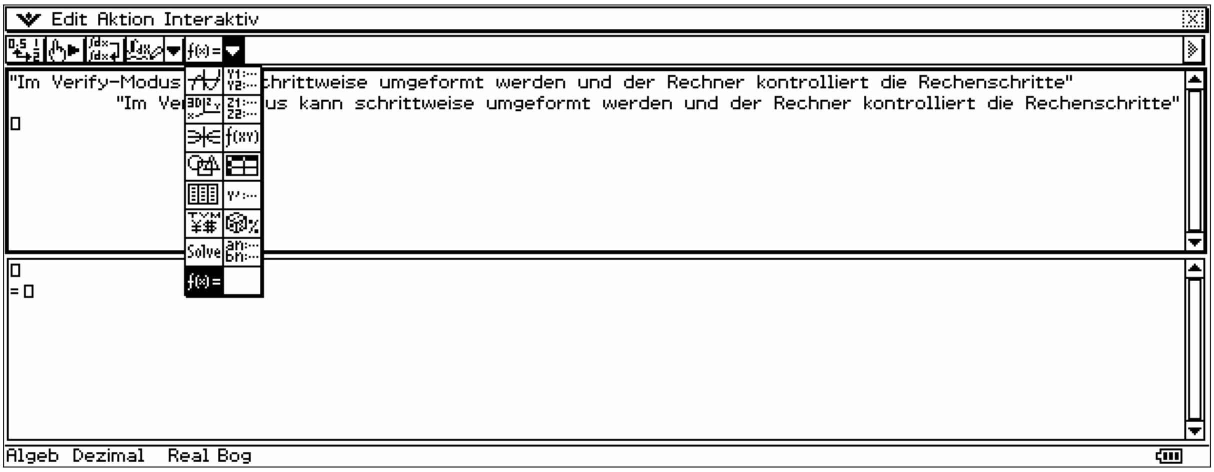
Hinweis:
Nutzen Sie zur Eingabe den **Bedienkomfort des virtuellen Keyboards** und das Kopieren auf dem Display mit dem Stift (Antippen und auf dem Display herüberziehen, Drag & Drop).

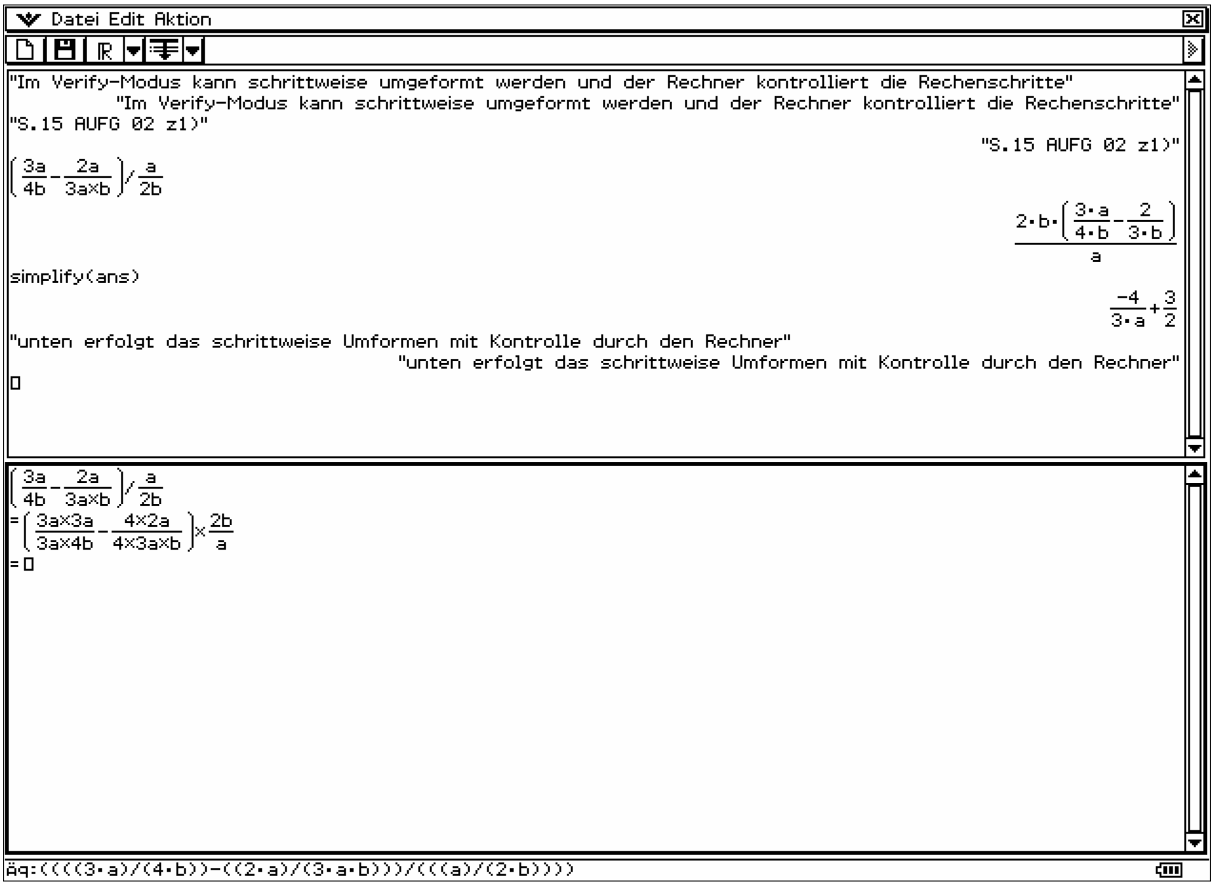
Rechnet man z.B. 1/3 – 0.3333333333 (10 Dezimalen) erhält man 3.33000294E-11. Damit hat der Rechner intern 3 Schutzstellen: Er rechnet mit 13 Ziffern und zeigt nur 10 an. Damit sollen Rundungseffekte abgefangen werden.

Probieren Sie es im Main-Menü aus und rechnen Sie
1/3 - 0.3333333333 (10 Dezimalen) bzw. 1/3 - 0.3333333333333 (13 Dezimalen).



Wir führen einige Übungen im Main-Menü aus und nutzen die **2D-Eingabemasken** des virtuellen Keyboards:





Im unteren Fenster werden die Umformungen schrittweise eingegeben. Das nächste Gleichheitszeichen erscheint erst, nachdem der Rechner die Kontrolle des bisher Umgeformten durchgeführt hat!

Der Schüler hat damit die Möglichkeit, die selbst vorgenommenen Rechenschritte vom Taschenrechner kontrollieren zu lassen. Im verify-Fenster können sowohl Formelterme (mit symbolischen Variablen) als auch numerische Terme (mit konkreten Zahlen) ausgewertet werden.

Datei Edit Aktion

"Im Verify-Modus kann schrittweise umgeformt werden und der Rechner kontrolliert die Rechenschritte"

"Im Verify-Modus kann schrittweise umgeformt werden und der Rechner kontrolliert die Rechenschritte"

"S.15 AUFG 02 z1)"

"S.15 AUFG 02 z1)"

$$\left(\frac{3a}{4b}-\frac{2a}{3a\times b}\right)/\frac{a}{2b}$$

$$\frac{2\cdot b\cdot\left(\frac{3\cdot a}{4\cdot b}-\frac{2}{3\cdot b}\right)}{a}$$

simplify(ans)

$$\frac{-4}{3\cdot a}+\frac{3}{2}$$

"unten erfolgt das schrittweise Umformen mit Kontrolle durch den Rechner"

"unten erfolgt das schrittweise Umformen mit Kontrolle durch den Rechner"

□

$$\frac{\frac{3\cdot a}{4\cdot b}-\frac{2\cdot a}{3\cdot a\cdot b}}{\frac{a}{2\cdot b}}$$

$$=\left(\frac{3\cdot a\cdot 3\cdot a}{3\cdot a\cdot 4\cdot b}-\frac{4\cdot 2\cdot a}{4\cdot 3\cdot a\cdot b}\right)\cdot\frac{2\cdot b}{a}$$

$$=\frac{3\cdot a\cdot 3\cdot a-4\cdot 2\cdot a}{3\cdot a\cdot 4}\cdot\frac{2}{a}$$

$$=\frac{(3\cdot 3\cdot a-4\cdot 2)\cdot a}{3\cdot a\cdot 4}\cdot\frac{2}{a}$$

$$=\frac{3\cdot 3\cdot a-4\cdot 2}{3\cdot a\cdot 2}\cdot\frac{1}{1}$$

$$=\frac{3\cdot 3\cdot a}{3\cdot a\cdot 2}-\frac{4\cdot 2}{3\cdot a\cdot 2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{4}{3\cdot a}$$

= □

Äq:((((3·a)/(4·b))-((2·a)/(3·a·b)))/(((a)/(2·b))))

Datei Edit Aktion

"Im Verify-Modus kann schrittweise umgeformt werden und der Rechner kontrolliert die Rechenschritte"

"Im Verify-Modus kann schrittweise umgeformt werden und der Rechner kontrolliert die Rechenschritte"

"S.29 AUFG 04 e)"

"S.15 AUFG 02 z1)"

$$\left(\frac{9\times 10^3+70\times 10^2-0.01\times 10^5}{3\times 100^2+(-10)^2-10^{-3}\times 10^5}\right)^{-1}$$

2

"unten erfolgt das schrittweise Umformen mit Kontrolle durch den Rechner"

"unten erfolgt das schrittweise Umformen mit Kontrolle durch den Rechner"

□

$(3\cdot 100^2+(-10)^2-10^{-3}\cdot 10^5)$

$$=\frac{3\cdot 100^2+(-10)^2-10^{-3}\cdot 10^5}{9\cdot 10^3+70\cdot 10^2-0.01\cdot 10^5}$$

$$=\frac{3\cdot\left(10^2\right)^2+(-1)^2\cdot 10^2-10^{-3+5}}{9\cdot 10^3+7\cdot 10^1\cdot 10^2-10^{-2}\cdot 10^5}$$

$$=\frac{3\cdot 10^{2\cdot 2}+1\cdot 10^2-10^2}{9\cdot 10^3+7\cdot 10^{1+2}-10^{-2+5}}$$

$$=\frac{3\cdot 10^2+1-1}{9\cdot 1+7\cdot 1-1}\cdot\frac{10^2}{10^3}$$

$$=\frac{300}{15}\cdot\frac{10^2}{10^3}$$

$$=\frac{30}{15}$$

= 2

Äq:(((9·10^(3)+70·10^(2)-0.01·10^(5))/(3·100^(2)+(-10)^(2)-10^(-3)·10^(5)))^(-1)

4. Übung (Bemerkungen zum Wurzelziehen, **Kl.-St.11, S.33, Aufg. 02**):

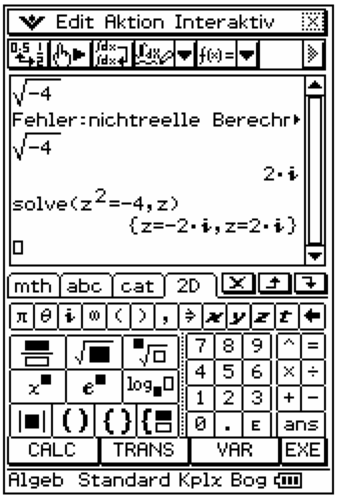
Im Bereich der komplexen Zahlen sind Wurzeln mehrdeutig. Man unterscheidet zwischen der Hauptwurzel und den Nebenwurzeln.

$\sqrt{-4}$ ist nach Def. 1.6 (Kl.-St.11, S.32) in $\mathbb{R}$ nicht definiert.

$\sqrt{-4}$ ist nach Def. 12.11 (Kl.-St.11, S.323) in $\mathbb{C}$ definiert.

Es gilt: $\sqrt{-4} = 2i$ (Hauptwurzel), $\sqrt{-4} = -2i$ (Nebenwurzel)

Der GTR zeigt stets die Hauptwurzel an.



Mit **solve** werden alle Wurzeln angezeigt.

Kl.-St.11, S.33, Aufg. 02:

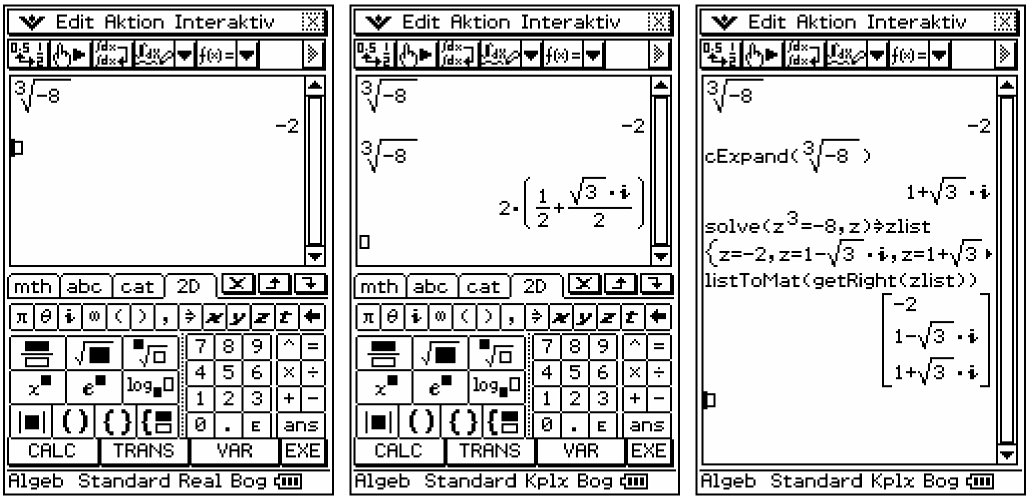
$\sqrt[3]{-8}$ ist nach Def. 1.6 (Kl.-St.11, S.32) in $\mathbb{R}$ nicht definiert.

$\sqrt[3]{-8}$ ist nach Def. 12.11 (Kl.-St.11, S.323) in $\mathbb{C}$ definiert.

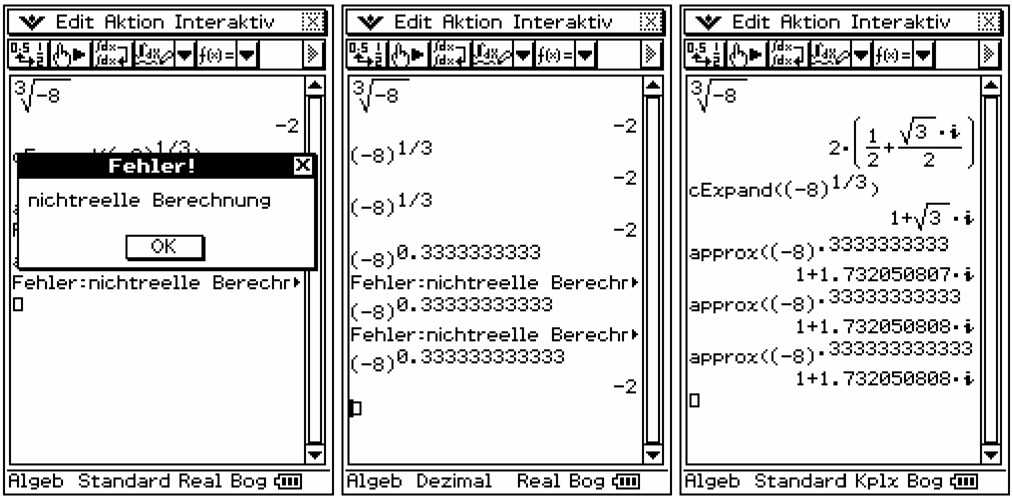
Es gilt:

$\sqrt[3]{-8} = 1 + \sqrt{3} \times i$ (Hauptwurzel), $\sqrt[3]{-8} = -2$ (1.Nebenwurzel), $\sqrt[3]{-8} = 1 - \sqrt{3} \times i$ (2.Nebenwurzel)

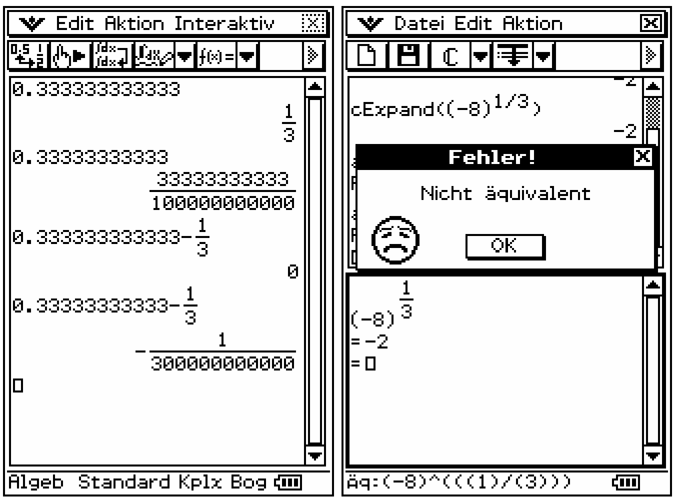
Da die 1.Nebenwurzel in $\mathbb{C}$ keinen Imaginärteil besitzt, wird oftmals unkorrekter Weise die 1. Nebenwurzel als scheinbar reelle Zahl angesehen und in $\mathbb{R}$ als Wurzel gedeutet!



Der Taschenrechner zeigt im Real-Modus die 1.Nebenwurzel von $\sqrt[3]{-8}$ an, was unkorrekt ist! Wenn es in $\mathbb{R}$ die dritte Wurzel $\sqrt[3]{-8}$ geben würde, dann müssten hier benachbarte Zahlenwerte auch benachbarte Ergebnisse liefern: $(-8)^{0{,}3333333333}$, da rein numerisch gesehen die Zahlen $\sqrt[3]{-8}$ und $(-8)^{0{,}3333333333}$ näherungsweise das Gleiche bedeuten. Erst hier macht der Taschenrechner deutlich, dass $(-8)^{0{,}3333333333}$ nicht reell ist:



Die Zahlen 0.333333333333 und 1/3 kann der Taschenrechner nicht unterscheiden!

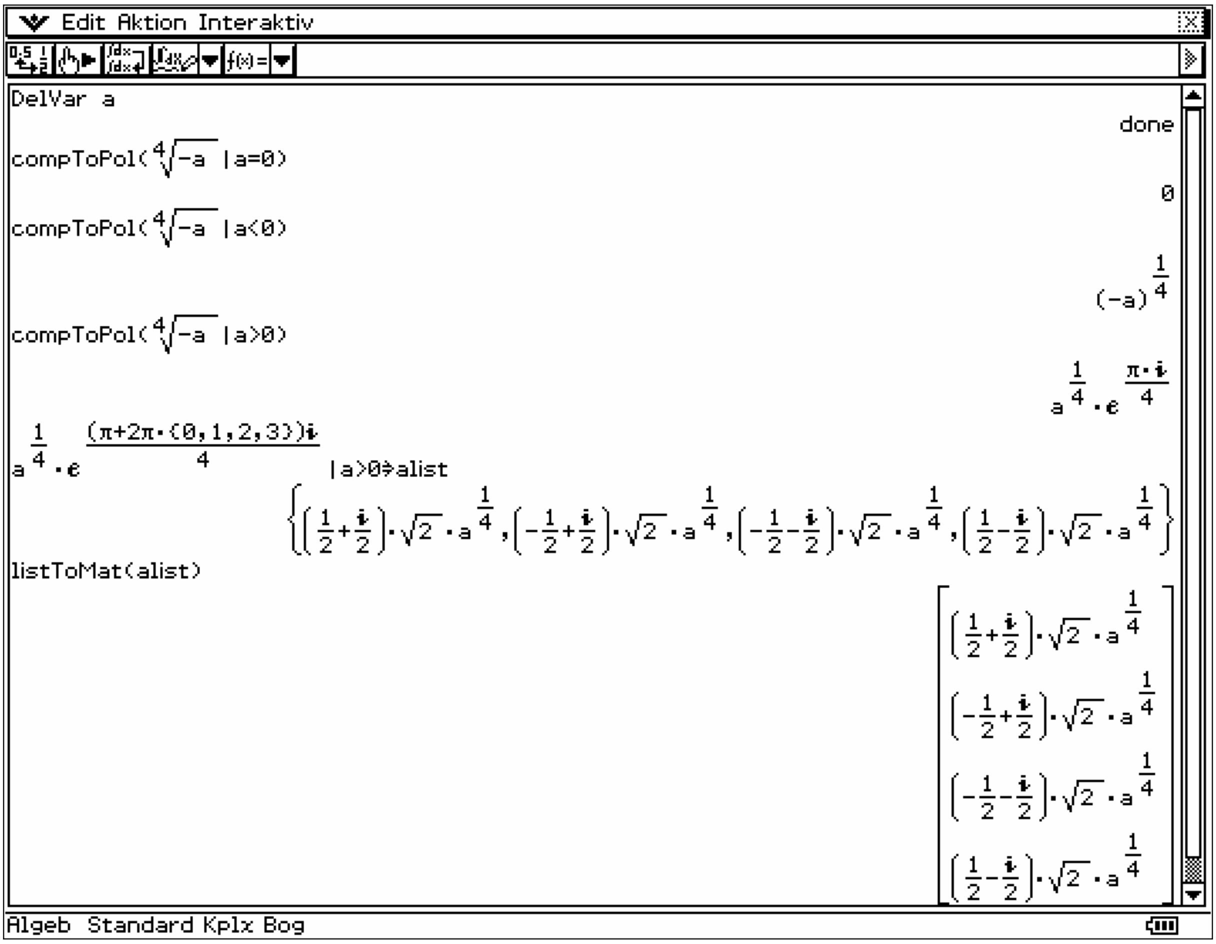


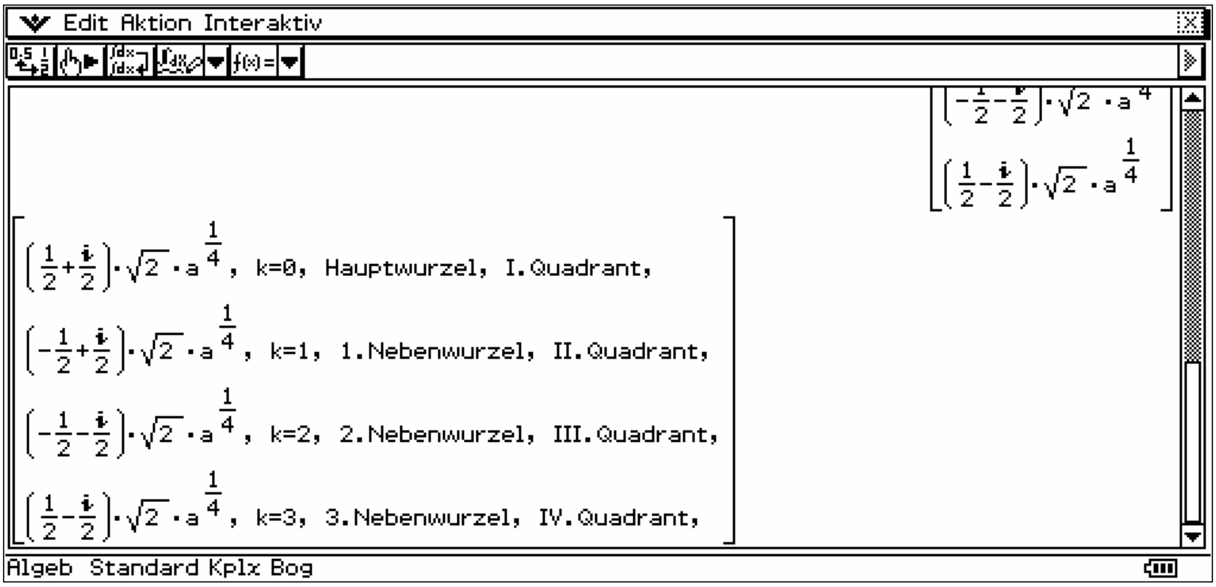
Im verify-Fenster wird in $\mathbb{C}$ die Zahl -2 als falsch erkannt, da sie nicht die Hauptwurzel ist!
Es bleibt also dabei: die Wurzeln $\sqrt{-4}$, $\sqrt[3]{-8}$ und $\sqrt[4]{-81}$ sind in $\mathbb{R}$ nicht definierte Zahlen!
(Selbst wenn der Taschenrechner im Real-Modus eine komplexe Nebenwurzel als reellen Zahlenwert anzeigen sollte. Wurzelwerte auf der negativen reellen Achse sind in $\mathbb{C}$ stets Nebenwurzeln! Hauptwurzeln liegen in $\mathbb{C}$ stets auf der positiven reellen Achse bzw. im I. oder IV. Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene.)

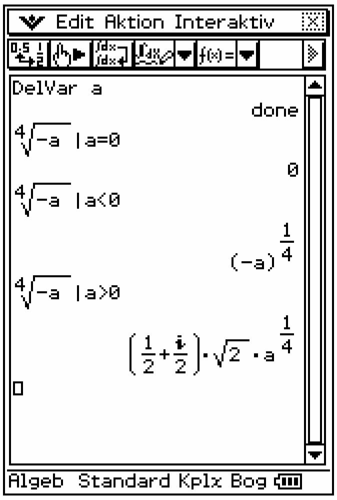
Weiter:
Die Zahlenterme $\sqrt[4]{-a}$ und $\sqrt[5]{-a}$ sind in $\mathbb{R}$ nur dann definiert, wenn der Radikand –a nichtnegativ ist.

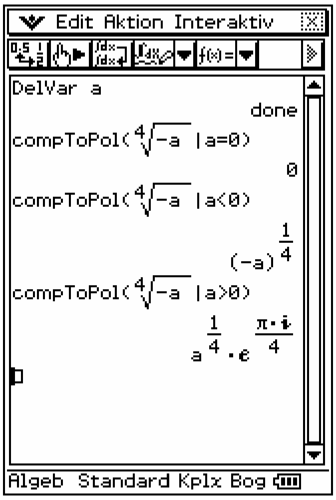
In $\mathbb{C}$ lautet die Lösung für $\sqrt[4]{-a}$ (mit Haupt- und Nebenwurzeln):

$\sqrt[4]{-a} = 0$ für a=0 (Wurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier keine Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).
$\sqrt[4]{-a} = |a|^{1/4}$ für a<0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).
$\sqrt[4]{-a} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ i\right) \times a^{1/4}$ für a>0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln)).









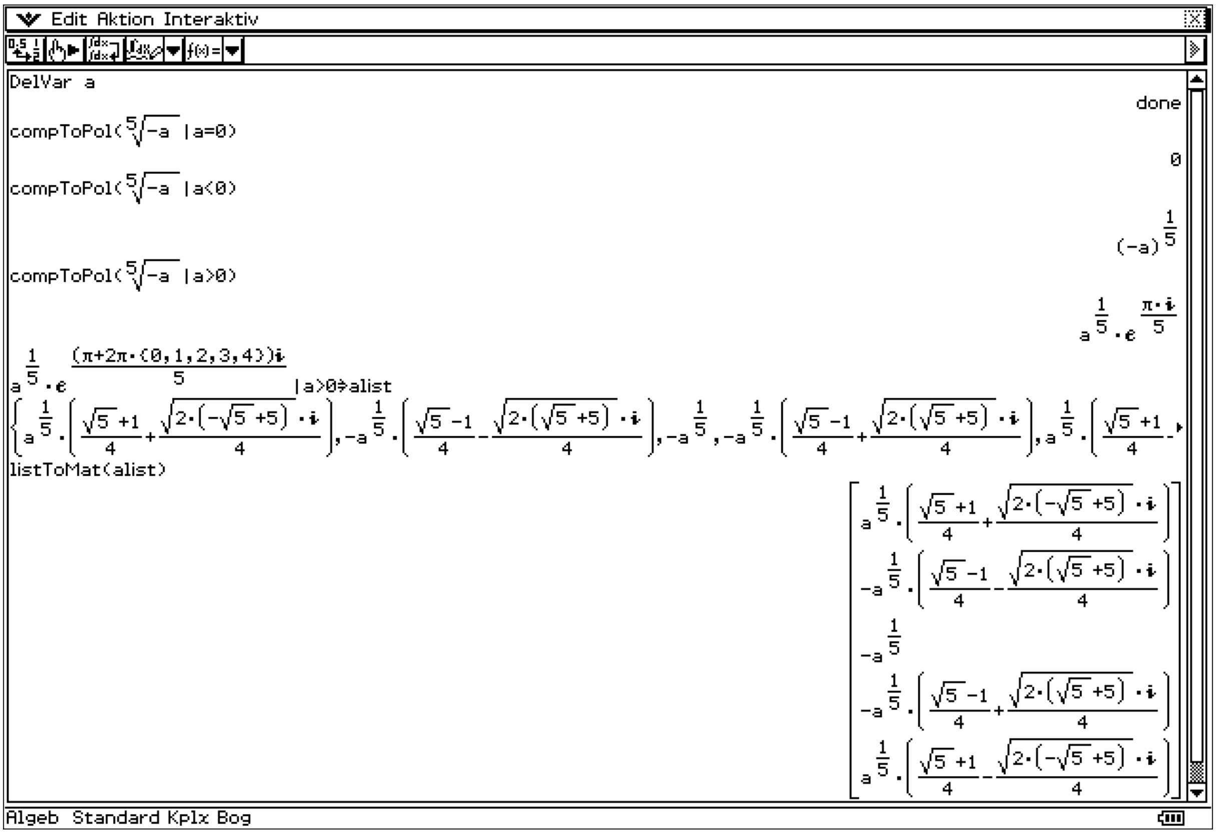
Anzeige der (Haupt-)Wurzeln in $\mathbb{C}$.

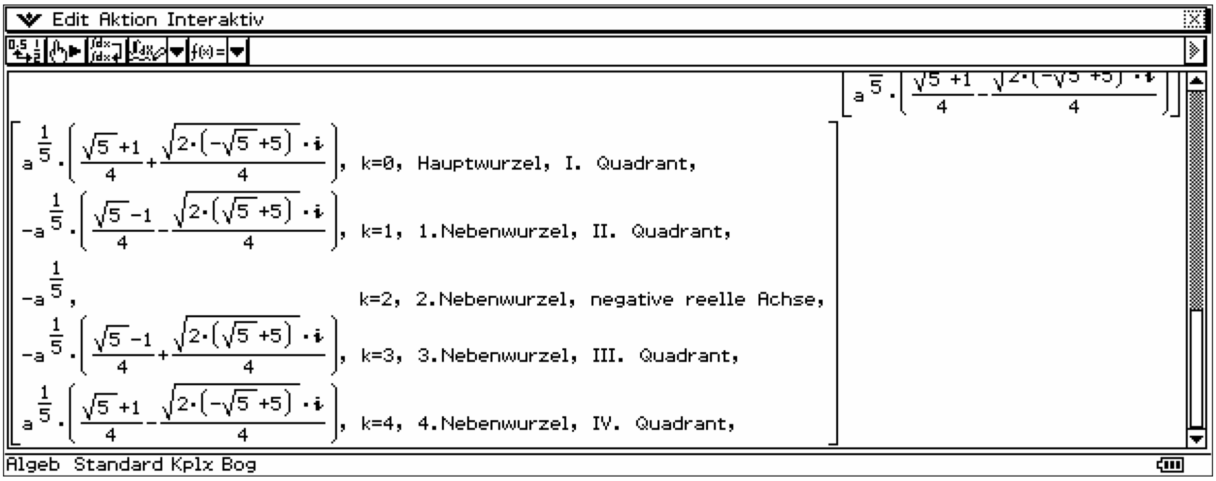
In $\mathbb{C}$ lautet die Lösung für $\sqrt[5]{-a}$ (mit Haupt- und Nebenwurzeln):

$\sqrt[5]{-a} = 0$ für a=0 (Wurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier keine Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).

$\sqrt[5]{-a} = |a|^{1/5}$ für a<0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln) und Wurzel in $\mathbb{R}$).

$\sqrt[5]{-a} = e^{\pi i/5} \times a^{1/5}$ für a>0 (Hauptwurzel in $\mathbb{C}$ (es gibt hier auch Nebenwurzeln)).





Druckfehlerhinweise:

Kl.-St. 11, S. 312 (Definition 12.3)
Formulierung nicht ganz korrekt: *... und einer imaginären Zahl, dem Imaginärteil Im(z).*
Im(z) ist eine reelle Zahl und keine imaginäre Zahl, weshalb dann i als Faktor hinzukommt.
Vorschlag: statt dem Komma das Wort *mit* schreiben:
... und einer imaginären Zahl mit dem Imaginärteil Im(z).
(Ich frage in Prüfungen stets nach dem Imaginärteil, also nach der reellen Zahl Im(z) und erhalte oft die Antwort Im(z)*i . Die Definition 12.3 sollte also klarer gefasst werden.)

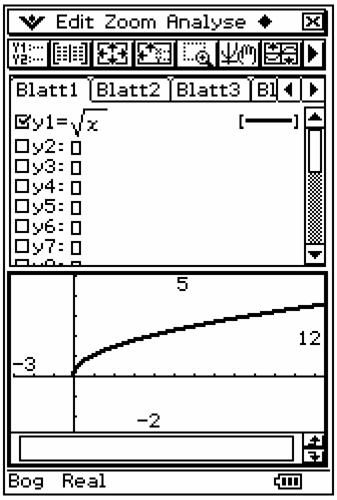
S. 324 (letzte Zeile im 1. Beispiel):
Die Lösung für k=0 wird als **Hauptwert** bezeichnet, *sofern für das Argument φ das Hauptargument im Bereich $-180° < \varphi \leq 180°$ benutzt wird.* (Dieser Zusatz sollte angefügt werden.)

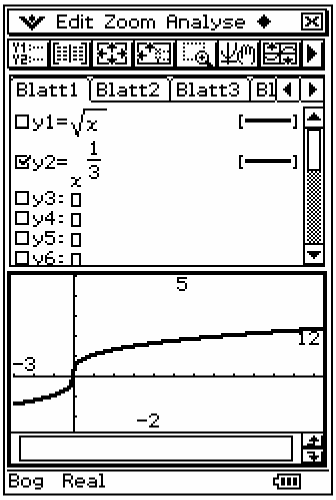
(Benutzt der Schüler als Argument insbesondere Winkel mit 180° < φ ≤ 360°, dann erhält er für k=0 nicht die Hauptwurzel sondern bereits die erste Nebenwurzel. Jeder GTR/CAS ist mit dem Hauptargument im Bereich -180° < φ ≤ 180° ausgelegt. Entspricht DIN-Empfehlung.)

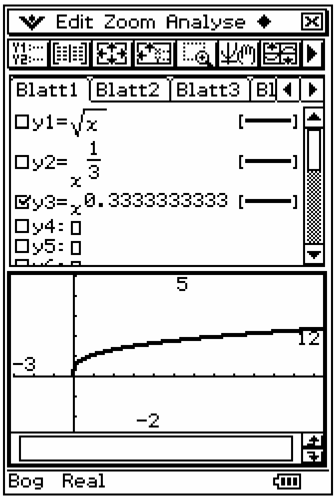
Anmerkung:
S. 322u. (Formen der Darstellung)
Die kartesische Form z=a+b*i wird oft auch (in der Algebraausbildung für Informatiker) in der **Zahlenpaarnotation** eingeführt: **z = (a/b)**, womit dann sogar auf das Symbol i verzichtet werden kann, wie es z.B. im TI-86 der Fall ist. (Ein TI-Kenner wird das wissen, dass der TI-86 die Zahlenpaararithmetik im Sinne der komplexen Zahlen beherrscht.) Vgl. auch Screenshot S.317Mitte.
Wenn in der Polarform schon auch auf die **Versornotation** hingewiesen wird, sollte auch bei der kartesischen Form die Zahlenpaarnotation als zweite Schreibweise genannt werden.

Weiter:
graphische Darstellung von Wurzelfunktionen:

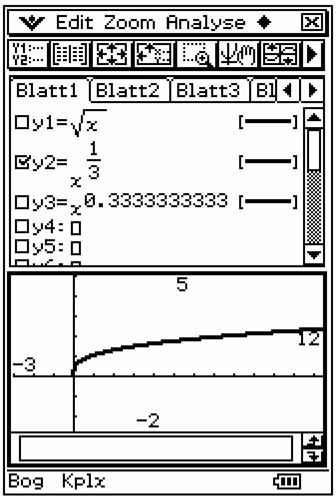
Wegen der Definition 1.6 (S. 32) ergeben sich folgende graphische Darstellungen für die (Haupt-)Äste der Wurzelfunktionen:







Das Schaubild im mittleren Screenshot ist unkorrekt, da y2 und y3 die gleichen Schaubilder ergeben sollten! Für negative x gibt es keine Wurzelfunktion in $\mathbb{R}$!



Im Kplx-Modus werden nur die (reellen) Hauptwurzeln auf der positiven y-Achse beachtet – aber nicht die reellen Nebenwurzeln auf der negativen y-Achse!

Tipp:
Schaubilder für Wurzelfunktionen sollten im Kplx-Modus ausgeführt werden.

5. Übung: Äquivalenzumformungen mit Gleichungen

Datei Edit Einf. Aktion

5.übung

Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

AUFGABE 01 w) (S. 21 Kl.-St. 11)

$$\frac{3x}{(x+1)(x-3)}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-3}$$

Definitionsmenge: $x\in\mathbb{R}$ und $x\neq-1$ und $x\neq3$, d.h. $D=(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;\infty)=\,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;3[\,\cup\,]3;\infty[$

Umformungen:

$$\left(\frac{3x}{(x+1)(x-3)}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-3}\right)\times(x+1)(x-3)$$

$$(x+1)\cdot(x-3)\cdot\left(\frac{3\cdot x}{(x+1)\cdot(x-3)}+\frac{1}{x+1}\right)=2\cdot(x+1)$$

$3x+(x-3)=2\cdot(x+1)$

$$4\cdot x-3=2\cdot(x+1)$$

$(4\cdot x-3=2\cdot(x+1))-2x+3$

$$2\cdot x=2\cdot(x+1)-2\cdot x+3$$

simplify(ans)

$$2\cdot x=5$$

$(2\cdot x=5)/2$

$$x=\frac{5}{2}$$

Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

$\text{solve}\left(\frac{3x}{(x+1)(x-3)}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-3},x\right)$

$$\left\{x=\frac{5}{2}\right\}$$

Alge Standard Real Bog

Textverarbeitung und Rechnen im eActivity-Menü

6. Übung: Äquivalenzumformungen mit Ungleichungen

Datei Edit Einf. Aktion

6.übung

Äquivalenzumformungen mit Ungleichungen

AUFGABE 01 v) (S. 25 Kl.-St. 11)

$$\frac{3x-4}{2x+3}-5\geq\frac{10-14x}{4x-4}$$

Definitionsmenge: $x\in\mathbb{R}$ und $x\neq-\frac{3}{2}$ und $x\neq1$, d.h. $D=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};1\right)\cup(1;\infty)=\,]-\infty;-\frac{3}{2}[\,\cup\,]-\frac{3}{2};1[\,\cup\,]1;\infty[$

Umformungen

$$\left(\frac{3x-4}{2x+3}-5\geq\frac{10-14x}{4x-4}\right)-\frac{10-14x}{4x-4}$$

$$\frac{14\cdot x-10}{4\cdot x-4}+\frac{3\cdot x-4}{2\cdot x+3}-5\geq0$$

Zusammenfassen:

$\text{combine}\left(\frac{3x-4}{2x+3}-5-\frac{10-14x}{4x-4}\geq0\right)$

$$\frac{-(13\cdot x-23)}{(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)}\geq0$$

Durchmultiplizieren (Fallunterscheidung beachten)

$$\left(\frac{-(13\cdot x-23)}{(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)}\geq0\right)\times(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)$$

Alge Standard Real Bog

Multiplikation (Division) mit negativen Größen ändert das Ungleichheitszeichen!

Datei Edit Einf. Aktion

Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq -\frac{3}{2}$ und $x \neq 1$, d.h. $D = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; 1\right) \cup (1; \infty) = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; 1\right[\cup \left]1; \infty\right[$

Umformungen

$\left(\frac{3x-4}{2x+3} - 5 \geq \frac{10-14x}{4x-4}\right) - \frac{10-14x}{4x-4}$ $\qquad \frac{14\cdot x-10}{4\cdot x-4} + \frac{3\cdot x-4}{2\cdot x+3} - 5 \geq 0$

Fehler!
Wertebereich
OK

Zusammenfassen:
combine$\left(\frac{3x-4}{2x+3} - 5 - \frac{10-14x}{4x-4} \geq 0\right)$ $\qquad \frac{-(13\cdot x-23)}{(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)} \geq 0$

Durchmultiplizieren (Fallunterscheidung beachten, siehe Fehlermeldung)
$\left(\frac{-(13\cdot x-23)}{(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)} \geq 0\right) \times (2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)$

Alge Standard Real Bog

Datei Edit Einf. Aktion

1. Fall $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$, d.h. $(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2) > 0$ (**zwei** negative Faktoren), ergibt
$\frac{-(13\cdot x-23)}{1} \geq 0$ $\qquad -13\cdot x+23 \geq 0$

$(-13\cdot x+23 \geq 0)-23$ $\qquad -13\cdot x \geq -23$

$(-13\cdot x \geq -23)/-13$ $\qquad x \leq \frac{23}{13}$

Lösungsmenge im 1.Intervall mit $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ und $x \leq \frac{23}{13}$ ergibt **L1**$= \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$

2. Fall $x \in \left]-\frac{3}{2}; 1\right[$, d.h. $(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2) < 0$ (**ein** negativer Faktor), ergibt
$\frac{-(13\cdot x-23)}{1} \leq 0$ $\qquad -13\cdot x+23 \leq 0$

$(-13\cdot x+23 \leq 0)-23$ $\qquad -13\cdot x \leq -23$

$(-13\cdot x \leq -23)/-13$ $\qquad x \geq \frac{23}{13}$

Lösungsmenge im 2.Intervall mit $x \in \left]-\frac{3}{2}; 1\right[$ und $x \geq \frac{23}{13}$ ergibt **L2**$=\{\}$ (leere Menge)

Alge Standard Real Bog

Edit Zoom Analyse ◆

3. Fall $x \in]1; \infty[$, d.h. $(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2) > 0$ (**kein** negativer Faktor), ergibt

$\frac{-(13\cdot x-23)}{1} \geq 0$ $\qquad -13\cdot x+23 \geq 0$

$(-13\cdot x+23 \geq 0)-23$ $\qquad -13\cdot x \geq -23$

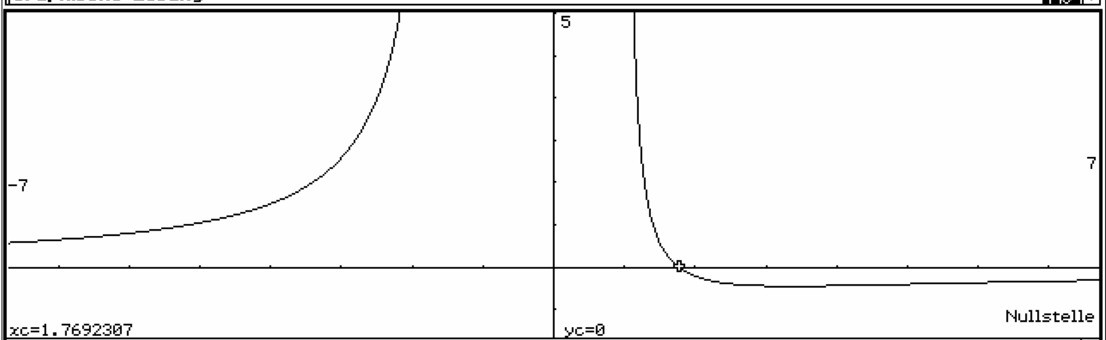
$(-13\cdot x \geq -23)/-13$ $\qquad x \leq \frac{23}{13}$

Lösungsmenge im 3.Intervall mit $x \in]1; \infty[$ und $x \leq \frac{23}{13}$ ergibt **L3**$= \left]1; \frac{23}{13}\right]$

Gesamtlösung L=L1∪L2∪L3 $= \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]1; \frac{23}{13}\right]$

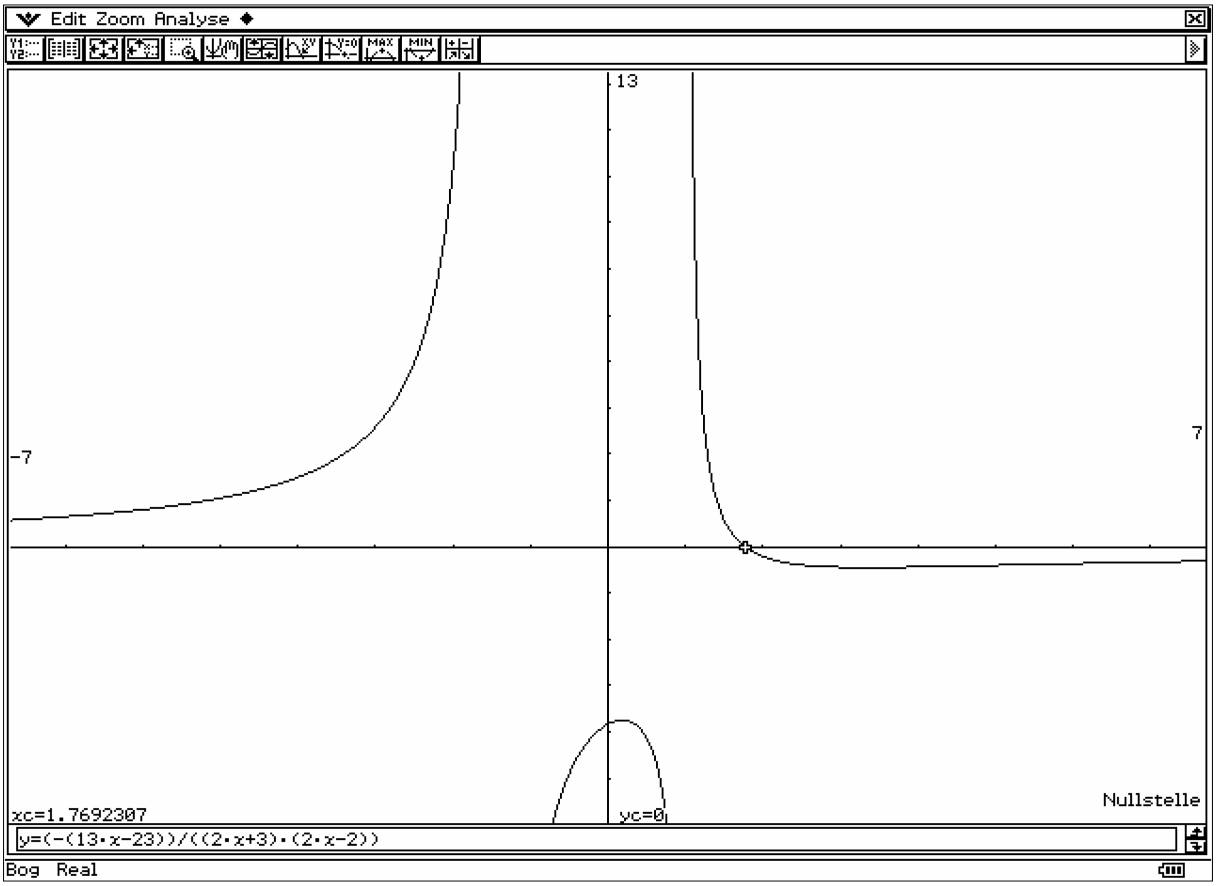
Graphische Lösung mit $y(x) = \frac{-(13\cdot x-23)}{(2\cdot x+3)\cdot(2\cdot x-2)} \geq 0$ untersuchen (23/13=1.769230769)

Graphische Lösung



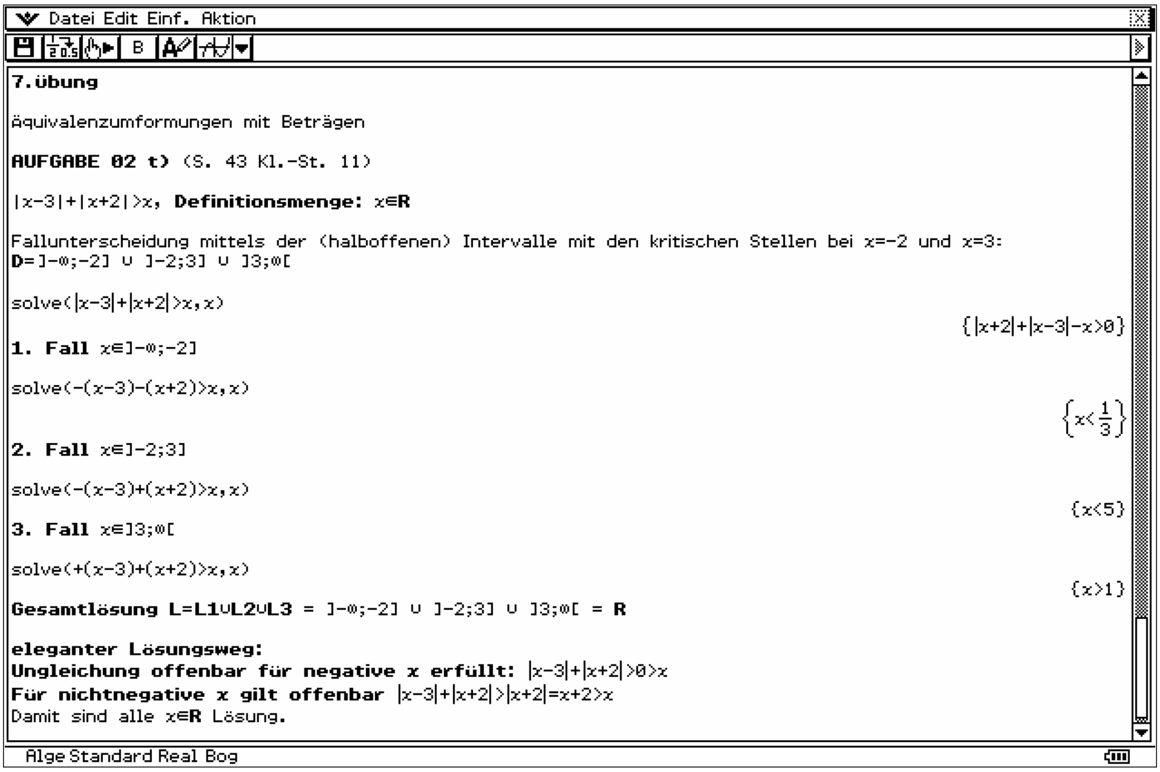
y=(-(13·x-23))/((2·x+3)·(2·x-2))

Bog Real



Das Schaubild mit den drei Kurvenästen bestätigt schließlich die Lösung!

7. Übung: Äquivalenzumformungen mit Beträgen
(Fallunterscheidung zur Betragsauflösung oder graphische Lösung, eActivity-Menü)



Datei Edit Einf. Aktion

7.übung

Äquivalenzumformungen mit Beträgen

AUFGABE 02 t) (S. 43 Kl.-St. 11)

$|x-3|+|x+2|>x$, **Definitionsmenge:** $x\in\mathbb{R}$

Fallunterscheidung mittels der (halboffenen) Intervalle mit den kritischen Stellen bei x=-2 und x=3:
D= $]-\infty;-2] \cup]-2;3] \cup]3;\infty[$

solve($|x-3|+|x+2|>x$,x)

$\{|x+2|+|x-3|-x>0\}$

1. Fall $x\in]-\infty;-2]$

solve(-(x-3)-(x+2)>x,x)

$\left\{x<\frac{1}{3}\right\}$

2. Fall $x\in]-2;3]$

solve(-(x-3)+(x+2)>x,x)

$\{x<5\}$

3. Fall $x\in]3;\infty[$

solve(+(x-3)+(x+2)>x,x)

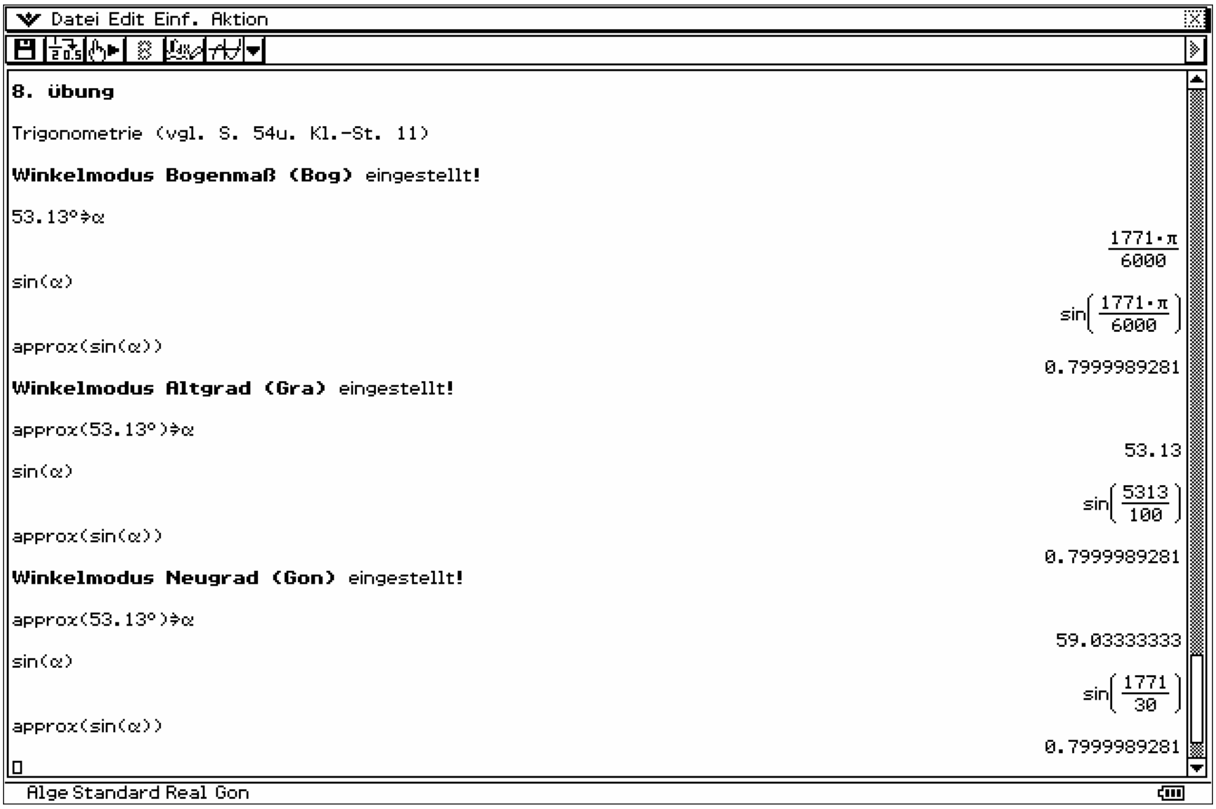
$\{x>1\}$

Gesamtlösung L=L1∪L2∪L3 = $]-\infty;-2] \cup]-2;3] \cup]3;\infty[= \mathbb{R}$

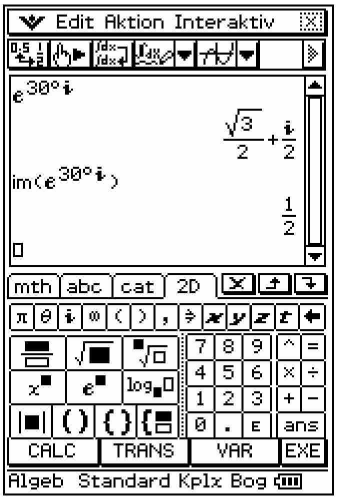
eleganter Lösungsweg:
Ungleichung offenbar für negative x erfüllt: $|x-3|+|x+2|>0>x$
Für nichtnegative x gilt offenbar $|x-3|+|x+2|>|x+2|=x+2>x$
Damit sind alle $x\in\mathbb{R}$ Lösung.

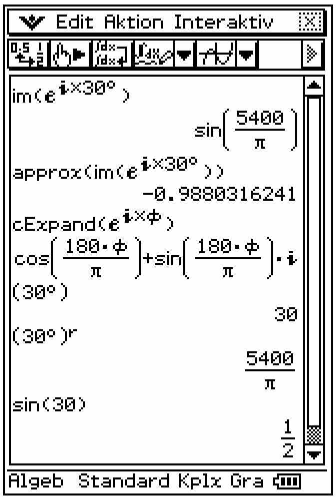
Alge Standard Real Bog

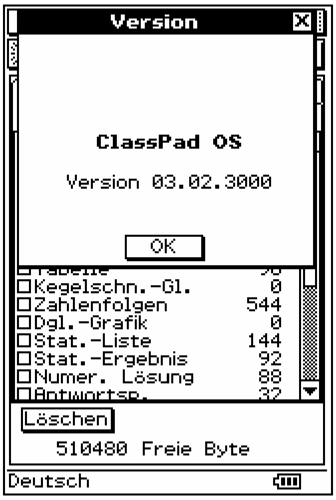
8. Übung: Trigonometrie



Rechnen mit komplexen Zahlen im Bogenmaßmodus bzw. Altgradmodus bei Altgradeingabe:

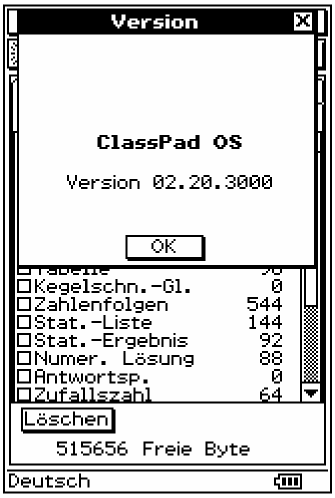


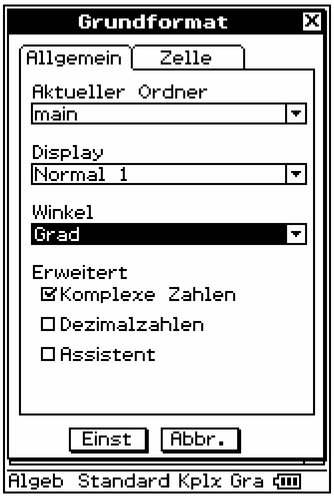


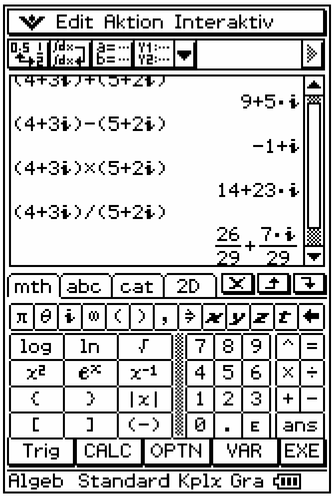


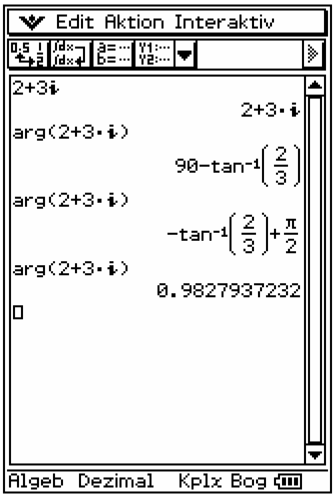
Offenbar wird im Altgradmodus die komplexe e-Funktion falsch ausgewertet?

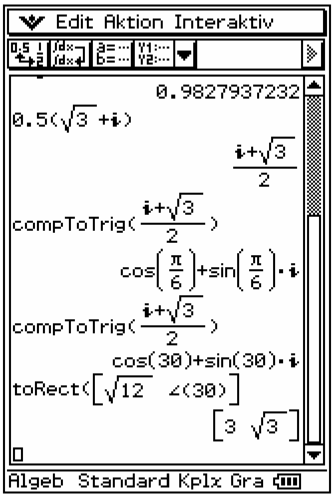
Hinweis:
die Screenshots im Buch Kl.-St. 11 (S. 312ff) beruhen noch auf dem OS 2.20

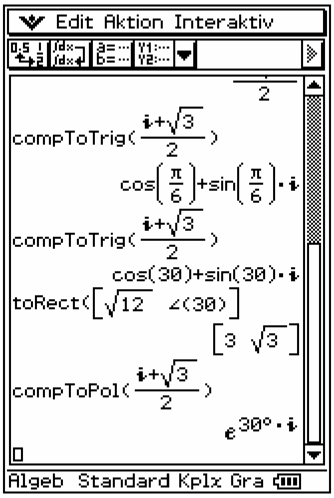




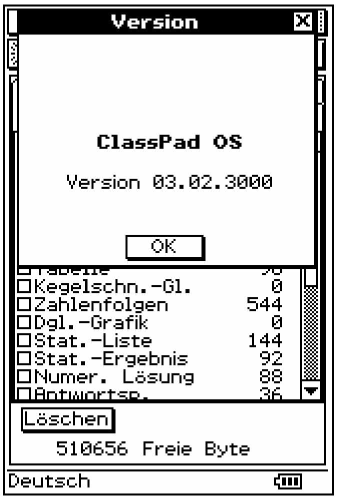


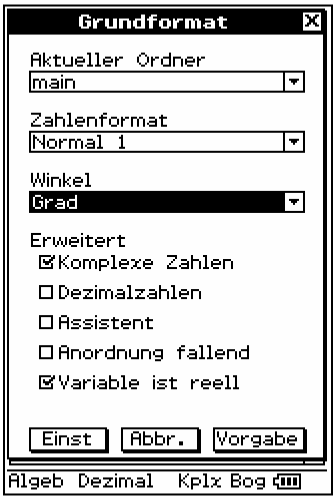


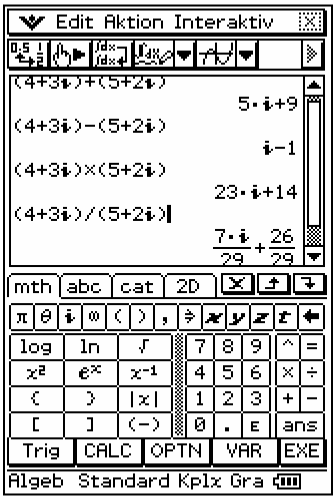


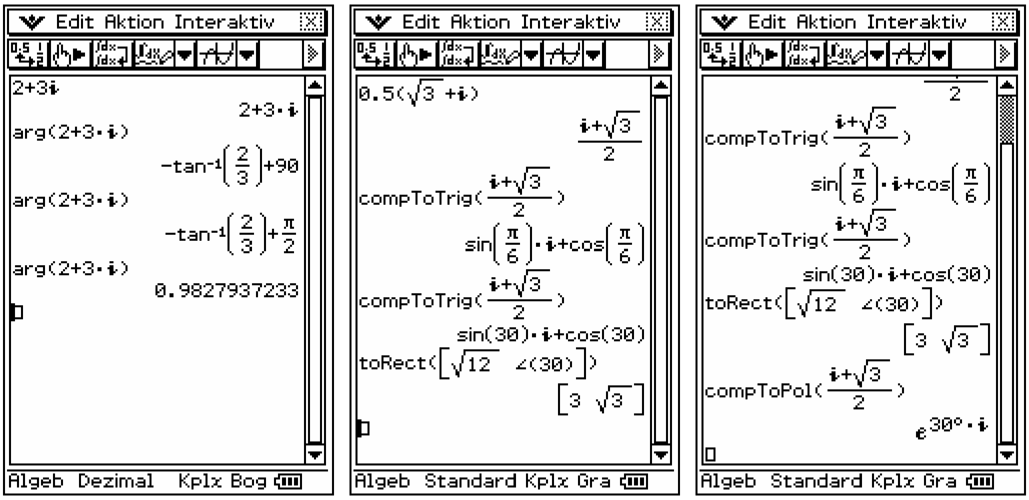


Neu im OS 3.02: Kleine stilistische Änderungen (Reihenfolge der Summanden in den Ergebnissen) Grundformatmenü erweitert, Statuszeile unten anklickbar (Grundformat ändert sich) Imaginäre Einheit wahlweise als i oder j (Elektrotechnik!) definierbar.

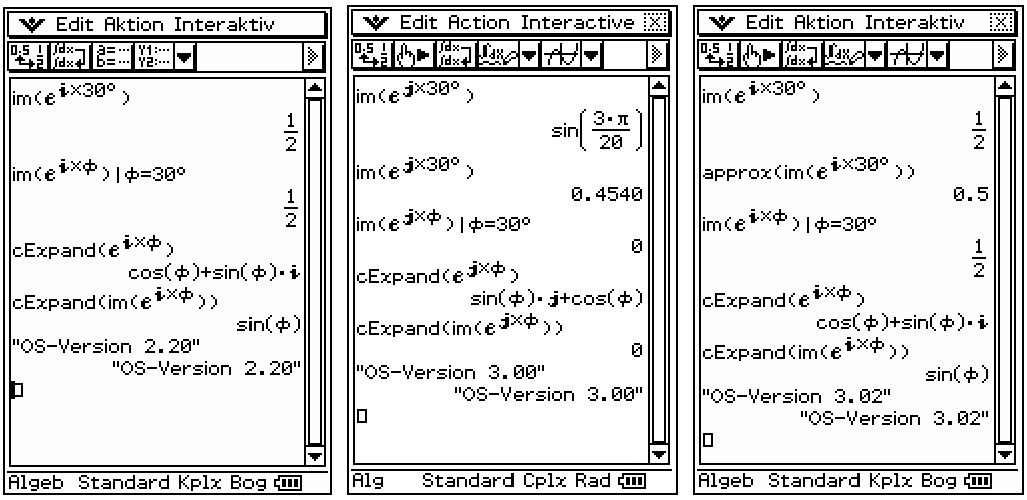






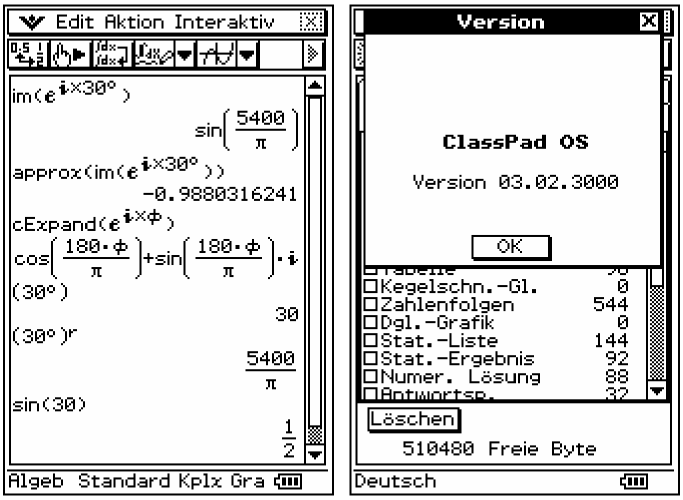


e-mail an Herrn Fukaya (Software-Entwickler bei CASIO) 30.10.2006 zum OS 3.00:



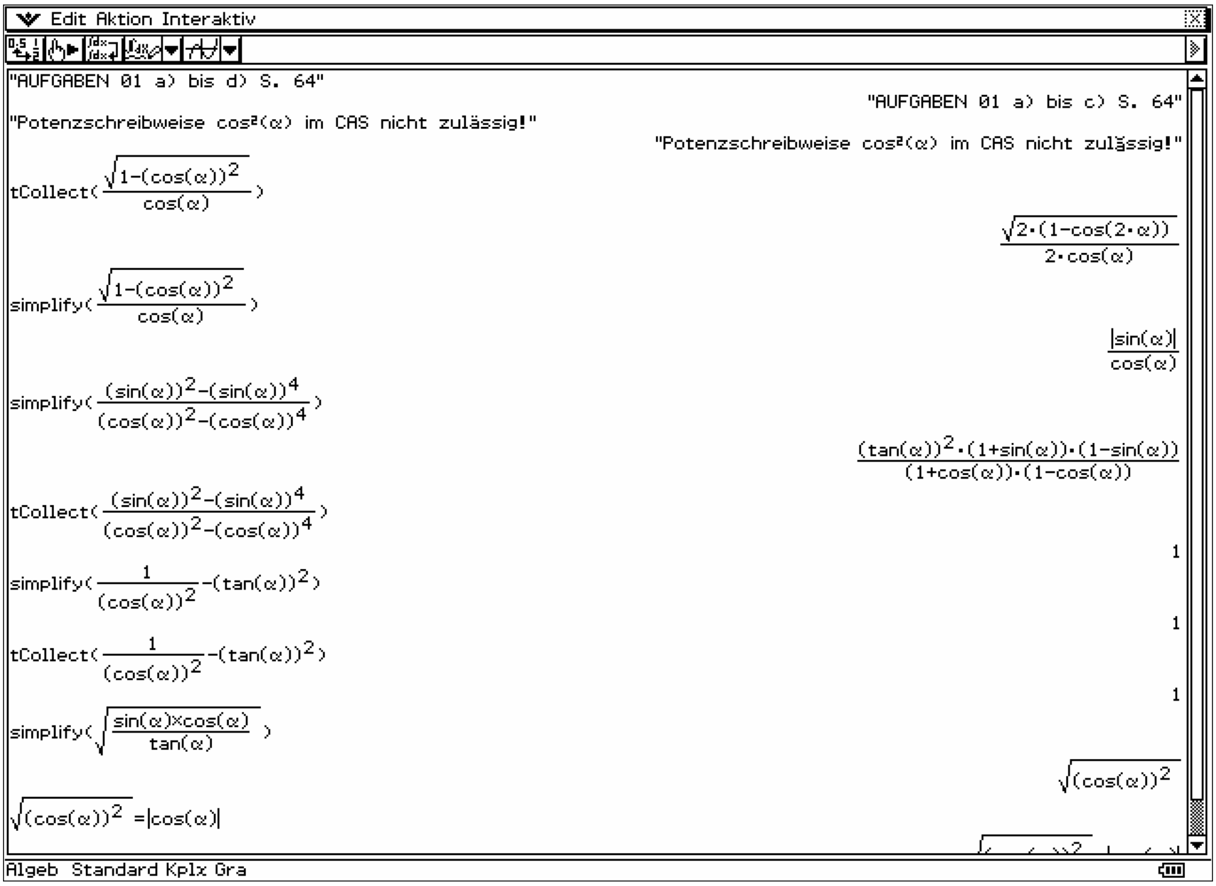
Fehler im OS 3.00 (Altgrad als Neugrad interpretiert) mit dem Update auf 3.02 behoben.
(Im OS 3.00 wurde Neugrad erstmalig in den ClassPad implementiert.)

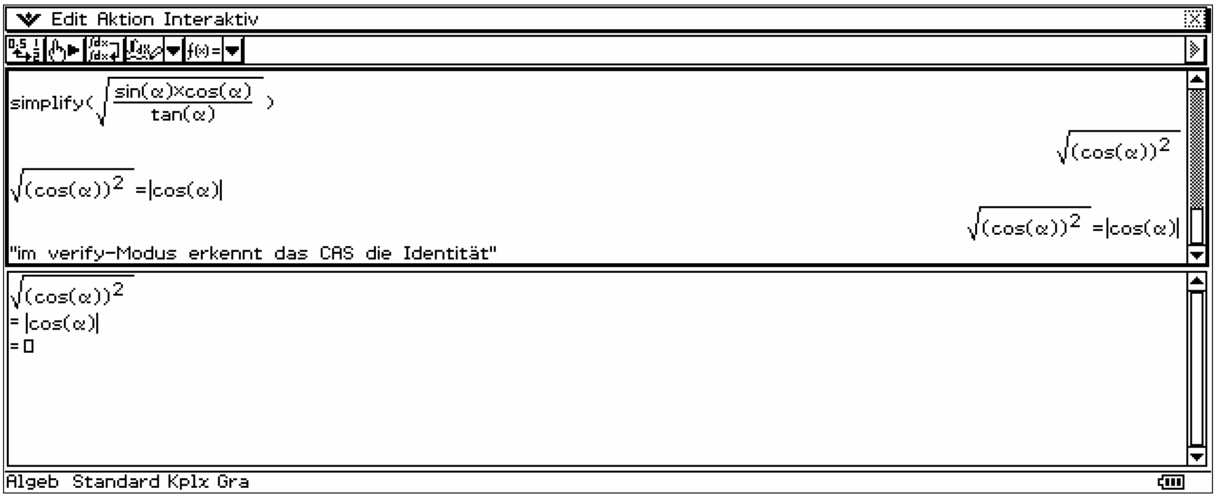
e-mail an Herrn Fukaya (Software-Entwickler bei CASIO) 28.08.2007 zum OS 3.02:



neuer Fehler?

9. Übung: Wichtige Formeln der Trigonometrie im CAS





Fazit: der ClassPad kennt einige trigonometrische Umformungen, aber durchaus nicht alle!

The Mathematics Education into the 21st Century Project

together with

The University of Applied Sciences (FH), Dresden (Germany)

are proud to announce our

10th (Anniversary!) International Conference

“Models in Developing Mathematics Education”

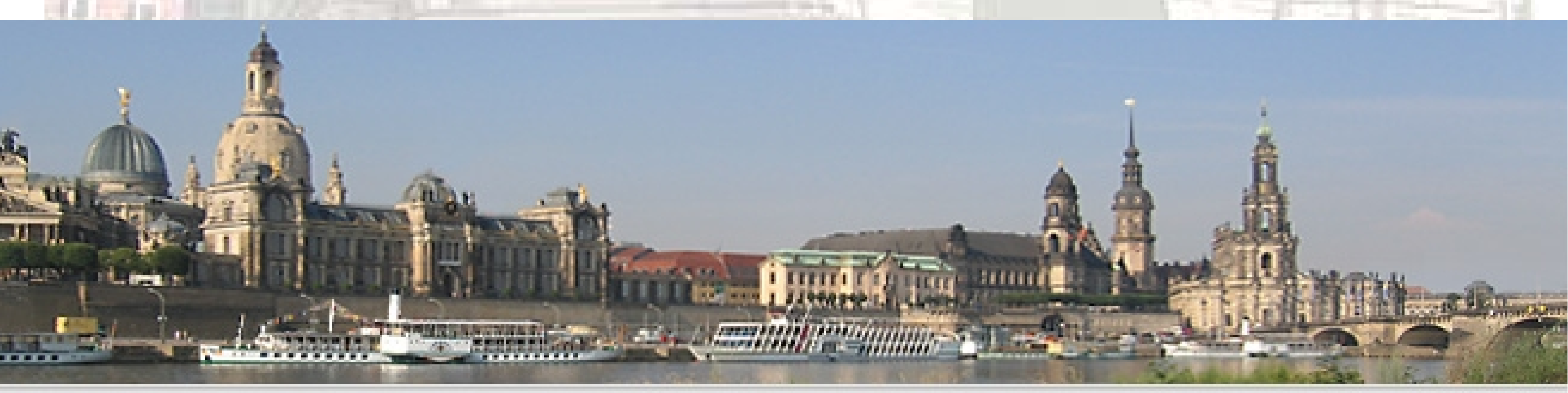
September 11 – 17, 2009
Dresden, Saxony, Germany

in cooperation with

Saxony Ministry of Education

Chairman
Dr. Alan Rogerson, International Coordinator of the Mathematics in Society Project (Poland).
Prof Dr Fayez Mina, Dept. of Curriculum & Instruction, Faculty of Education, Ain Shams University (Egypt).

You are invited to attend our project conference to be held in the historic and beauty-ful city of Dresden, Germany.
The chairman of the Local Organising Committee will be Prof. Dr. Ludwig Paditz of the Dresden University of Applied Sciences.
For ALL further conference details and updates please email arogerson@inetia.pl .



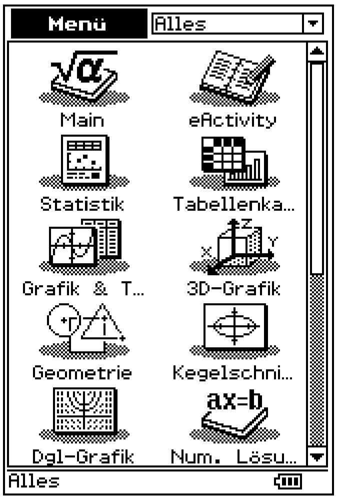
Arbeitsmaterial (Teil 2) zur Fortbildungsveranstaltung D01856

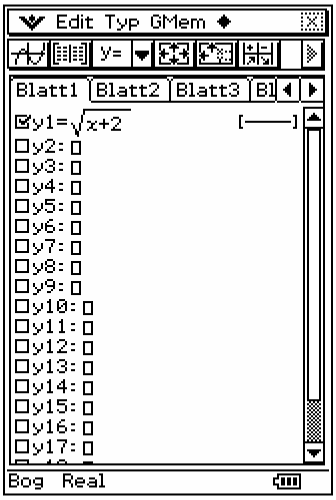
Einsatz des ClassPad 330 im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

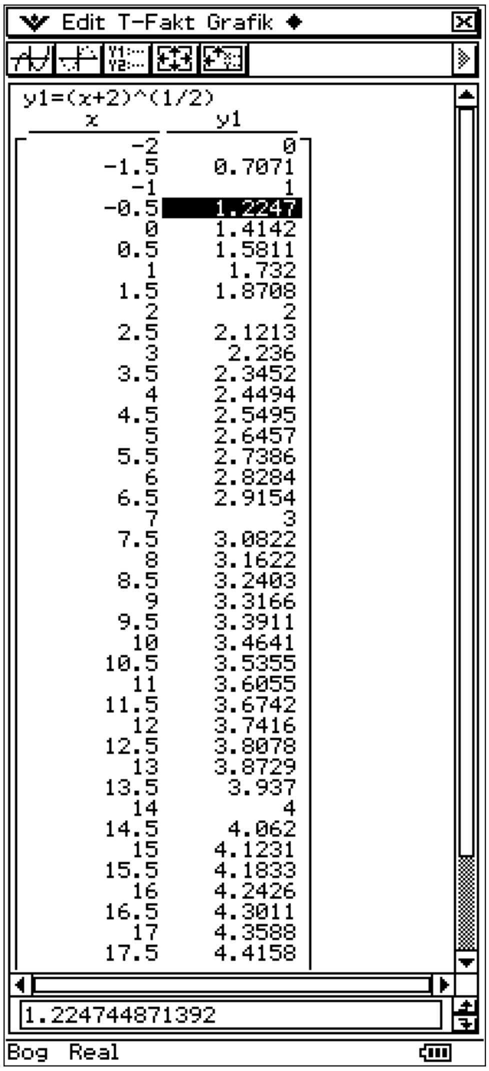
Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

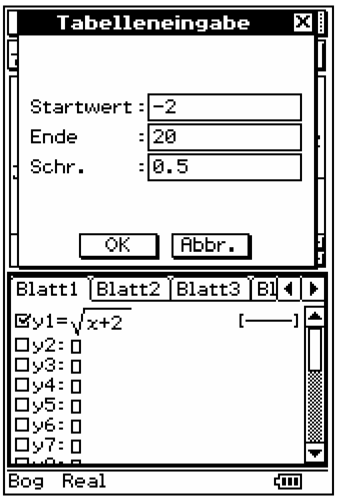
Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

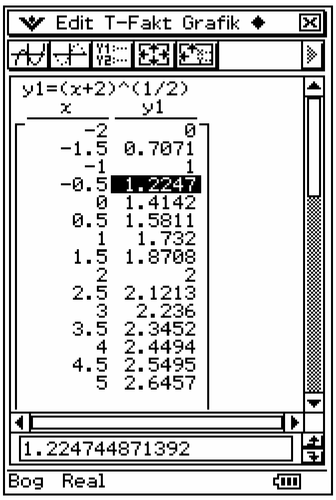
Kl.-St. 11 S.67f (Tabellierung von Funktionen mit dem ClassPad im Grafik&Tabellen-Menü)



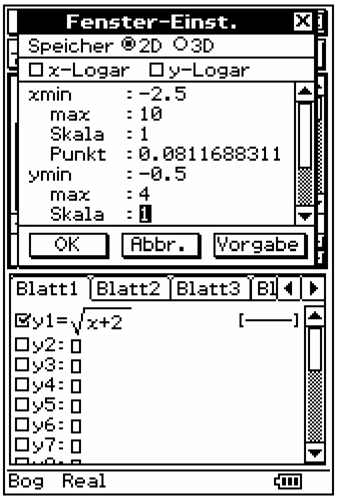


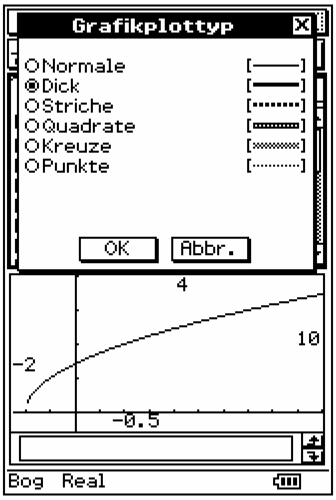


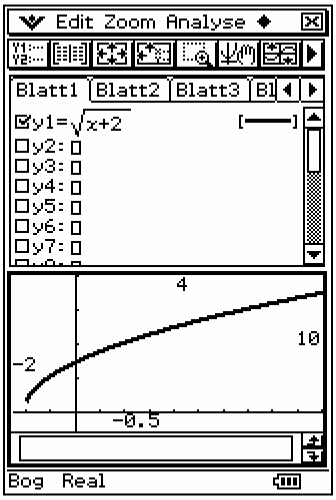




Im Tabelleneingabefenster werden Startwert, Endwert und Schrittweite festgelegt. Das Fenster selbst wird über das 5. Ikon in der Kopfleiste geöffnet. Schaubild zu y1:

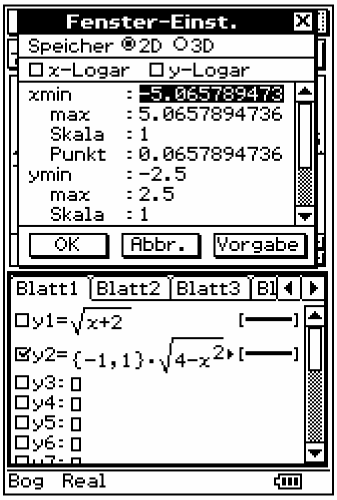


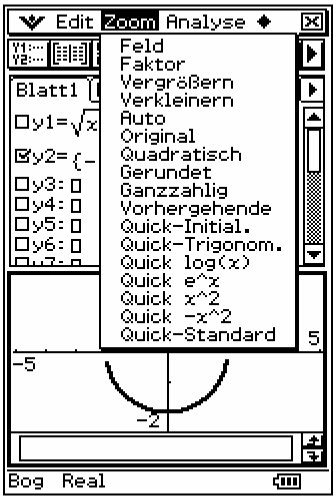


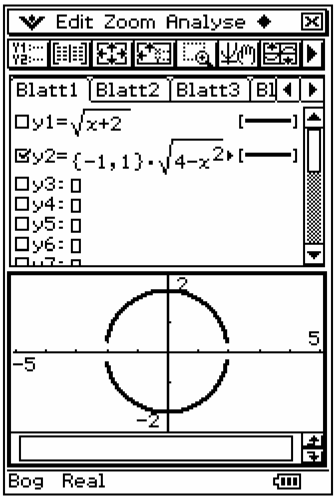


Beispiele zur Darstellung anderer Kurven:
Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 4$ kann nicht als Funktion gezeichnet werden.

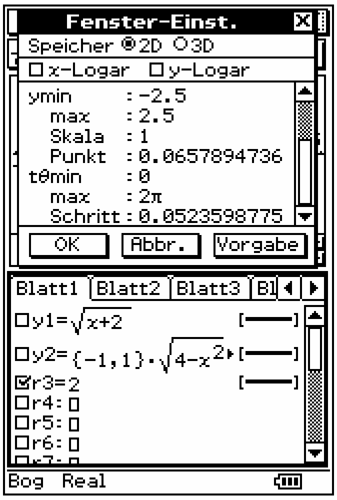
Ausweg: oberen bzw. unteren Halbkreis als Funktion zeichnen: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

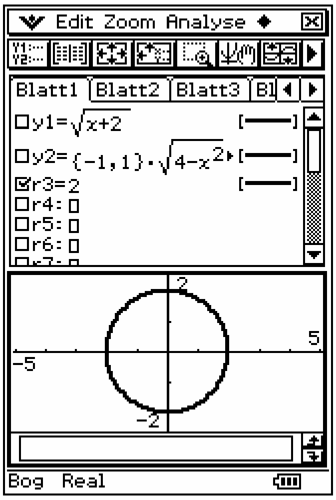






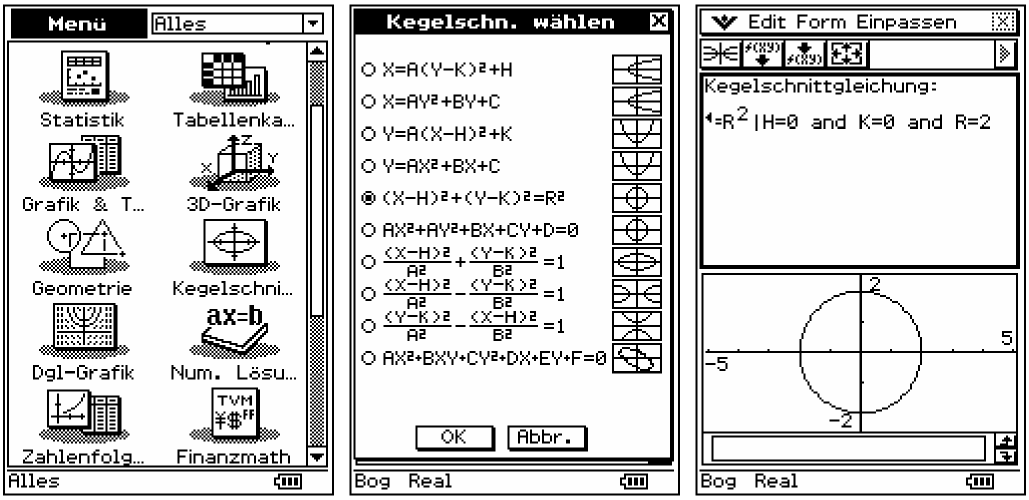
Tipp: Mit „Zoom Quadratisch“ erscheint der Kreis unverzerrt. Die unterschiedlichen Vorzeichen wurden als Listenfaktor {-1,1} zur Wurzel hinzugenommen.



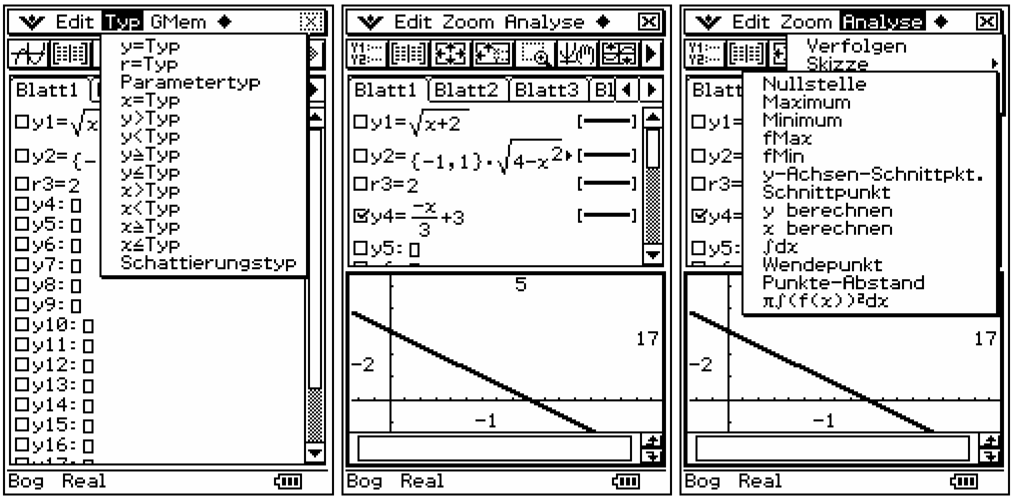


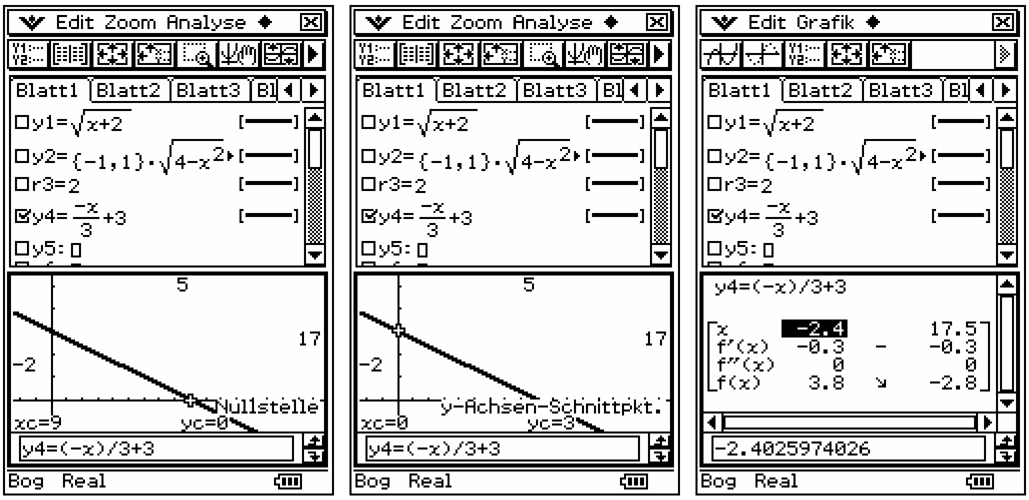
in Polarkoordinaten $r = r(\vartheta) = 2$

Im Kegelschnitt-Menü:



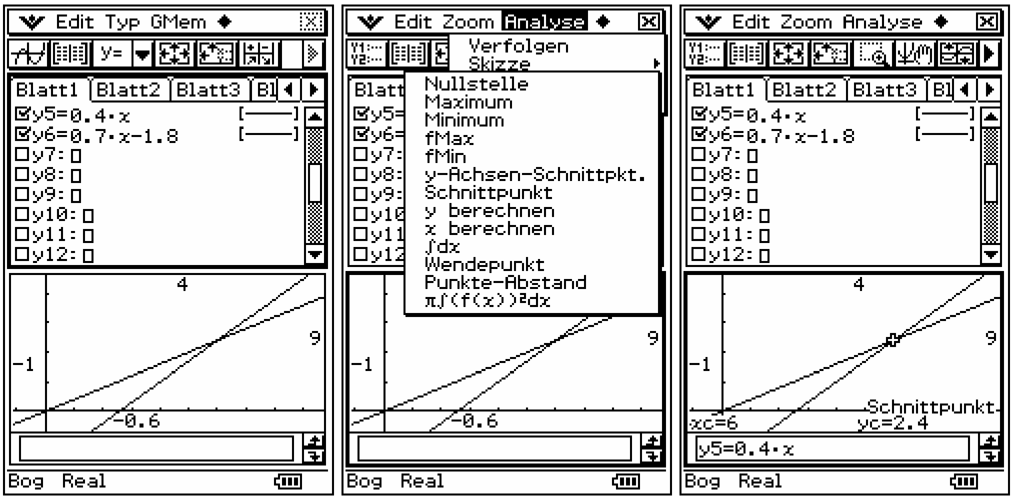
S.83: y = -x/3 + 3 darstellen (Achsenabschnitte bestimmen)



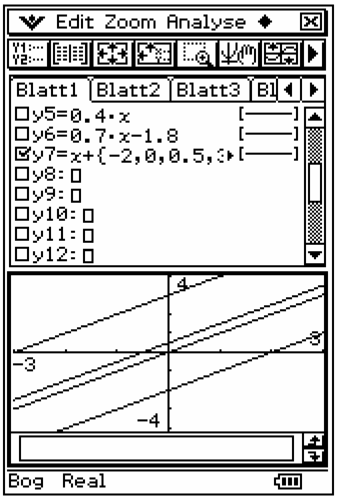


Im letzten Screenshot werden an den Intervallenden (Betrachtungsfenster) Ableitungen und Monotonie angezeigt. (Einstellungen dazu im Grafikformat)

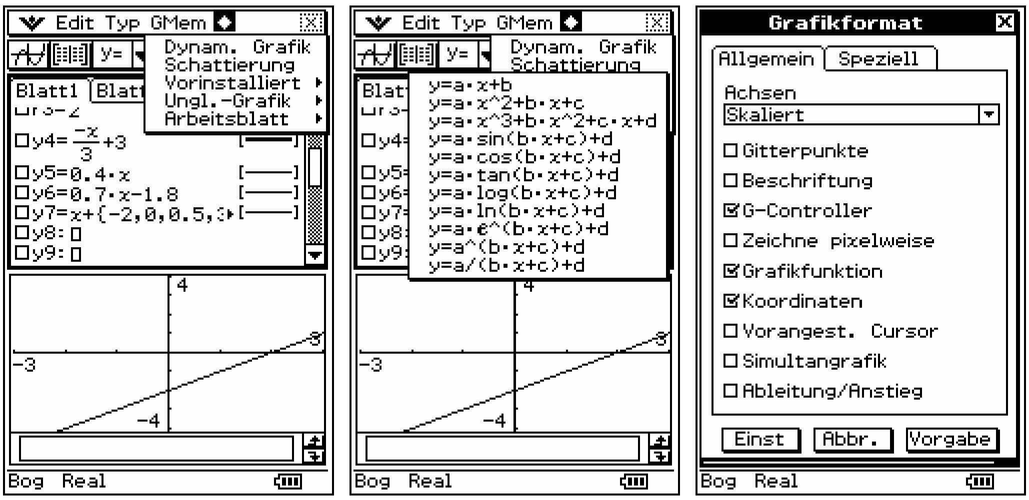
Schnittpunkte von Kurven: S.84u.



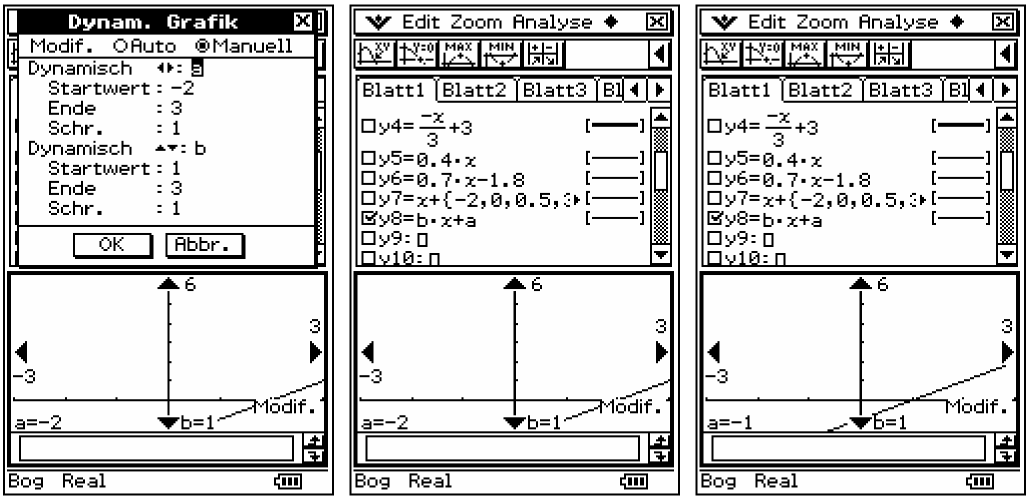
Kurvenscharen S.90 y = x+A mit A={-2,0,0.5,3} eingeben als **y = x + {-2,0,0.5,3}**



oder eine dynamische Grafik generieren:

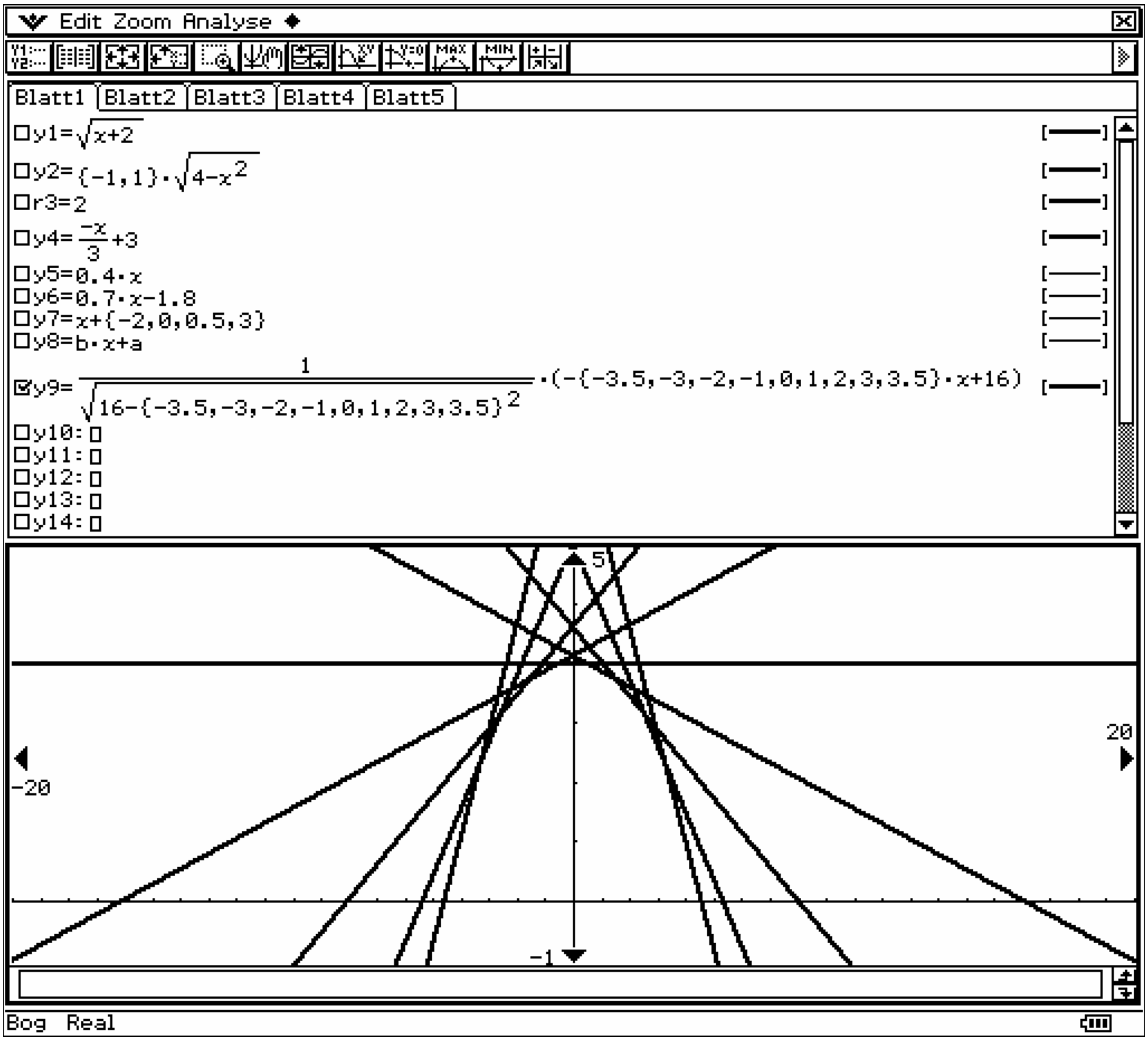


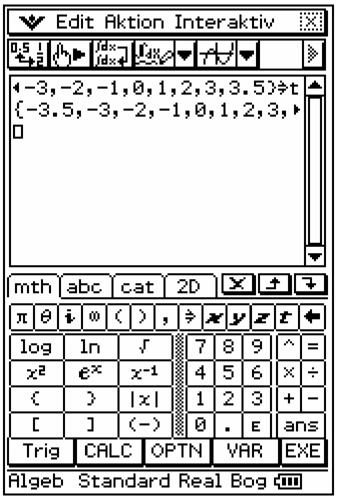
Zur Steuerung der Kurvenschar sollte der G-Controller eingeschaltet sein!

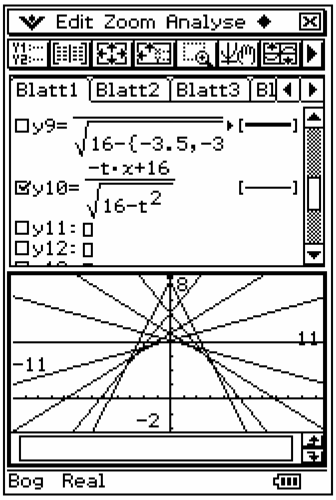


Durch Anklicken der G-Controller-Pfeile werden die Parameter gesteuert.
Probieren Sie es aus, sowohl im Auto- als auch im Manuell-Modus!

Kurvenschar $y = \frac{1}{\sqrt{16-t^2}} \times \left(-t \times x + 16\right)$ mit t = {-3.5,-3,-2,-1,0,1,2,3,3.5}, S.91

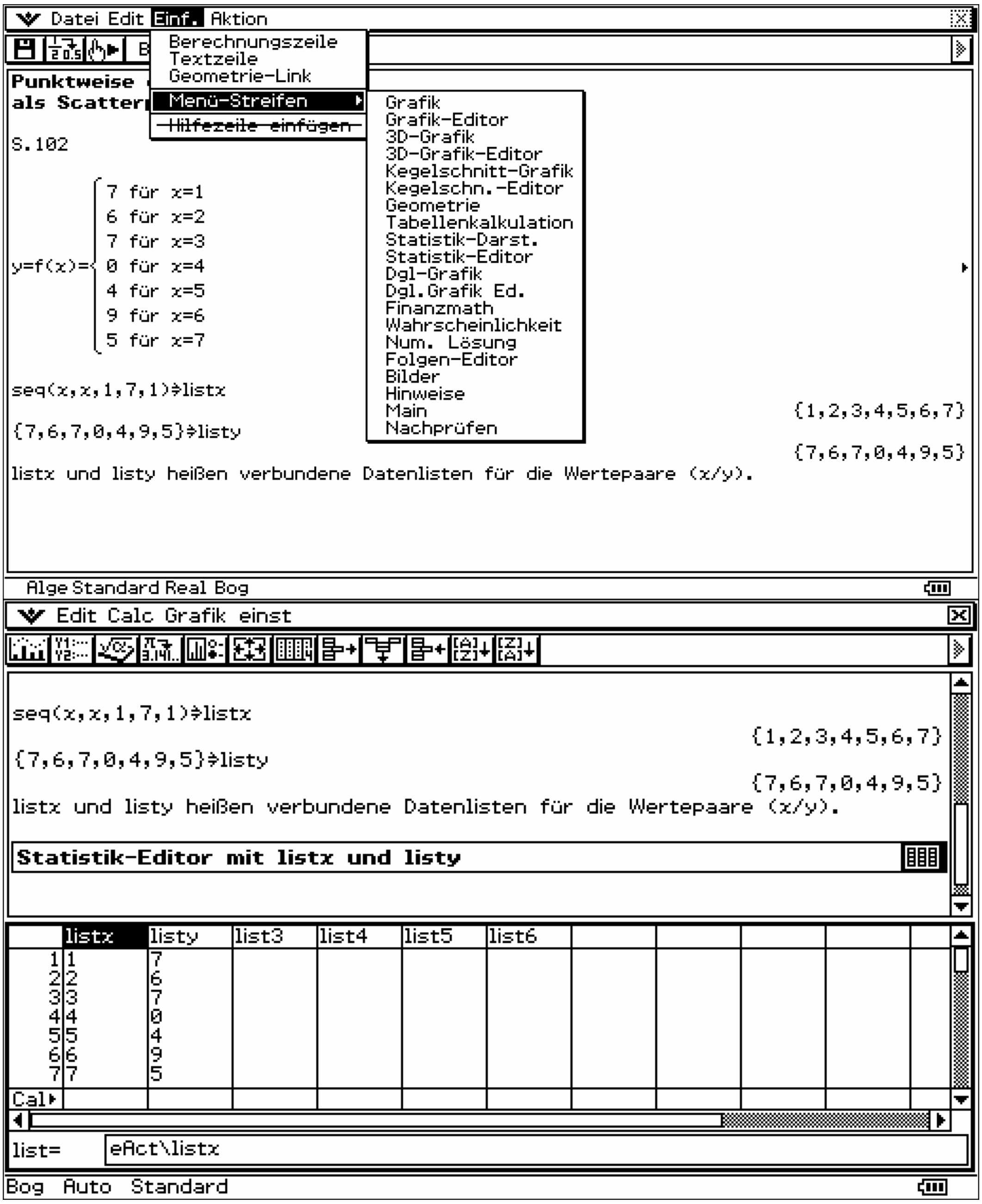




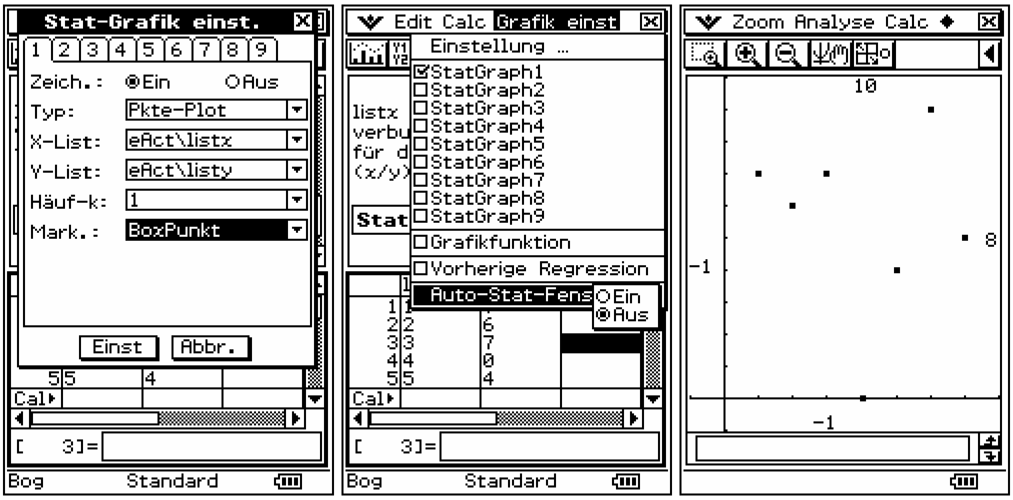


t im Main-Menü als Liste definiert.

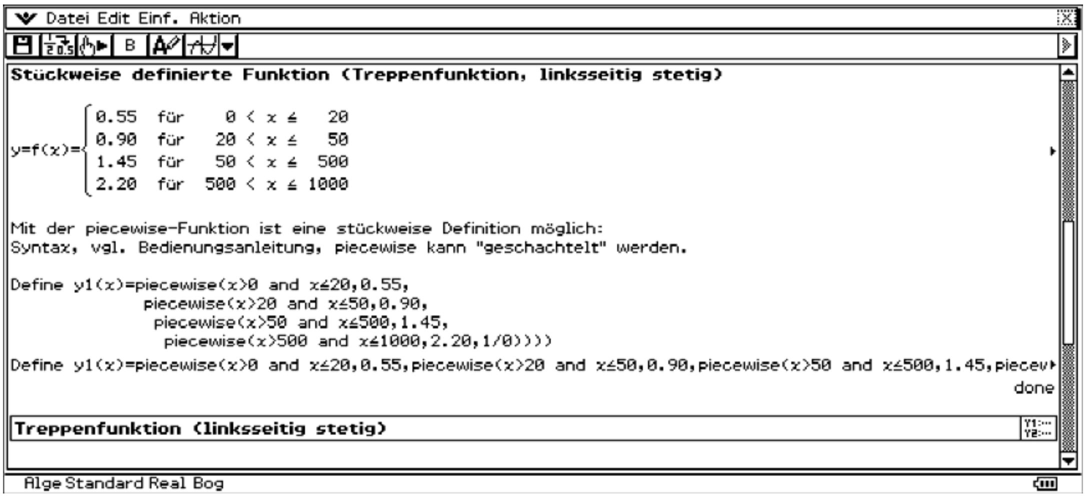
Abschnittsweise definierte Funktionen: S.102ff (Arbeitsblatt im eActivity-Menü)

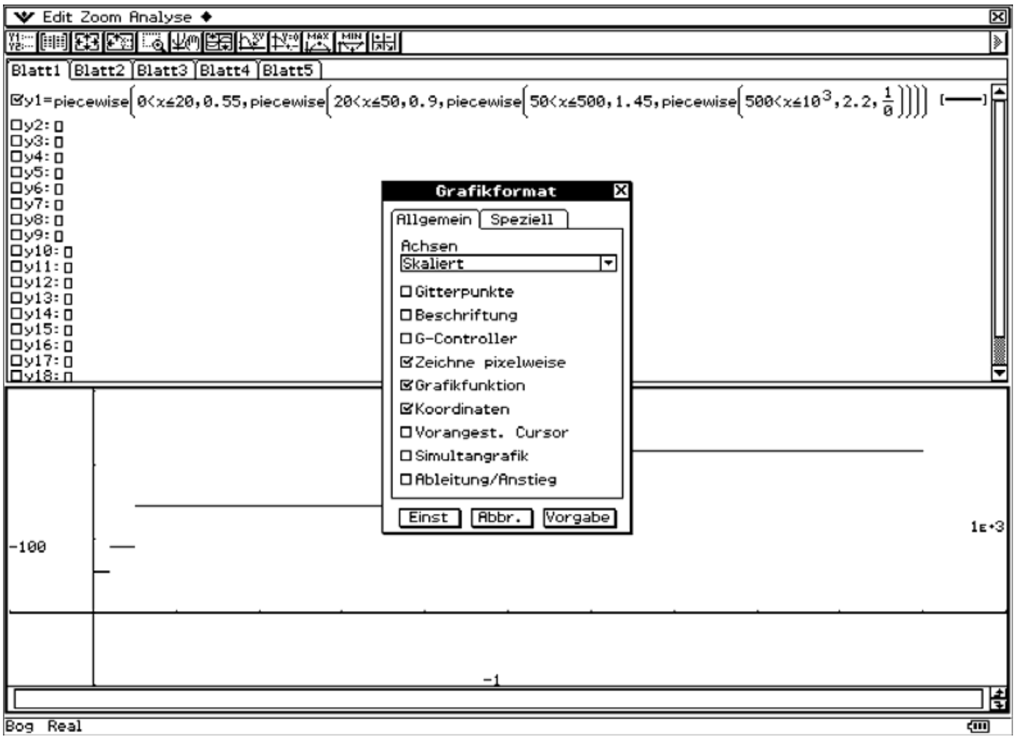


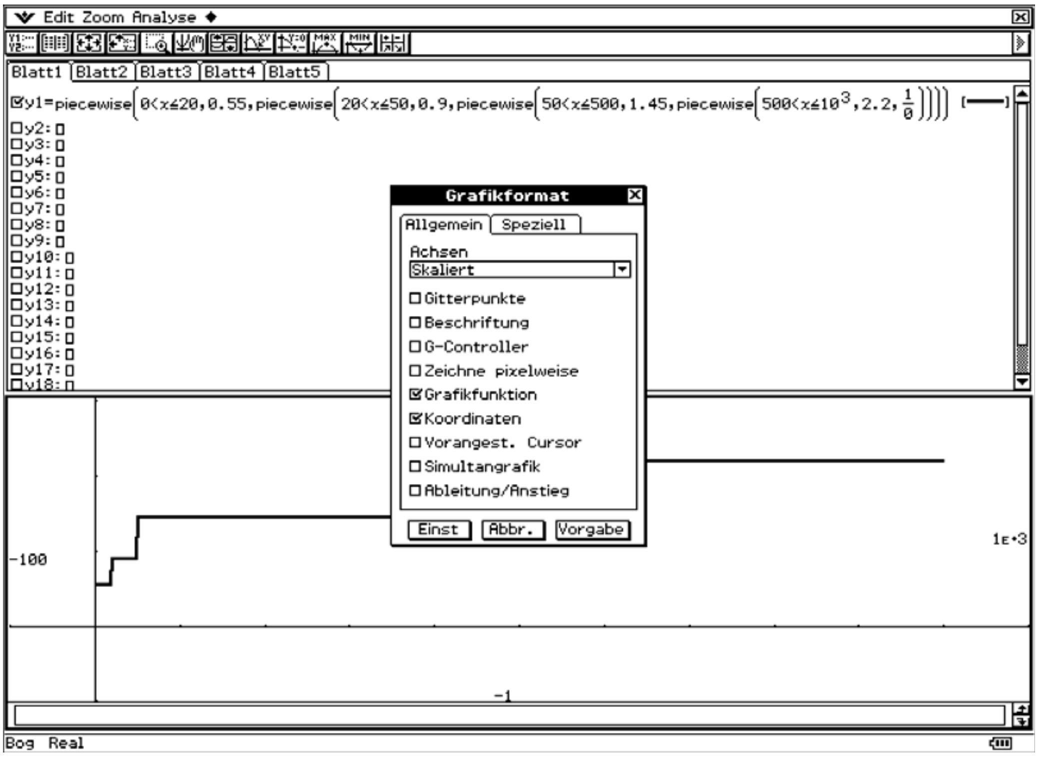
	listx	listy	list3	list4	list5	list6
1	1	7				
2	2	6				
3	3	7				
4	4	0				
5	5	4				
6	6	9				
7	7	5				



Eine linksseitig stetige Treppenfunktion, S. 103 (Briefporto), eActivity-Menü

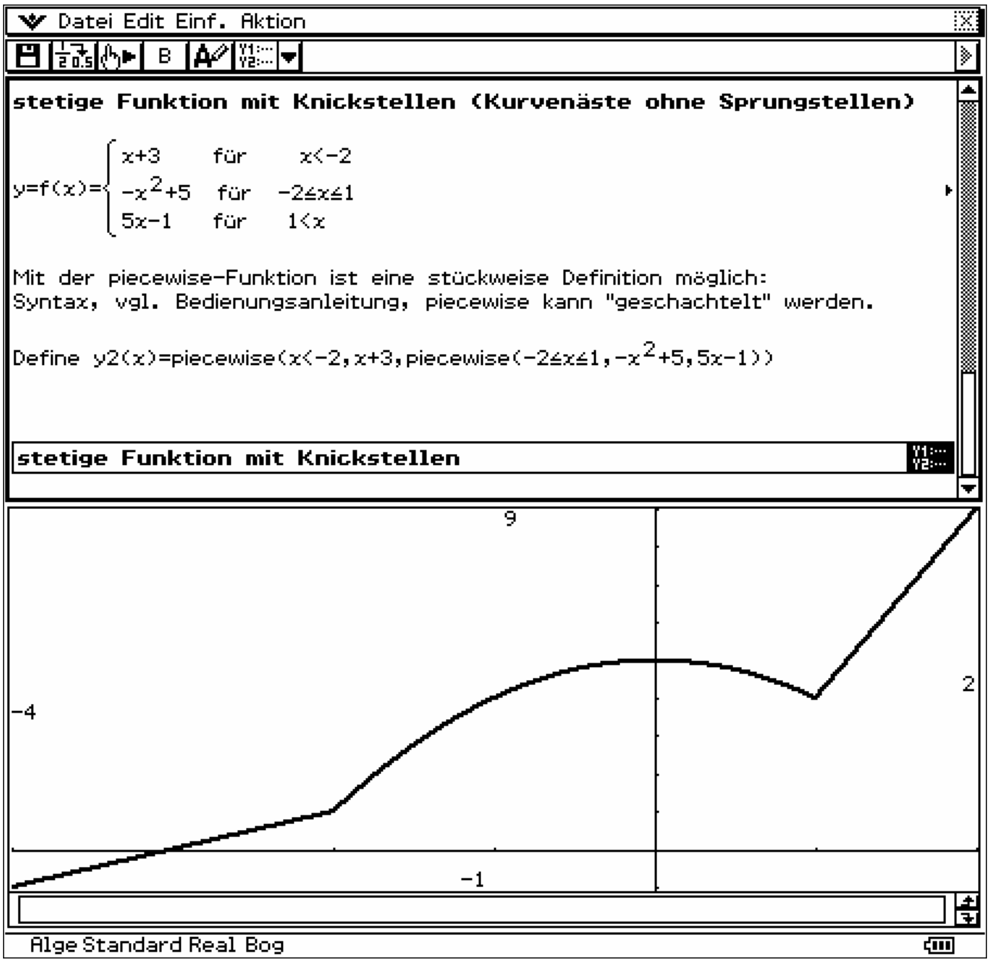




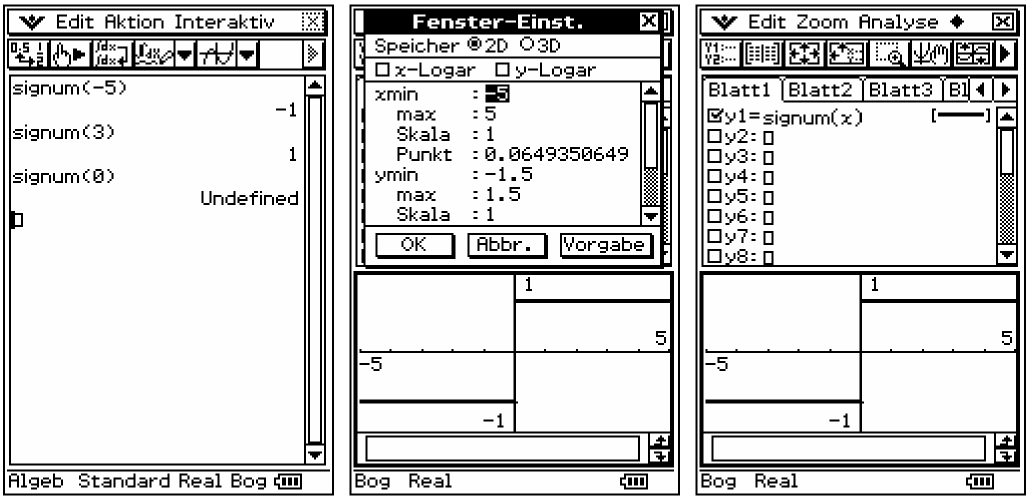


Fehlerhafte Grafik, da **pixelweises Zeichnen** nicht aktiviert wurde!

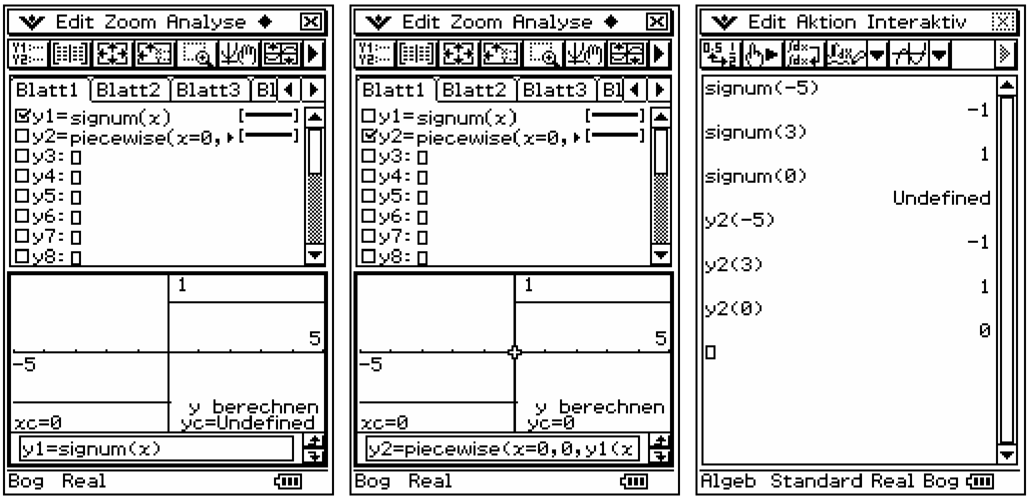
S. 104, stetiger Kurvenverlauf mit Knickstellen



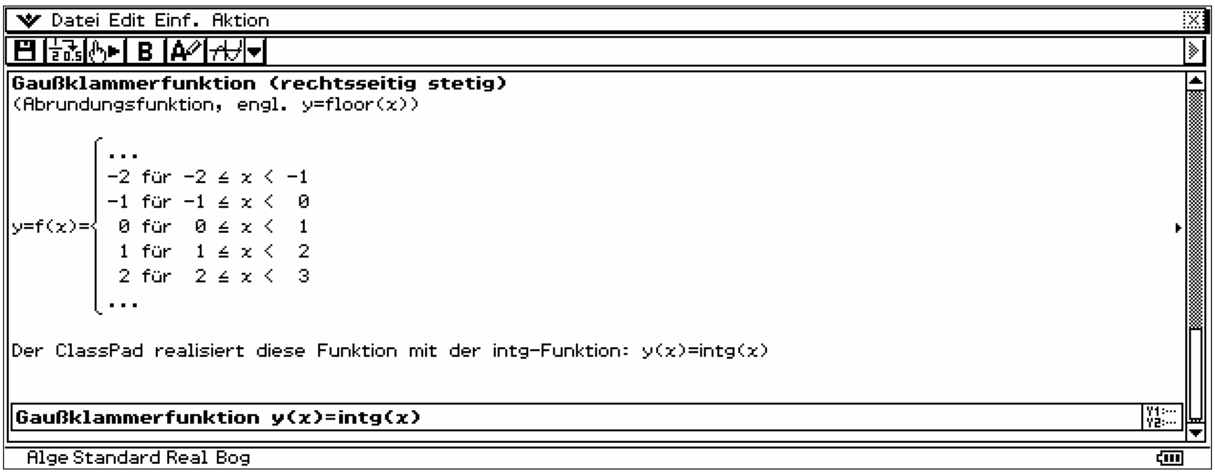
Die Signum-Funktion ist im ClassPad für x=0 nicht definiert:



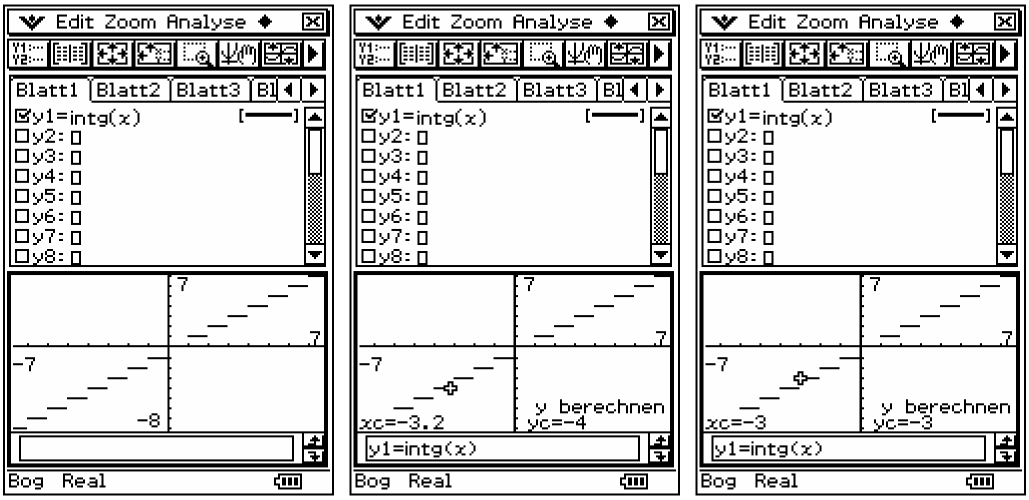
Mit **y2(x)=piecewise(x=0,0,signum(x))** wird für x=0 der Funktionswert y=0 generiert.



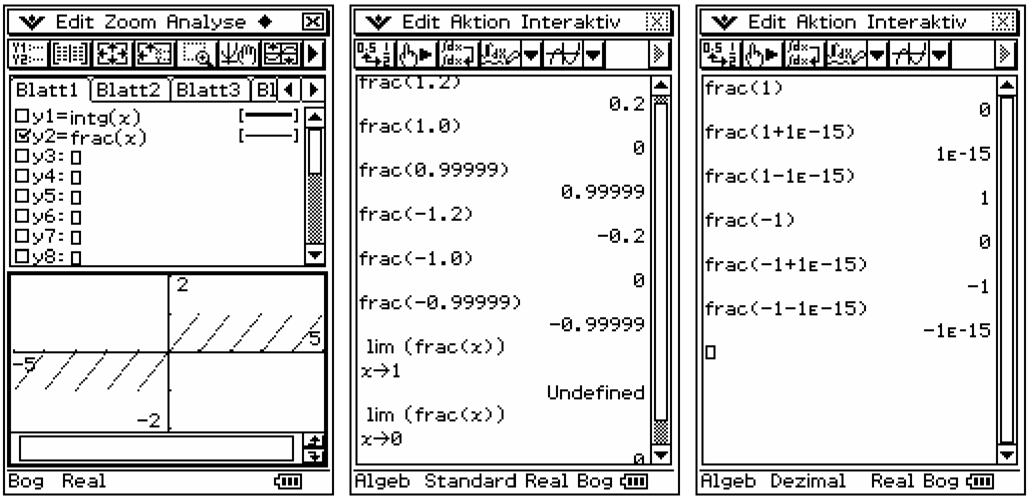
Die Gaußklammer-Funktion y = [x] ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion, S. 104,



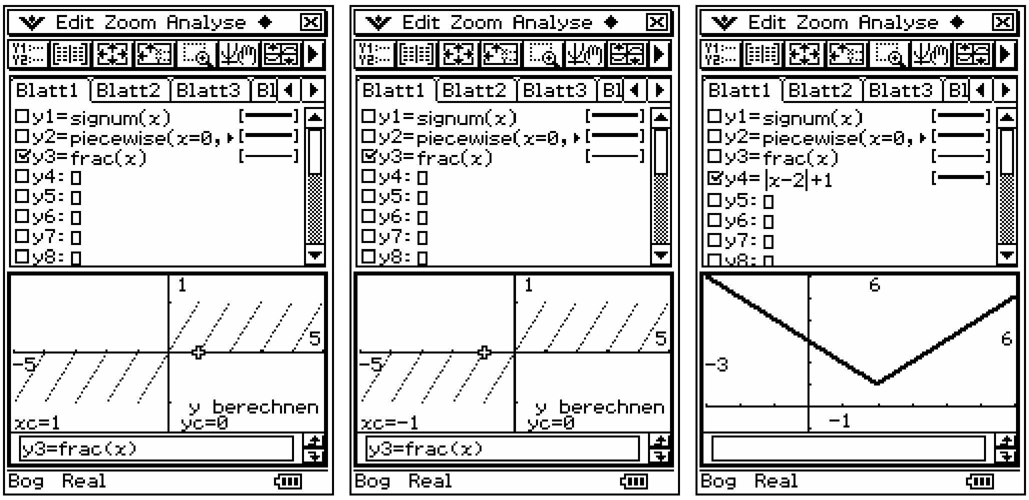
pixelweises Zeichnen aktivieren!



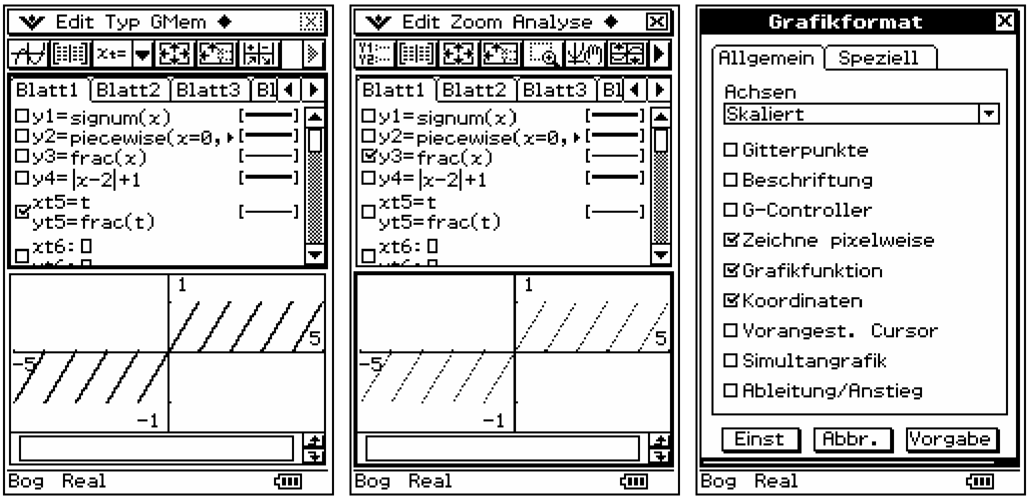
Die Nachkommastellenfunktion y(x) = frac(x)



pixelweises Zeichnen aktivieren! (Im Bild S. 105 oben ist dies nicht der Fall, d.h. das Schaubild ist dort unkorrekt.)
Die betrachtete Funktion ist im Nullpunkt stetig, jedoch nicht in den anderen ganzzahligen x-Werten. Für positive x ist die Funktion rechtsseitig stetig, d.h. y(x+0) = y(x). Für negative x liegt linksseitige Stetigkeit vor, d.h. y(x-0) = y(x).

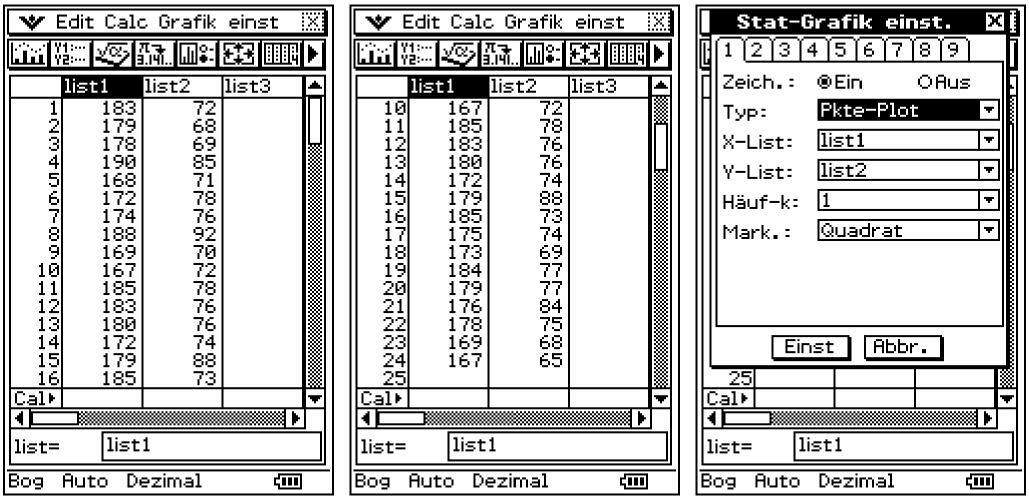


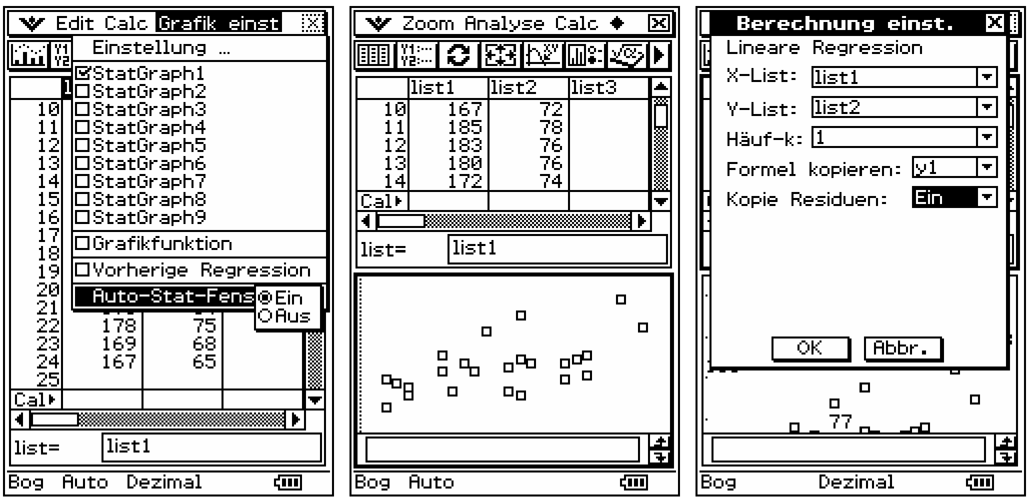
Tipp: um im pixelweisen Zeichnen glatte Kurvenäste zu erhalten, wählt man eine passende Parameterdarstellung mit kleiner Schrittweite für den Parameter.

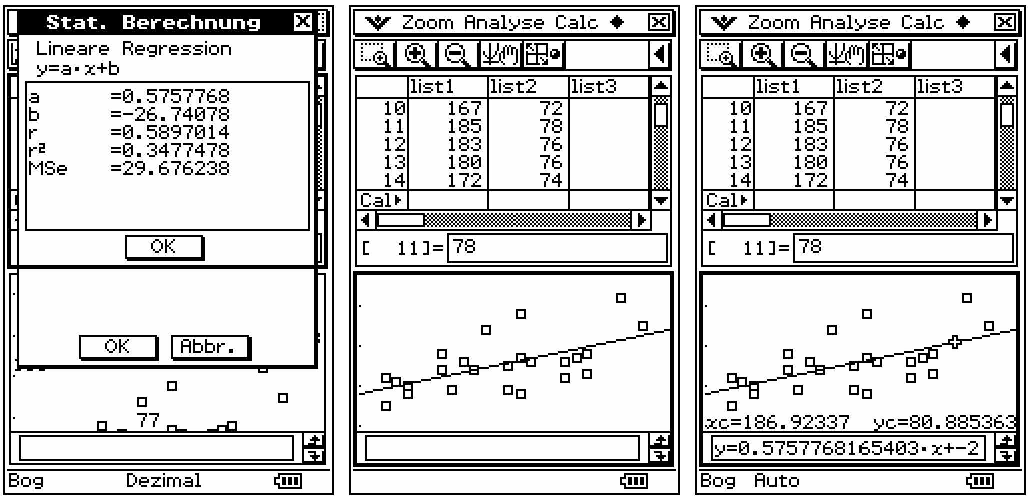


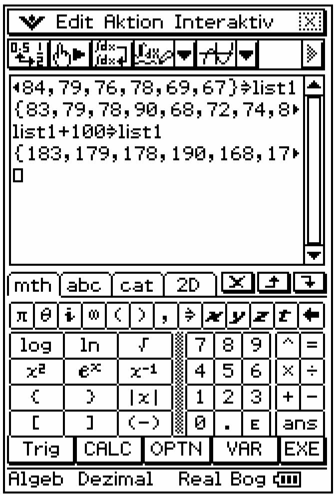
Lineare Regression, S. 109ff

Die Dateneingabe der verbundenen Datenlisten kann sowohl im Main- als auch im Statistik-Menü erfolgen:







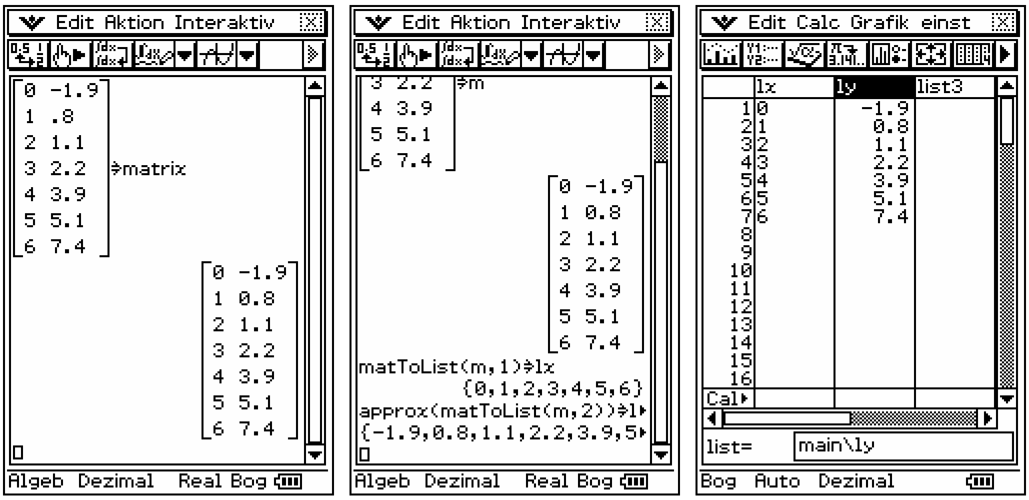


Tipp:

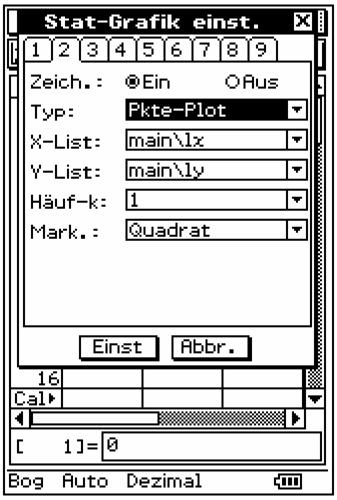
Die Eingabe von list1 kann auch ohne die Hunderterstelle „1“ erfolgen.

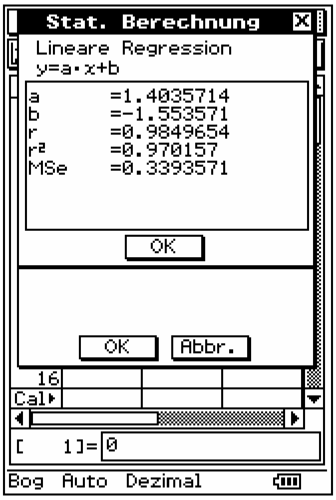
Mittels der Listenarithmetik rechnet man dann
list1+100 ⇒ list1

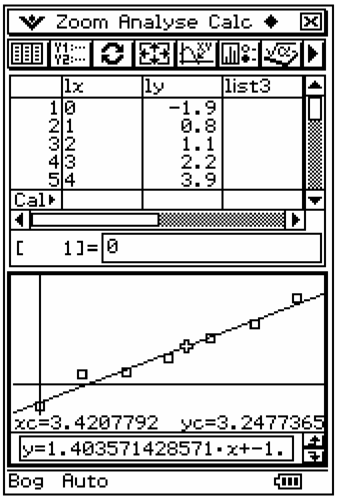
Impuls S. 109 unten (Dateneingabe über eine Matrix, dann matToList nutzen)



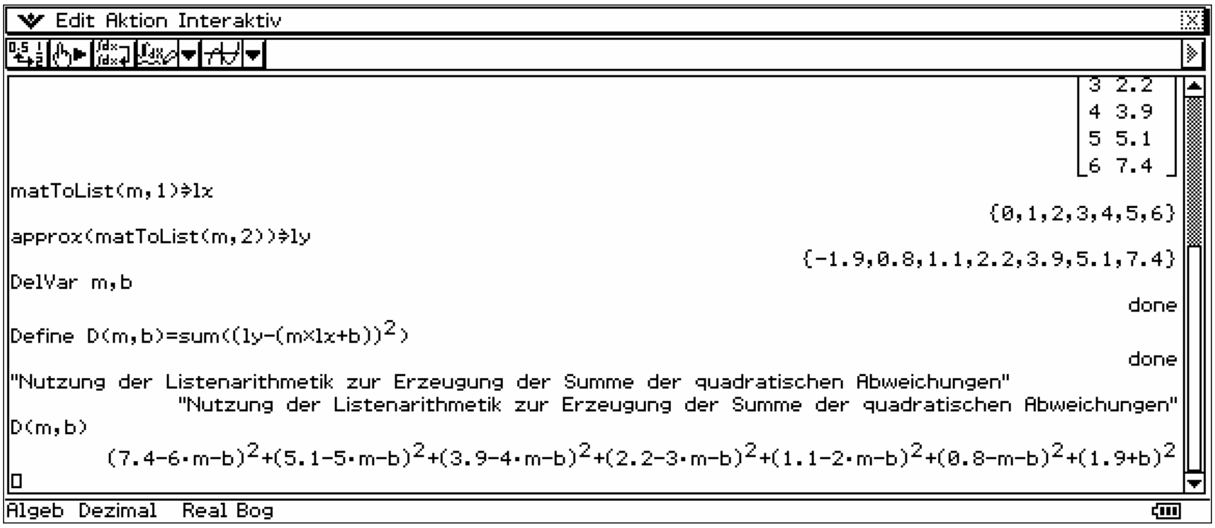
Mit dem approx-Befehl abgespeichert erscheinen die Daten im Statistik-Editor dann als Dezimalzahlen und nicht als gemeine Brüche.







Wir betrachten nun ausführlich die Methode der kleinsten Quadrate, vgl. S. 111.



Die Funktion D(m,b) ist zu minimieren, um die optimalen Parameter m und b zu finden.

Dazu wird die Funktion im Rechteck [-1.9 ; -0.8]×[0.2 ; 2.0] jeweils mit der Schrittweite 0,1 tabelliert. Das Ergebnis liegt als Matrix vor, die im Programm **D_Tab(xa,xe,ya,ye,s)** errechnet wird.

```
Edit Aktion Interaktiv
                                                                  {0,1,2,3,4,5,6}
approx(matToList(m,2))⇒ly
                                                {-1.9,0.8,1.1,2.2,3.9,5.1,7.4}
DelVar m,b
                                                                             done
Define D(m,b)=sum((ly-(m×lx+b))^2)
                                                                             done
"Nutzung der Listenarithmetik zur Erzeugung der Summe der quadratischen Abweichungen"
          "Nutzung der Listenarithmetik zur Erzeugung der Summe der quadratischen Abweichungen"
D(m,b)
   (7.4-6·m-b)^2+(5.1-5·m-b)^2+(3.9-4·m-b)^2+(2.2-3·m-b)^2+(1.1-2·m-b)^2+(0.8-m-b)^2+(1.9+b)^2
D_Tab(.2,2,-1.9,-.8,.1)
                                                                             done
matD
```

151.87	146.40	141.07	135.88	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.40
129.42	124.37	119.46	114.69	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
108.79	104.16	99.67	95.32	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
89.98	85.77	81.70	77.77	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
72.99	69.20	65.55	62.04	58.67	55.44	52.35	49.40	46.59	43.92	41.39	39.00
57.82	54.45	51.22	48.13	45.18	42.37	39.70	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
44.47	41.52	38.71	36.04	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
32.94	30.41	28.02	25.77	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
23.23	21.12	19.15	17.32	15.63	14.08	12.67	11.40	10.27	9.28	8.43	7.72
15.34	13.65	12.10	10.69	9.42	8.29	7.30	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
9.27	8.00	6.87	5.88	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3.00
5.02	4.17	3.46	2.89	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
2.59	2.16	1.87	1.72	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
1.98	1.97	2.10	2.37	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
3.19	3.60	4.15	4.84	5.67	6.64	7.75	9.00	10.39	11.92	13.59	15.40
6.22	7.05	8.02	9.13	10.38	11.77	13.30	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
11.07	12.32	13.71	15.24	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
17.74	19.41	21.22	23.17	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
26.23	28.32	30.55	32.92	35.43	38.08	40.87	43.80	46.87	50.08	53.43	56.92

```
Algeb Dezimal  Real Bog
```

```
Edit Strg I/O Vers.
D_Tab        N xa,xe,ya,ye,s
local k,l,i,j

(xe-xa)/s+1⇒k
(ye-ya)/s+1⇒l

fill(0,k,l)⇒matD

For 1⇒i To k Step 1
 For 1⇒j To l Step 1
  approx(D(xa+(i-1)×s,ya+(j-1)×s))⇒matD[i,j]
 Next
Next

Stop
Programm-Editor
```

Wir ergänzen die Matrix durch eine zusätzliche Spalte für b = -1.55:

```
Edit Aktion Interaktiv
listToMat(seq(D(m,-1.55),m,.2,2,.1))⇒matE
```

133.34
112.36
93.20
75.86
60.34
46.64
34.76
24.70
16.46
10.04
5.44
2.66
1.70
2.56
5.24
9.74
16.06
24.20
34.16

```
Algeb Dezimal  Real Bog
```

```
Edit Aktion Interaktiv
augment(augment(subMat(matD,1,1,19,4),matE),subMat(matD,1,5,19,12))⇒matD
```

151.87	146.40	141.07	135.88	133.34	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.40
129.42	124.37	119.46	114.69	112.36	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
108.79	104.16	99.67	95.32	93.20	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
89.98	85.77	81.70	77.77	75.86	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
72.99	69.20	65.55	62.04	60.34	58.67	55.44	52.35	49.40	46.59	43.92	41.39	39.00
57.82	54.45	51.22	48.13	46.64	45.18	42.37	39.70	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
44.47	41.52	38.71	36.04	34.76	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
32.94	30.41	28.02	25.77	24.70	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
23.23	21.12	19.15	17.32	16.46	15.63	14.08	12.67	11.40	10.27	9.28	8.43	7.72
15.34	13.65	12.10	10.69	10.04	9.42	8.29	7.30	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
9.27	8.00	6.87	5.88	5.44	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3.00
5.02	4.17	3.46	2.89	2.66	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
2.59	2.16	1.87	1.72	1.70	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
1.98	1.97	2.10	2.37	2.56	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
3.19	3.60	4.15	4.84	5.24	5.67	6.64	7.75	9.00	10.39	11.92	13.59	15.40
6.22	7.05	8.02	9.13	9.74	10.38	11.77	13.30	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
11.07	12.32	13.71	15.24	16.06	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
17.74	19.41	21.22	23.17	24.20	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
26.23	28.32	30.55	32.92	34.16	35.43	38.08	40.87	43.80	46.87	50.08	53.43	56.92

```
Algeb Dezimal Real Bog
```

Zur besseren Lesbarkeit können wir die Matrix noch mit einer Kopfzeile für b und einer ersten Spalte für m versehen:

```
Edit Aktion Interaktiv
listToMat(seq(m,m,.2,2,.1))⇒matA
```

0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00
1.10
1.20
1.30
1.40
1.50
1.60
1.70
1.80
1.90
2.00

```
Algeb Dezimal Real Bog
```

```
Edit Aktion Interaktiv
augment(matA,matD)⇒matD
```

0.20	151.87	146.40	141.07	135.88	133.34	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.40
0.30	129.42	124.37	119.46	114.69	112.36	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
0.40	108.79	104.16	99.67	95.32	93.20	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
0.50	89.98	85.77	81.70	77.77	75.86	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
0.60	72.99	69.20	65.55	62.04	60.34	58.67	55.44	52.35	49.40	46.59	43.92	41.39	39.00
0.70	57.82	54.45	51.22	48.13	46.64	45.18	42.37	39.70	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
0.80	44.47	41.52	38.71	36.04	34.76	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
0.90	32.94	30.41	28.02	25.77	24.70	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
1.00	23.23	21.12	19.15	17.32	16.46	15.63	14.08	12.67	11.40	10.27	9.28	8.43	7.72
1.10	15.34	13.65	12.10	10.69	10.04	9.42	8.29	7.30	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
1.20	9.27	8.00	6.87	5.88	5.44	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3.00
1.30	5.02	4.17	3.46	2.89	2.66	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
1.40	2.59	2.16	1.87	1.72	1.70	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
1.50	1.98	1.97	2.10	2.37	2.56	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
1.60	3.19	3.60	4.15	4.84	5.24	5.67	6.64	7.75	9.00	10.39	11.92	13.59	15.40
1.70	6.22	7.05	8.02	9.13	9.74	10.38	11.77	13.30	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
1.80	11.07	12.32	13.71	15.24	16.06	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
1.90	17.74	19.41	21.22	23.17	24.20	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
2.00	26.23	28.32	30.55	32.92	34.16	35.43	38.08	40.87	43.80	46.87	50.08	53.43	56.92

```
Algeb Dezimal Real Bog
```

Schließlich fügen wir die Kopfzeile ein. Damit haben wir die Tabelle auf S. 112 als Matrix generiert:

Edit Aktion Interaktiv

trn(augment(matB,trn(matD))

m/b	-1.90	-1.80	-1.70	-1.60	-1.55	-1.50	-1.40	-1.30	-1.20	-1.10	-1.00	-0.90	-0.80
0.20	151.87	146.40	141.07	135.88	133.34	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.40
0.30	129.42	124.37	119.46	114.69	112.36	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
0.40	108.79	104.16	99.67	95.32	93.20	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
0.50	89.98	85.77	81.70	77.77	75.86	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
0.60	72.99	69.20	65.55	62.04	60.34	58.67	55.44	52.35	49.40	46.59	43.92	41.39	39.00
0.70	57.82	54.45	51.22	48.13	46.64	45.18	42.37	39.70	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
0.80	44.47	41.52	38.71	36.04	34.76	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
0.90	32.94	30.41	28.02	25.77	24.70	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
1.00	23.23	21.12	19.15	17.32	16.46	15.63	14.08	12.67	11.40	10.27	9.28	8.43	7.72
1.10	15.34	13.65	12.10	10.69	10.04	9.42	8.29	7.30	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
1.20	9.27	8.00	6.87	5.88	5.44	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3.00
1.30	5.02	4.17	3.46	2.89	2.66	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
1.40	2.59	2.16	1.87	1.72	1.70	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
1.50	1.98	1.97	2.10	2.37	2.56	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
1.60	3.19	3.60	4.15	4.84	5.24	5.67	6.64	7.75	9.00	10.39	11.92	13.59	15.40
1.70	6.22	7.05	8.02	9.13	9.74	10.38	11.77	13.30	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
1.80	11.07	12.32	13.71	15.24	16.06	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
1.90	17.74	19.41	21.22	23.17	24.20	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
2.00	26.23	28.32	30.55	32.92	34.16	35.43	38.08	40.87	43.80	46.87	50.08	53.43	56.92

Algeb Dezimal Real Bog

Abschließend erzeugen wir mit dem ClassPad eine Excel-Tabelle im Tabellenkalkulations-Menü (Die Zellendefinition auf S. 112 ist nicht ganz korrekt!):

Definition der Zeile B2 bis N2 durch Kopieren von B2 nach links:
=91*A2^2+7*B$1^2-190.2*$A$2-37.2*B$1+42*A2*B$1+106.28
Definition der Spalte B2 bis B20 durch Kopieren von B2 nach unten:
=91*$A2^2+7*$B$1^2-190.2*$A2-37.2*B1+42*$A2*$B$1+106.28
Definition der Zellen C3 bis N20 durch Kopieren von B2 nach unten:
=91*$A2^2+7*B$1^2-190.2*$A2-37.2*B$1+42*$A2*B$1+106.28

Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	m\b	-1.9	-1.8	-1.7	-1.6	-1.55	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1	-0.9	-0.8
2	0.2	151.87	146.4	141.07	135.88	133.34	130.83	125.92	121.15	116.52	112.03	107.68	103.47	99.4
3	0.3	129.42	124.37	119.46	114.69	112.36	110.06	105.57	101.22	97.01	92.94	89.01	85.22	81.57
4	0.4	108.79	104.16	99.67	95.32	93.198	91.11	87.04	83.11	79.32	75.67	72.16	68.79	65.56
5	0.5	89.98	85.77	81.7	77.77	75.858	73.98	70.33	66.82	63.45	60.22	57.13	54.18	51.37
6	0.6	72.99	69.2	65.55	62.04	60.338	58.67	55.44	52.35	49.4	46.59	43.92	41.39	39
7	0.7	57.82	54.45	51.22	48.13	46.638	45.18	42.37	39.7	37.17	34.78	32.53	30.42	28.45
8	0.8	44.47	41.52	38.71	36.04	34.758	33.51	31.12	28.87	26.76	24.79	22.96	21.27	19.72
9	0.9	32.94	30.41	28.02	25.77	24.698	23.66	21.69	19.86	18.17	16.62	15.21	13.94	12.81
10	1	23.23	21.12	19.15	17.32	16.458	15.63	14.08	12.67	11.4	10.27	9.28	8.43	7.72
11	1.1	15.34	13.65	12.1	10.69	10.038	9.42	8.29	7.3	6.45	5.74	5.17	4.74	4.45
12	1.2	9.27	8	6.87	5.88	5.4375	5.03	4.32	3.75	3.32	3.03	2.88	2.87	3
13	1.3	5.02	4.17	3.46	2.89	2.6575	2.46	2.17	2.02	2.01	2.14	2.41	2.82	3.37
14	1.4	2.59	2.16	1.87	1.72	1.6975	1.71	1.84	2.11	2.52	3.07	3.76	4.59	5.56
15	1.5	1.98	1.97	2.1	2.37	2.5575	2.78	3.33	4.02	4.85	5.82	6.93	8.18	9.57
16	1.6	3.19	3.6	4.15	4.84	5.2375	5.67	6.64	7.75	9	10.39	11.92	13.59	15.4
17	1.7	6.22	7.05	8.02	9.13	9.7375	10.38	11.77	13.3	14.97	16.78	18.73	20.82	23.05
18	1.8	11.07	12.32	13.71	15.24	16.058	16.91	18.72	20.67	22.76	24.99	27.36	29.87	32.52
19	1.9	17.74	19.41	21.22	23.17	24.198	25.26	27.49	29.86	32.37	35.02	37.81	40.74	43.81
20	2	26.23	28.32	30.55	32.92	34.158	35.43	38.08	40.87	43.8	46.87	50.08	53.43	56.92

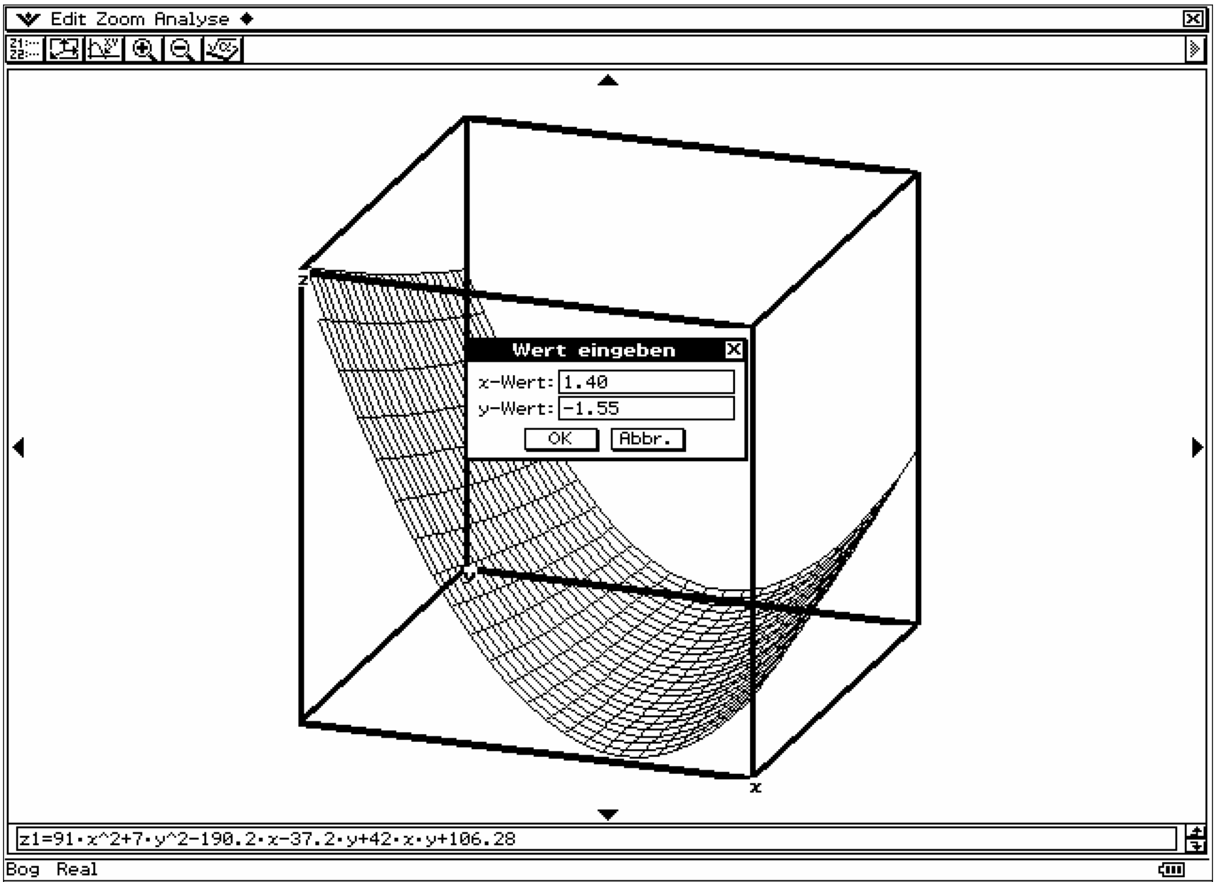
=91·$A3^2+7·C$1^2-190.2·$A3-37.2·C$1+42·$A3·C$1+106.28

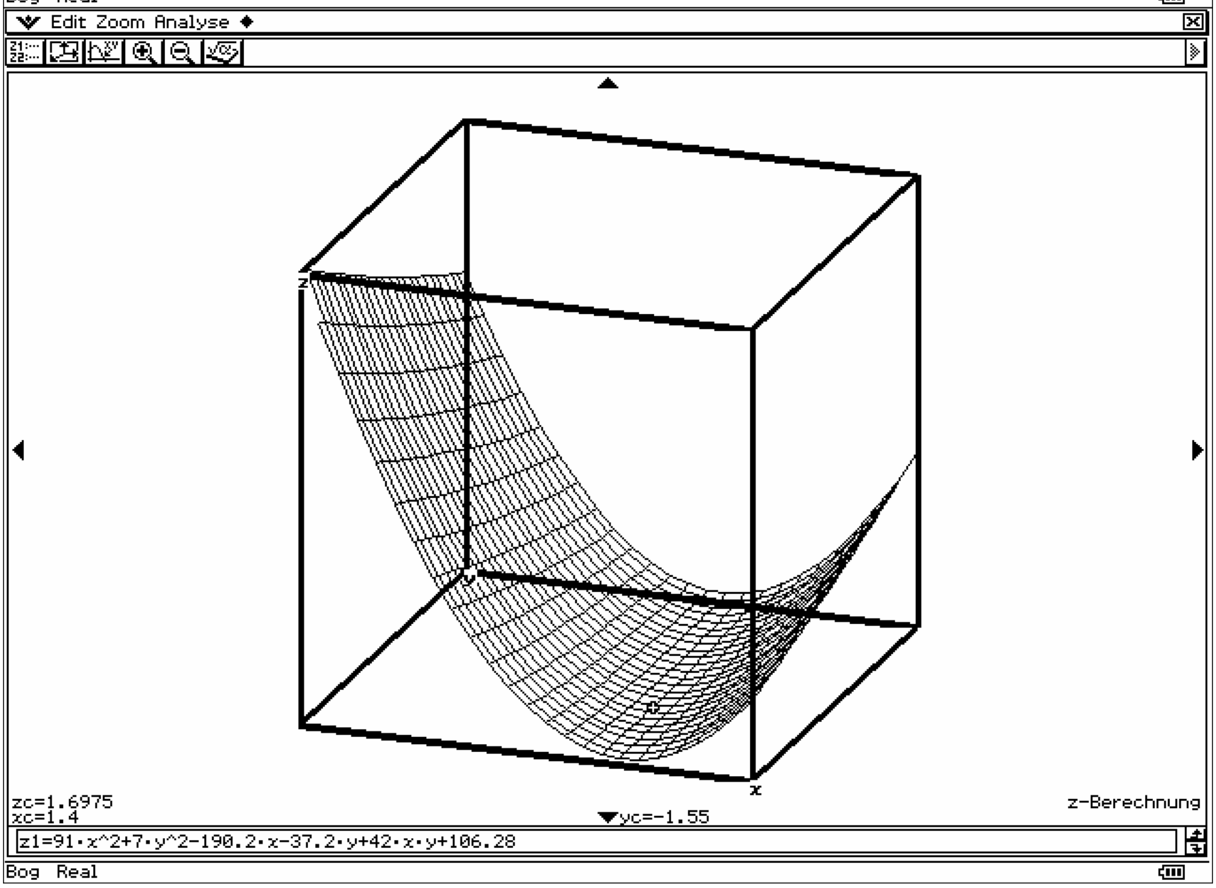
C3:N20

Das $-Zeichen bedeutet, dass sich diese Koordinate nicht ändert, ansonsten erfolgt eine dynamische Änderung. Probieren Sie es aus!

Die folgenden 3D-Grafiken beziehen sich auf die oben tabellierte gekrümmte Fläche

$z = D(m, b) = D(x, y) = 91x^2 + 7y^2 - 190.2x - 37.2y + 42x*y + 106.28$ (Jg.-St.12 T S.107)





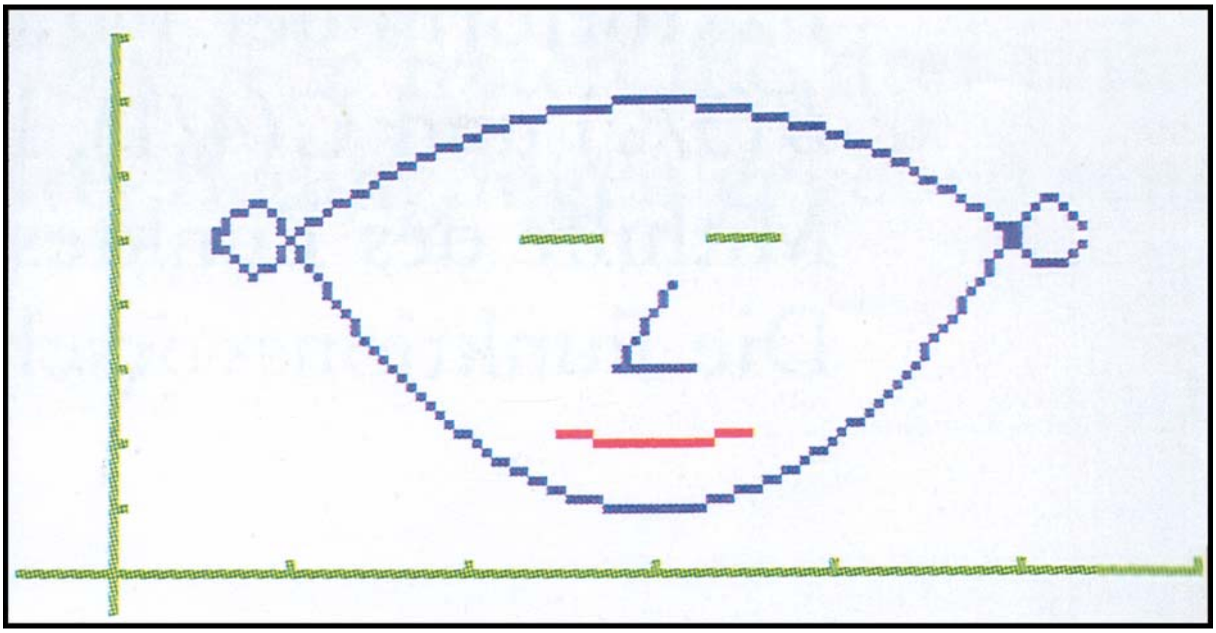
Arbeitsmaterial (Teil 3) zur Fortbildungsveranstaltung D01856

Einsatz des ClassPad 330 im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

Kl.-St. 11 S.124 (Taschenrechnergrafik mit unterschiedlichen Kurvenästen - Smiley)



Das Farbbild wurde aus dem Schulbuch herauskopiert und vergrößert.

Die ausgelesenen Daten werden zunächst in einem Arbeitsblatt im eActivity-Menü erfasst:

Datei Edit Einf. Aktion

Taschenrechnergrafik mit unterschiedlichen Kurvenästen - Smiley

S.124, AUFGABE 06

Eine Parabel ist durch drei Punkte festgelegt. Aus dem Farbbild werden die benötigten Punkte ausgelesen.
Es wird davon ausgegangen, dass die x-Achse von 0 bis 6 und die y-Achse von 0 bis 8 skaliert ist.

Kurve K1 (Kopf oben, Datenmatrix)

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K1$

Kurve K1

Kurve K2 (Kopf unten, Datenmatrix)

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K2$

Kurve K2

Kurve K3 (rechtes Ohr oben, Datenmatrix)

$\begin{bmatrix} .5 & 5 \\ .75 & 5.5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K3$

Kurve K3

Alge Dezimal Real Bog

Datei Edit Einf. Aktion

Kurve K4

Kurve K5 (linkes Ohr oben, Datenmatrix)

$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5.25 & 5.5 \\ 5.5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K5$

Kurve K5

Kurve K6 (linkes Ohr unten, Datenmatrix)

$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5.25 & 4.25 \\ 5.5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K6$

Kurve K6

Kurve K7 (Mund, Datenmatrix)

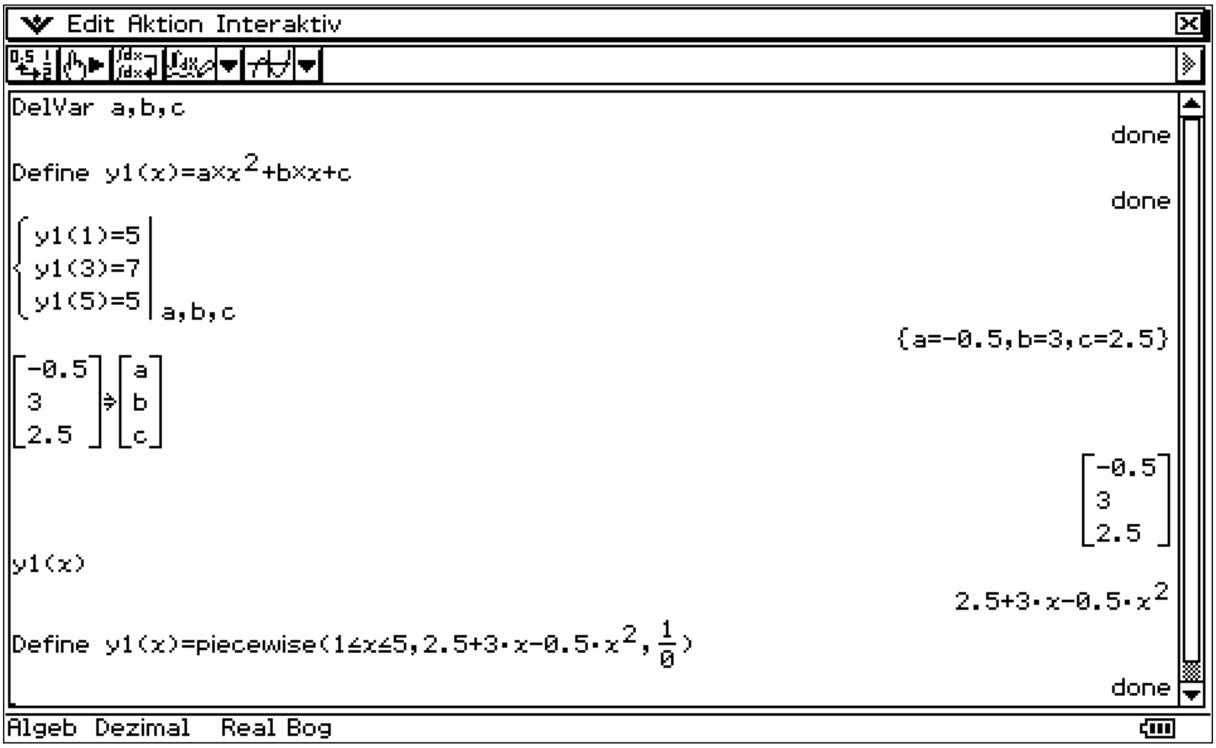
$\begin{bmatrix} 2.5 & 2.1 \\ 3 & 2 \\ 3.5 & 2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow K7$

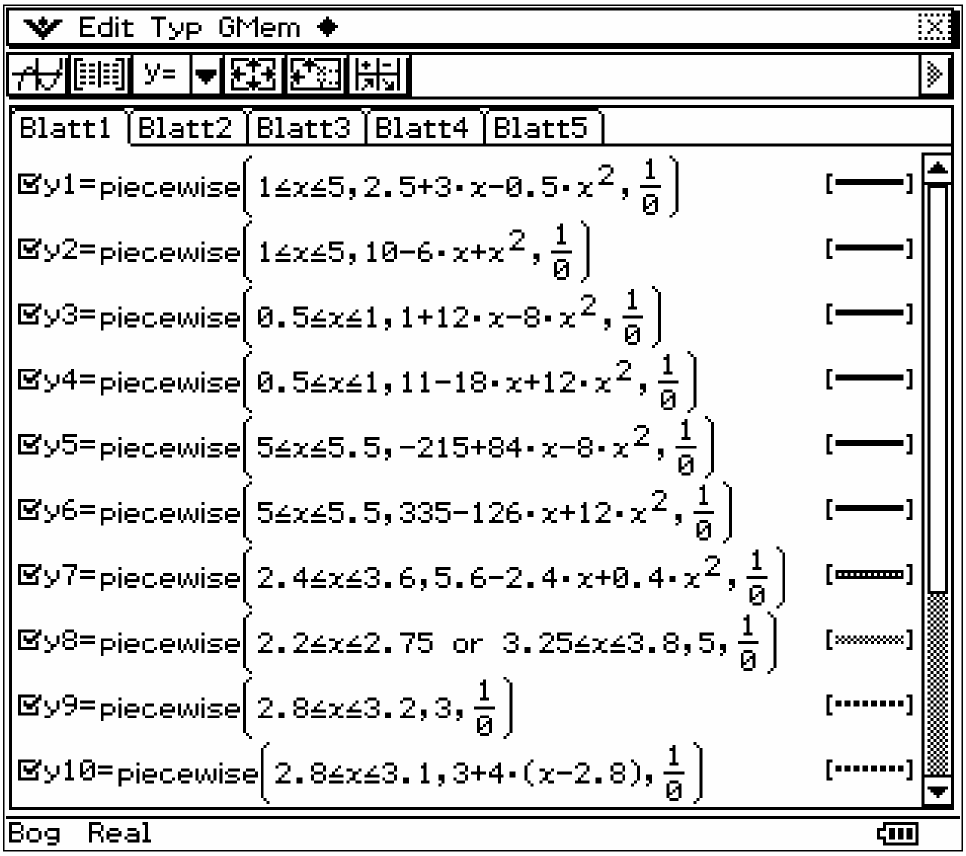
Kurve K7

Anmerkung: das Kurvenstück wurde nachträglich verbreitert auf das Intervall [2.4;3.6]

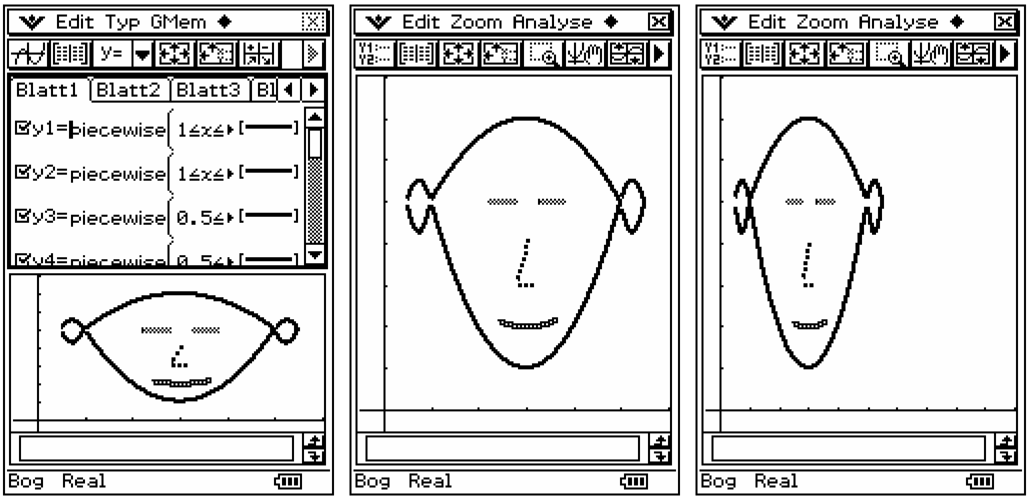
Alge Dezimal Real Bog

Berechnung der Kurvenstücke im Main-Berechnungsstreifen:
z.B. y1(x)



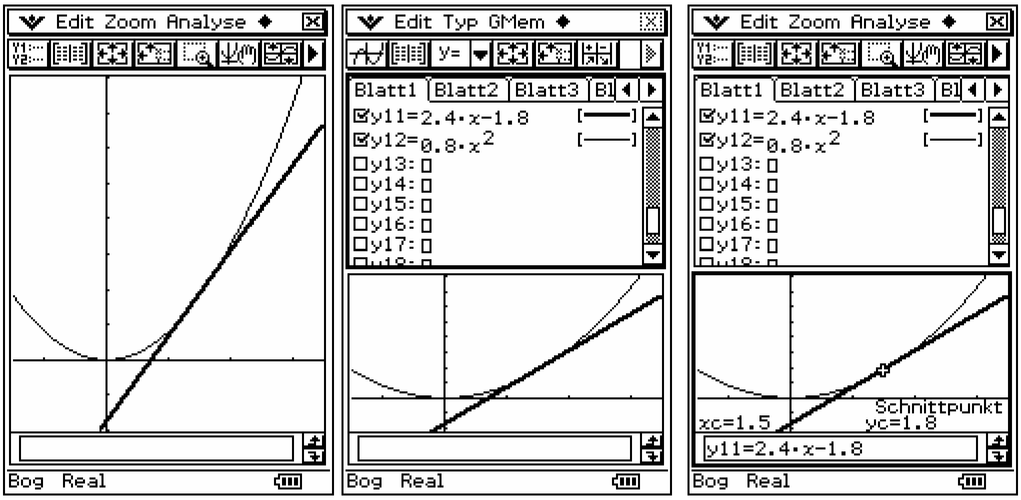


Übersicht über die Funktionen und Grafikstile.

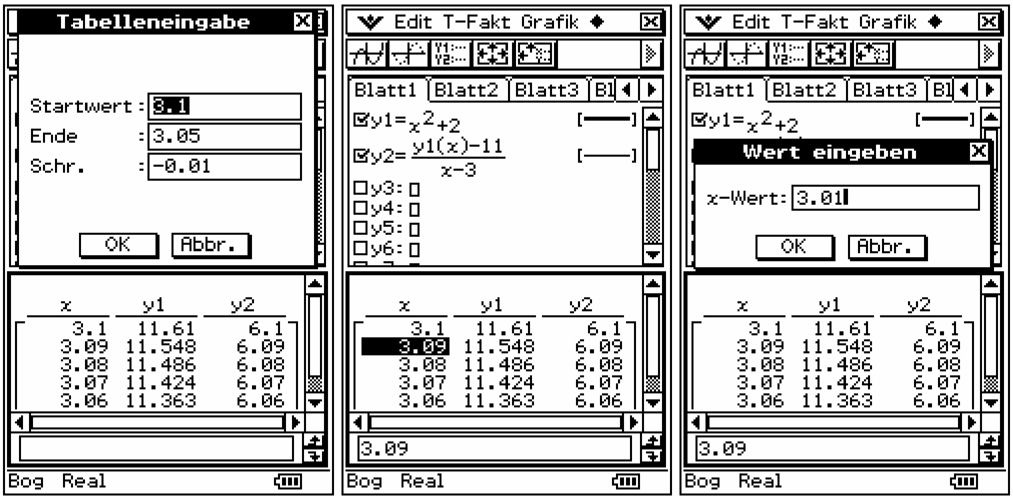


Eine mögliche Lösung mit dem ClassPad (mit Bildverzerrung durch andere Skalierung)

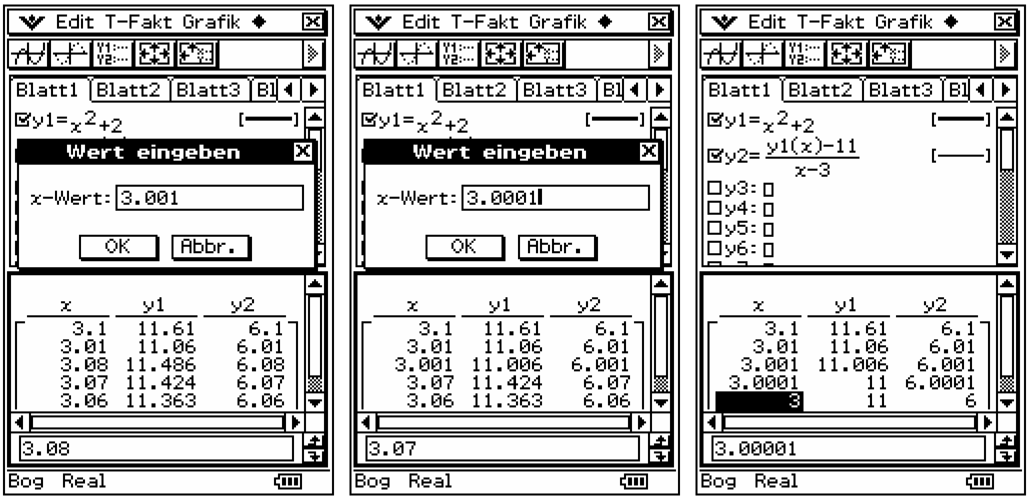
Weiter: S.129 (Parabel und Tangente)



S.133 (Differenzenquotient – Sekantenanstieg – Grenzfall)

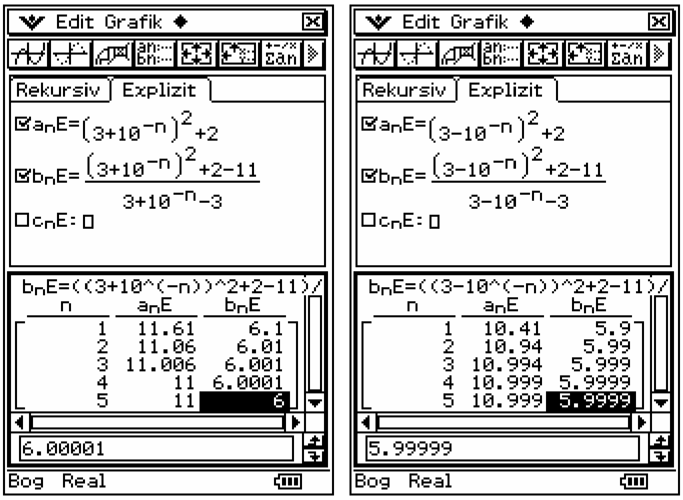


Die Tabellierung wurde hier im Grafik&Tabellen-Menü vorgenommen und auf die manuelle Eingabe der x-Werte ausgerichtet (da hier nicht mit variabler Schrittweite automatisch tabelliert werden kann). Zuerst wurde eine Tabelle automatisch generiert und dann per Hand modifiziert.

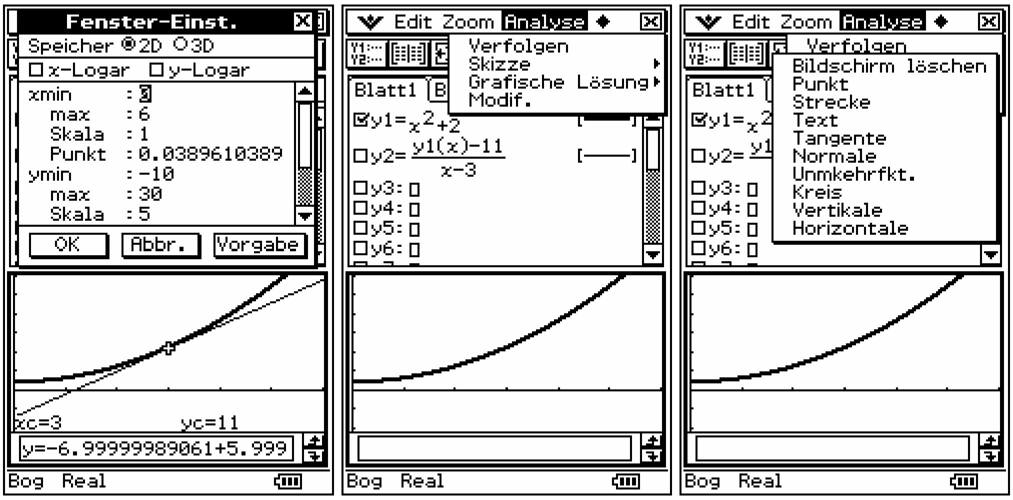


Um einen x-Wert individuell zu ändern, ist dieser zu markieren. Mit Eingabe des neuen Wertes öffnet sich das Dialogfenster!

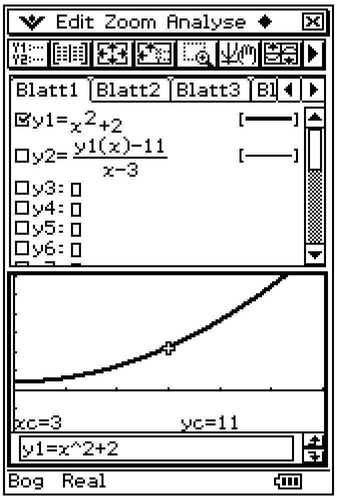
Die Tabellierung (Sekantenanstieg) ist auch im Zahlenfolgemenü möglich:

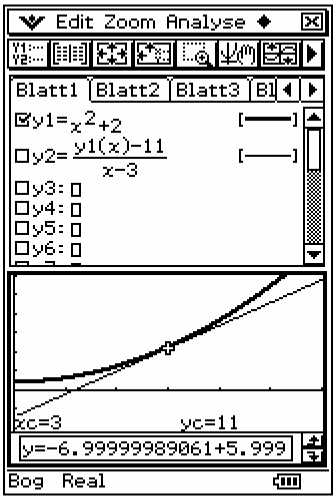


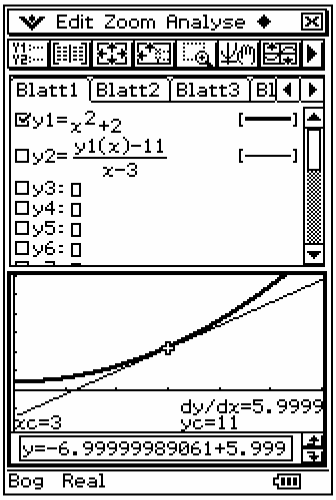
Das Zeichnen der Tangente kann über das Skizze-Untermenü erfolgen:

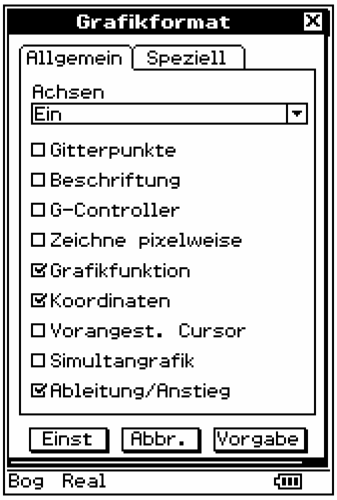


Tangente auswählen, dann den Cursor positionieren und EXE drücken:



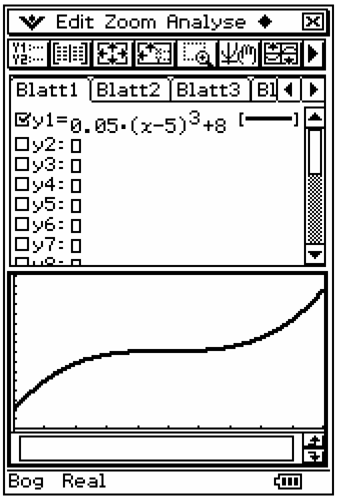


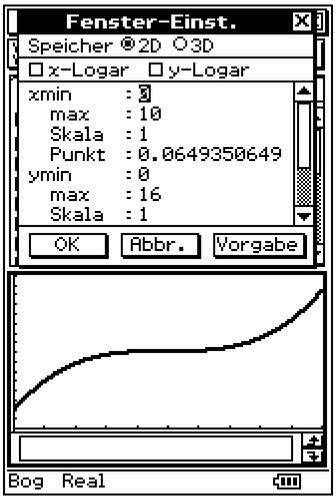




Einstellung im Grafikformat, damit dy/dx im Bild erscheint!

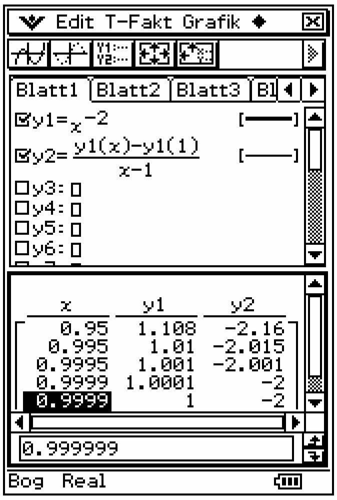
S. 136 AUFGABE 07 b)

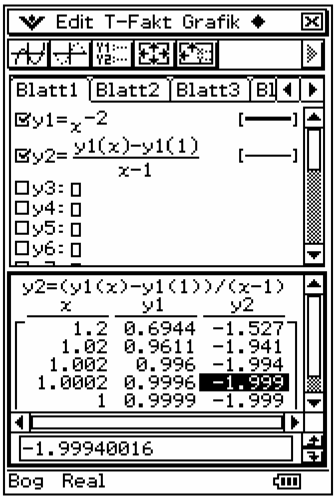


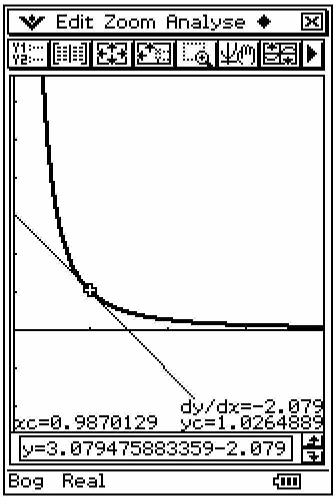


Eine mögliche Definition von y(x).

Weiter:
S. 139f, Untersuchung des Anstieges der Funktion $y = x^{-2}$
(Tabellierung des Anstieges der Sekante mit manueller Eingabe der x-Werte)

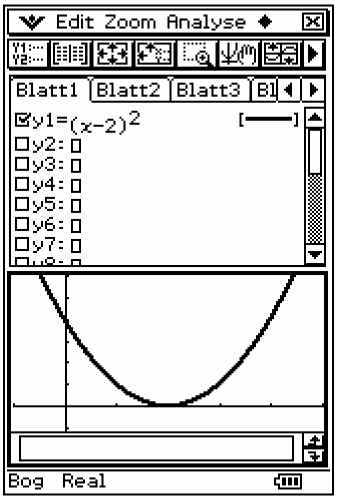


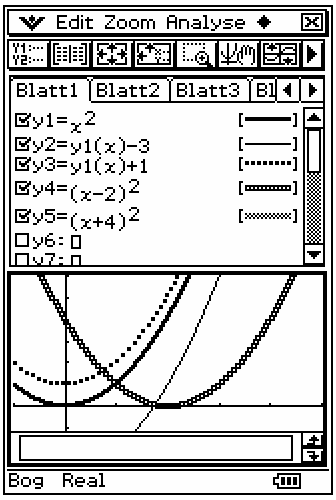


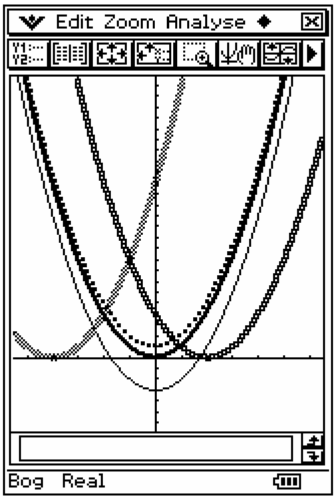


Die Tangente wurde wieder über das Skizzen-Untermenü erzeugt.

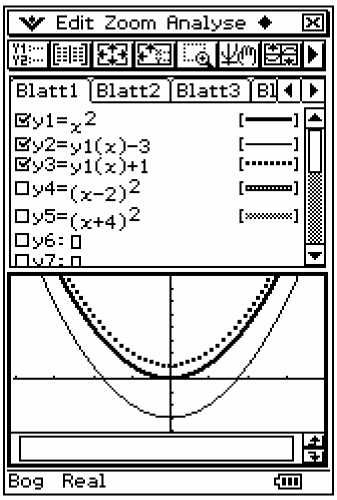
S. 142ff, Abbildungen von Kurven

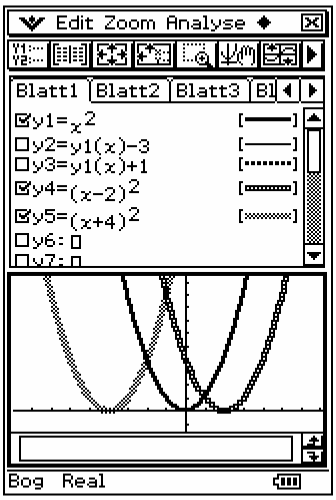




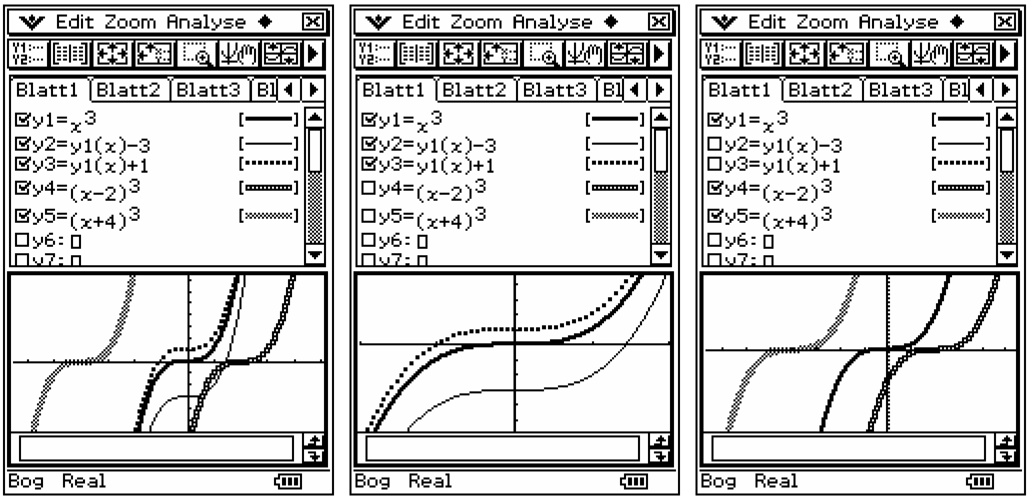


Nutzen Sie die Zoom-Funktion und die „Hand“ (Verschiebefunktion)

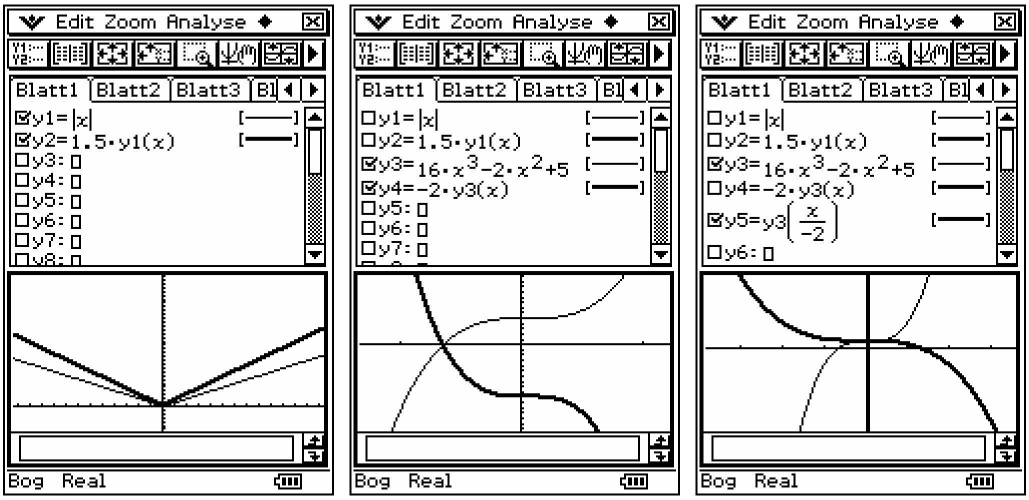


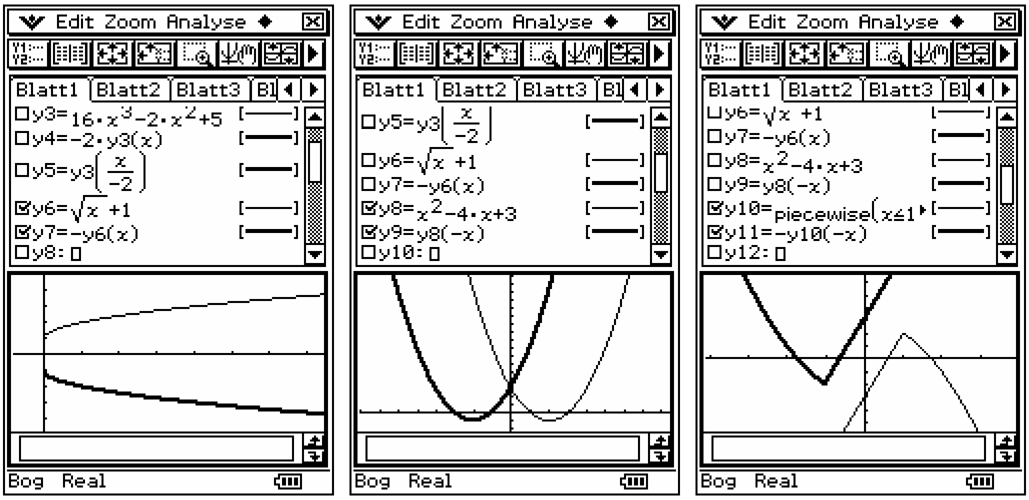


Jetzt wird der Exponent 2 durch 3 ersetzt:



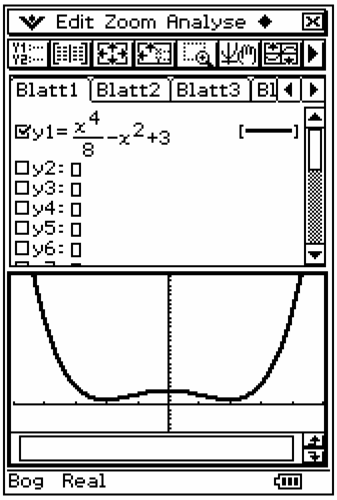
S.146ff (Streckung in y-Richtung)

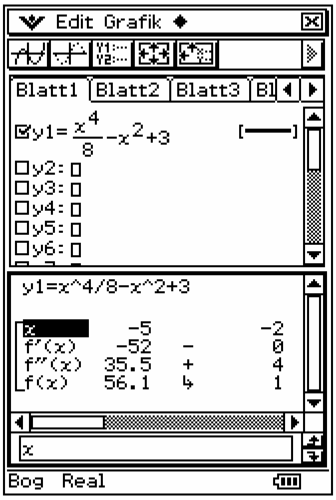




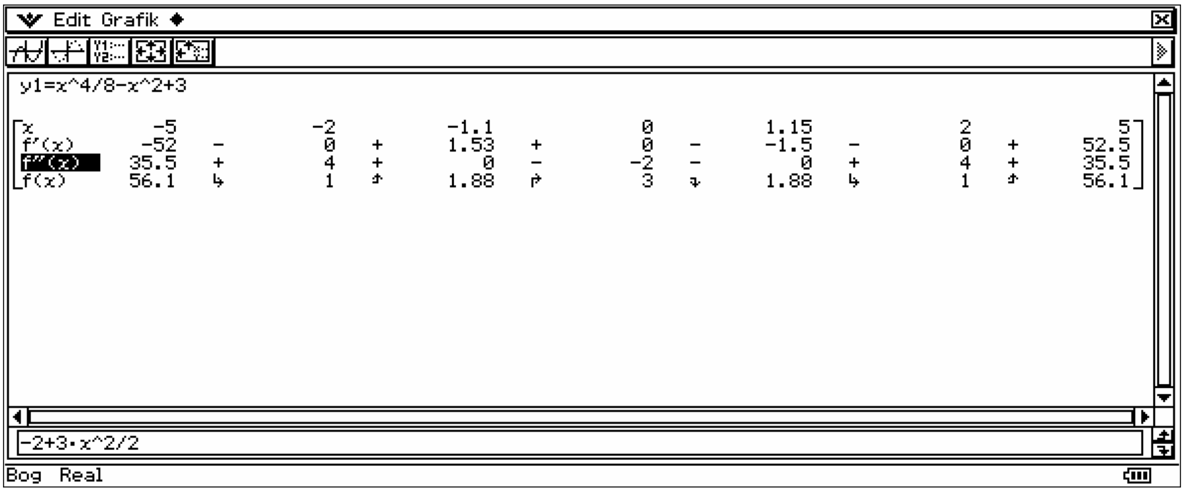
y10(x) = piecewise(x≤1, 5*x-3, -x^2+3) (Erneute Nutzung der piecewise-Funktion)

Für die Auswertung der ganzrationalen Funktionen kann der ClassPad eine Übersichtstabelle generieren (Ergebnistabelle, Summary-Table): S. 172

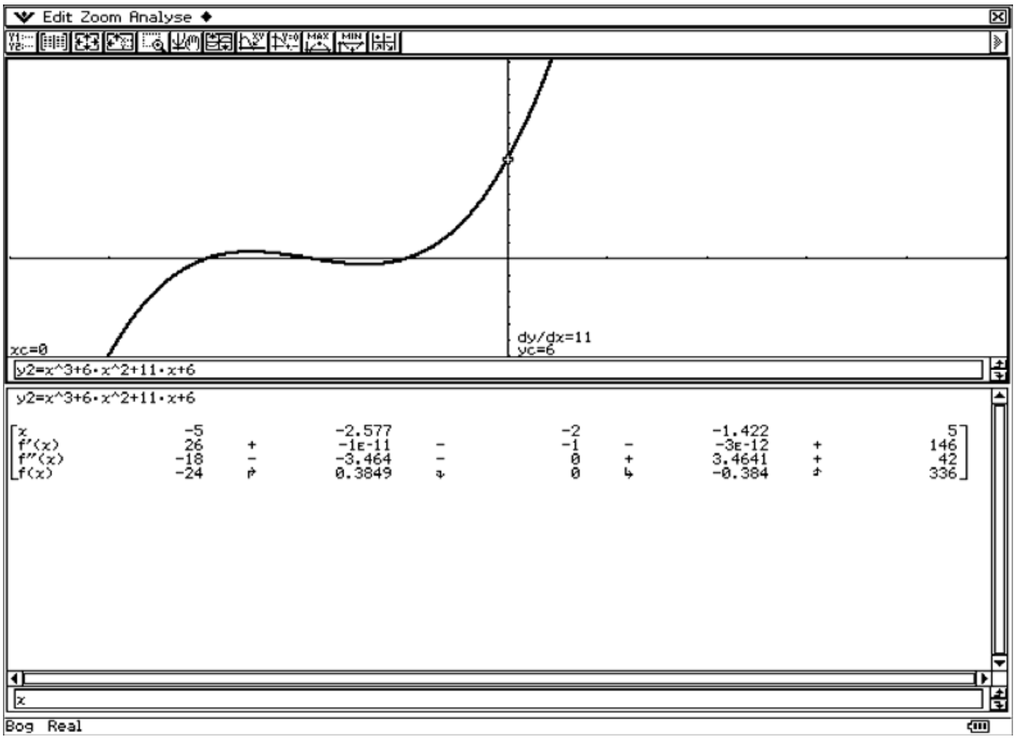




Ergebnistabelle ausführlich:

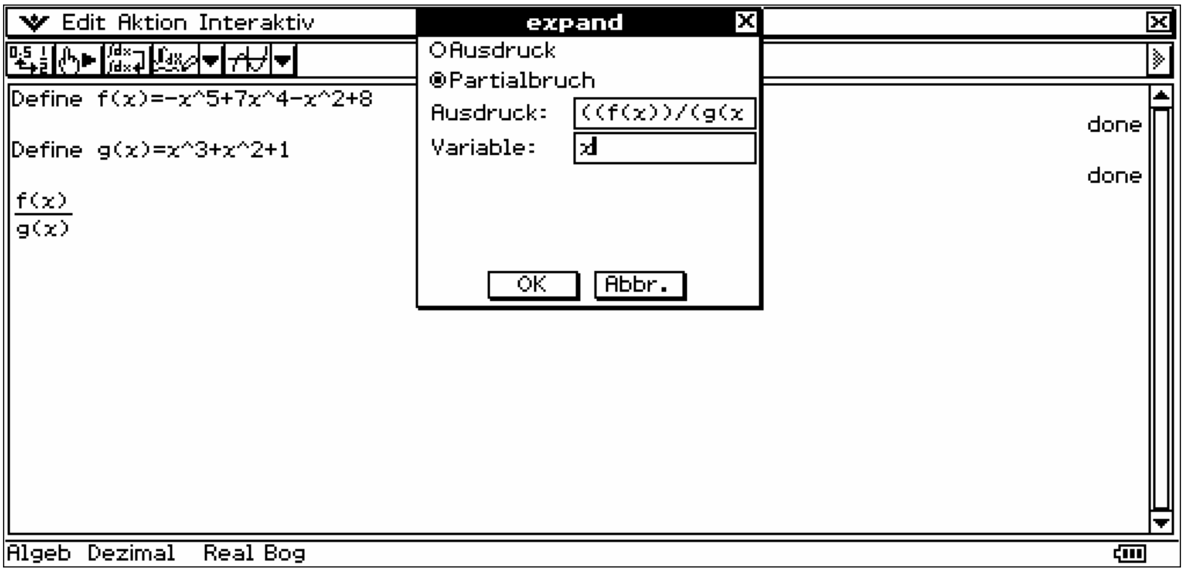


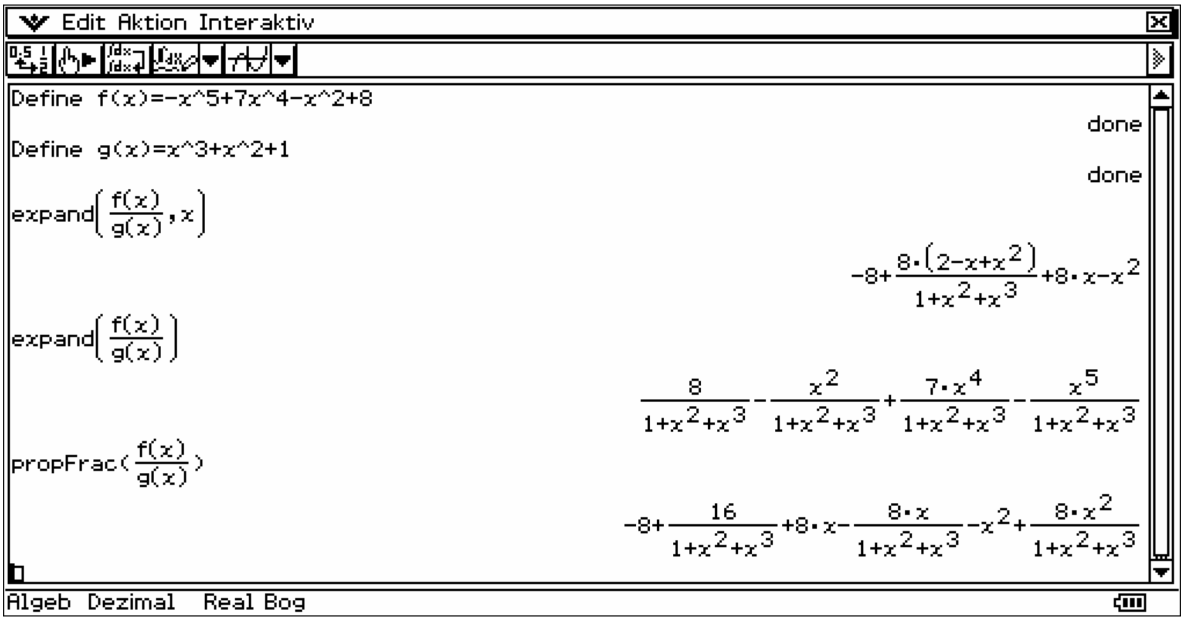
Die Tabelle gibt uns Informationen über den Anstieg und die Krümmung der Funktion. Extremwerte und Wendepunkte werden angegeben.



S. 172

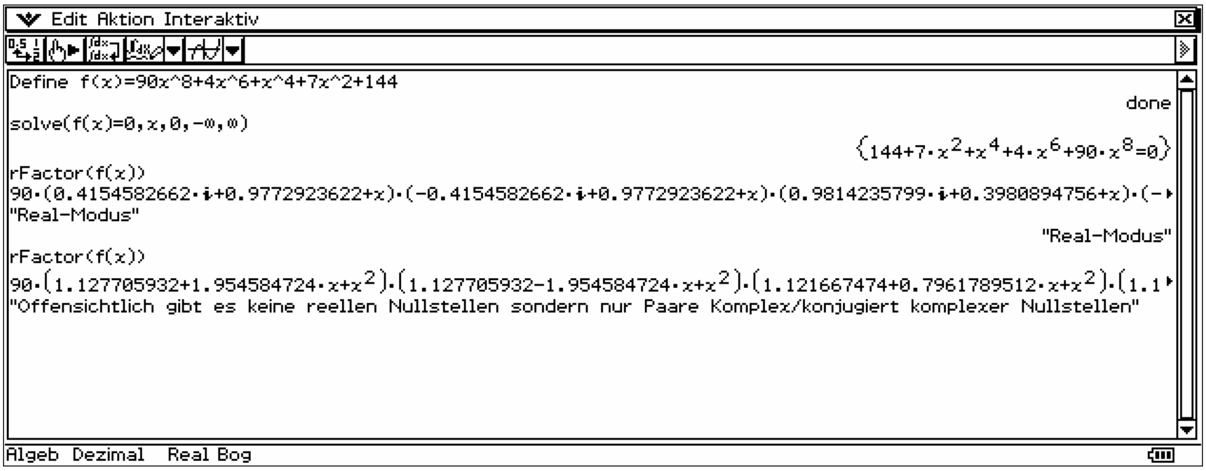
S. 180, Polynomdivision mit CAS, AUFGABE 03 e) (Interaktiv-Untermenü nutzen)



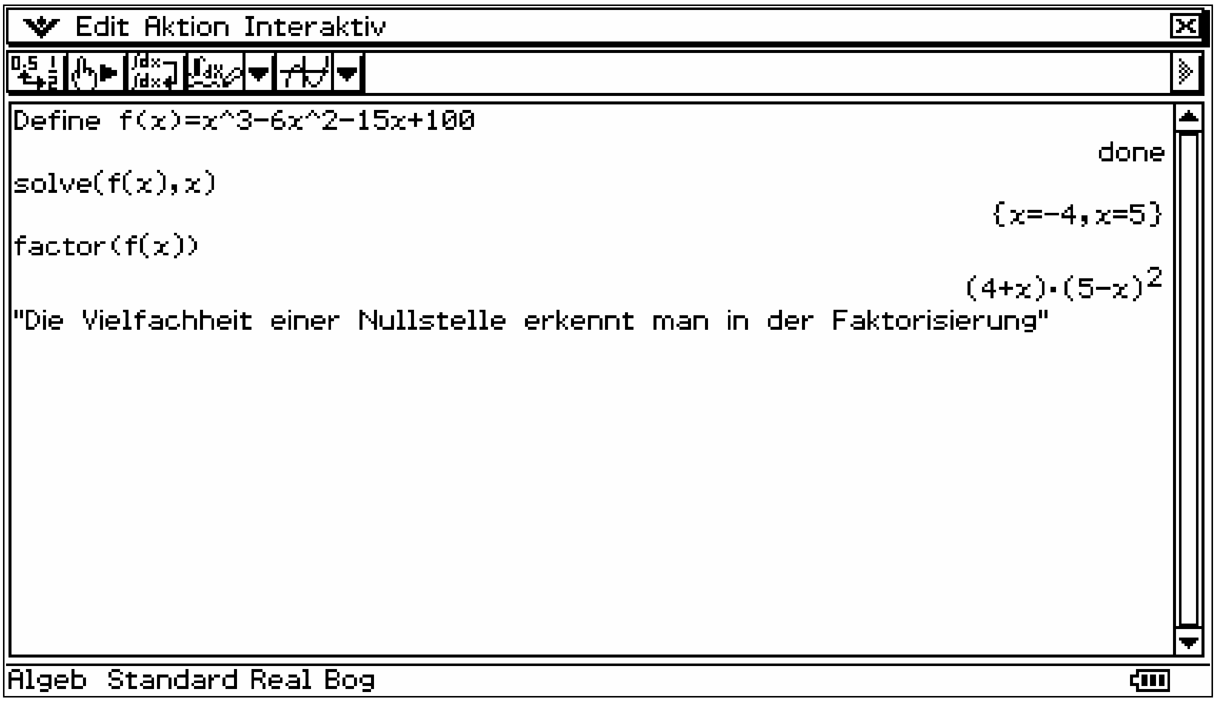


Die Befehle haben unterschiedliche Wirkung!

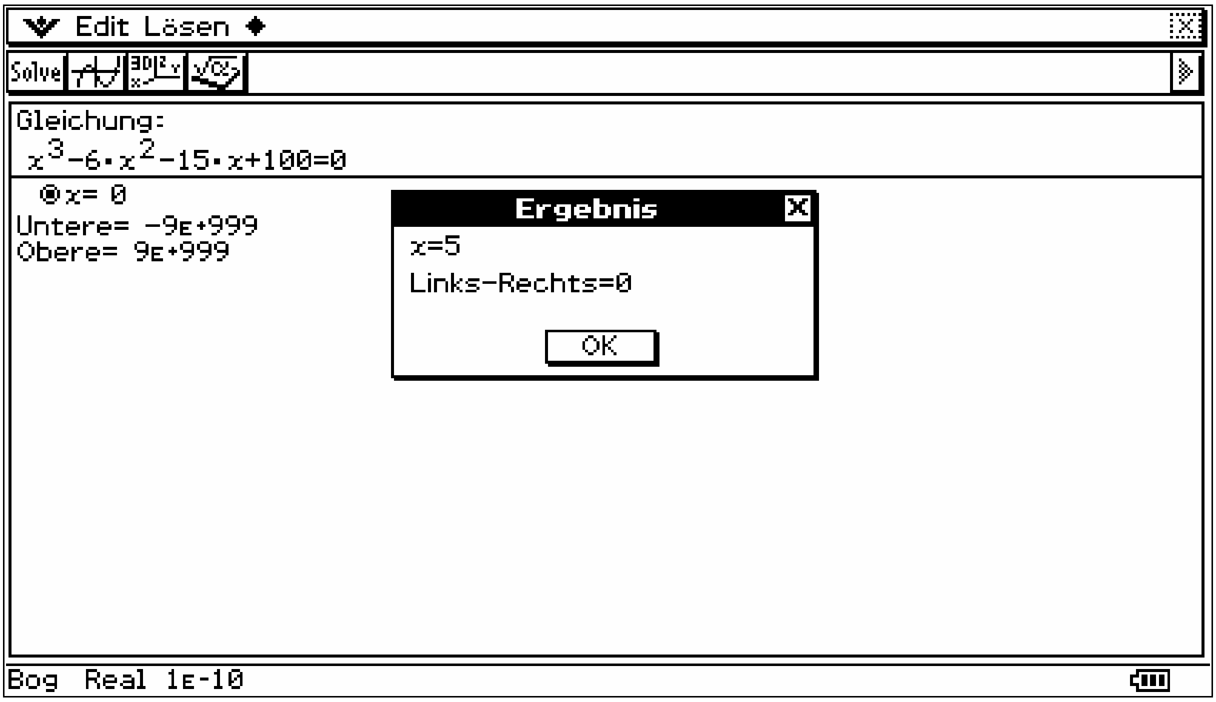
S. 183 Nullstellensuche AUFGABE 03 c)



Ermittlung reeller Nullstellen (Lösung nichtlinearer Gleichungen), S. 189

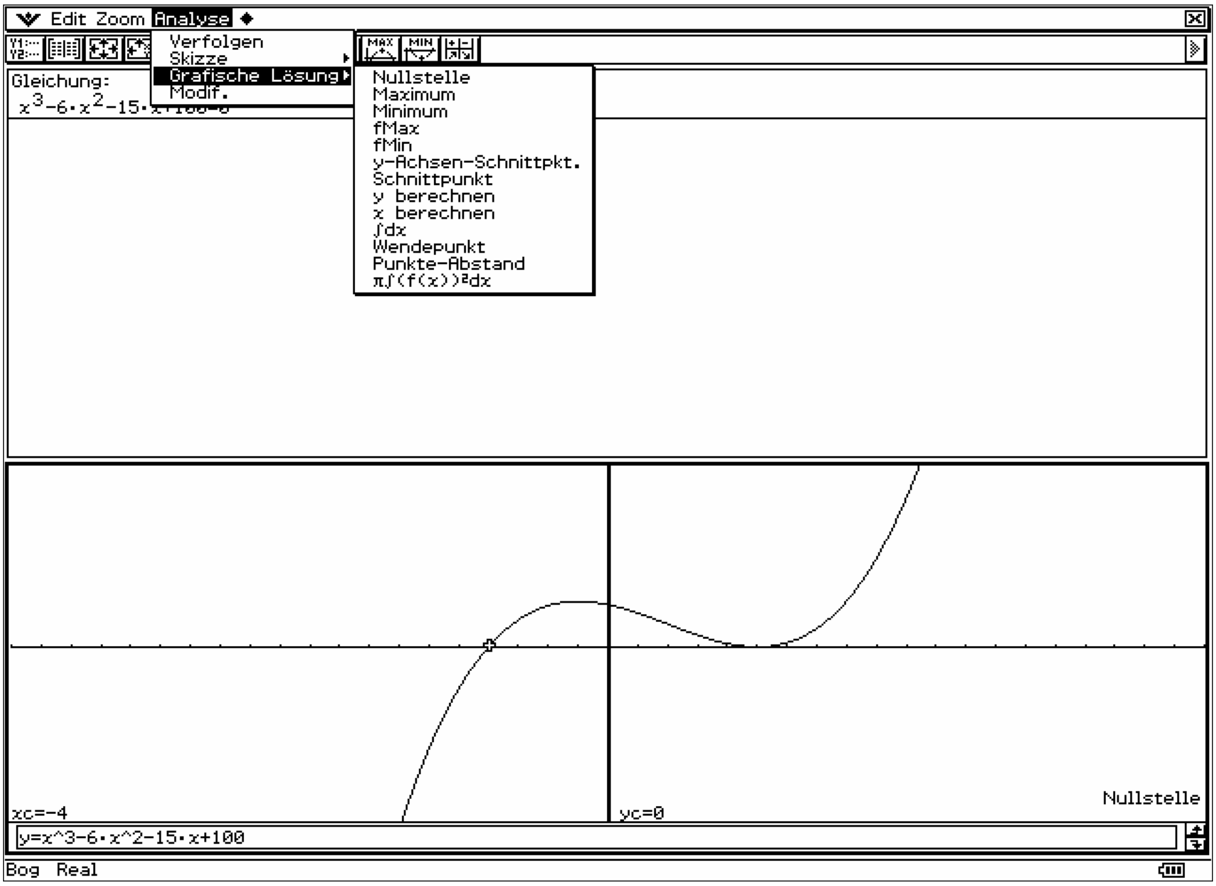


Lösung im Main-Menü



Lösung im Menü „Numerische Lösung“

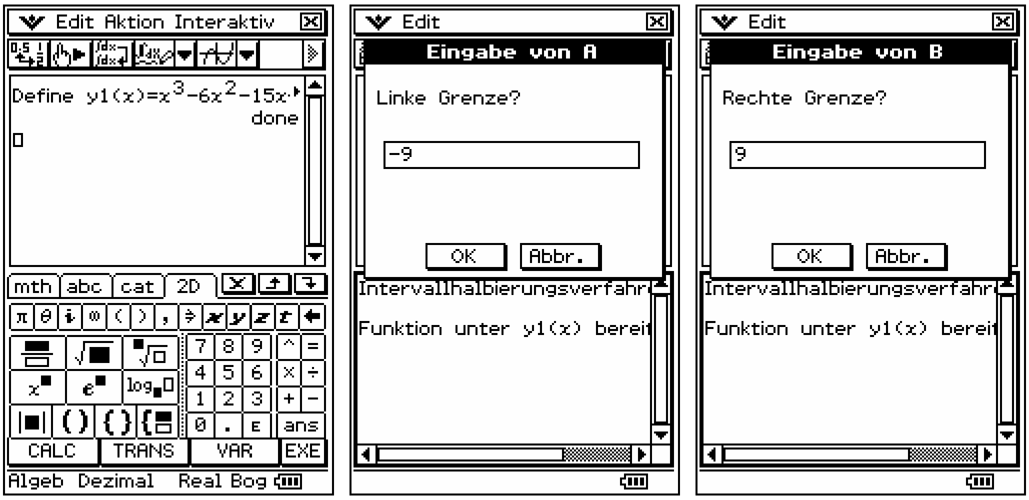
Schließlich kann auch wieder eine grafische Lösung gefunden werden:

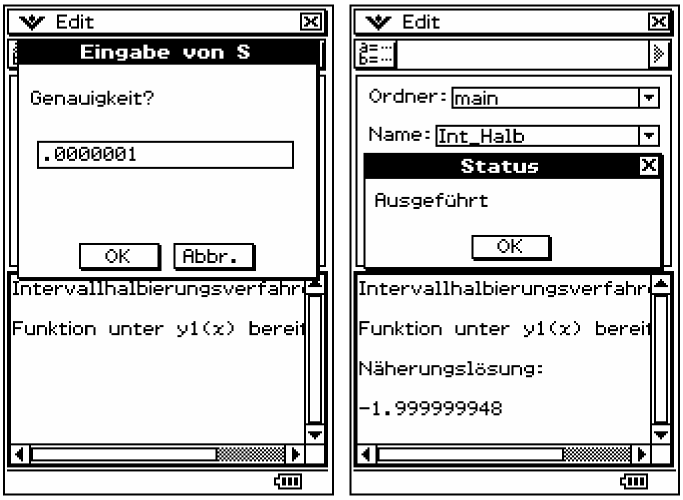


Programmierung von Näherungsverfahren: S. 193ff


```
Local M,X,U,V
ClrText
Print "Intervallhalbierungsverfahren":Print " "
Print "Funktion unter y1(x) bereitgestellt!"
Input A,"Linke Grenze?","Eingabe von A"
Input B,"Rechte Grenze?","Eingabe von B"
Input S,"Genauigkeit?","Eingabe von S"
While (B-A)/2>S
 A+(B-A)/2⇒M:M⇒X:y1(X)⇒U:A⇒X:y1(X)⇒V
 If U×V>0
 Then
 M⇒A
 Else
 M⇒B
 IfEnd
WhileEnd
A+(B-A)/2⇒M
Print " ":Print "Näherungslösung:":Print " "
Print approx(M)
Stop
```

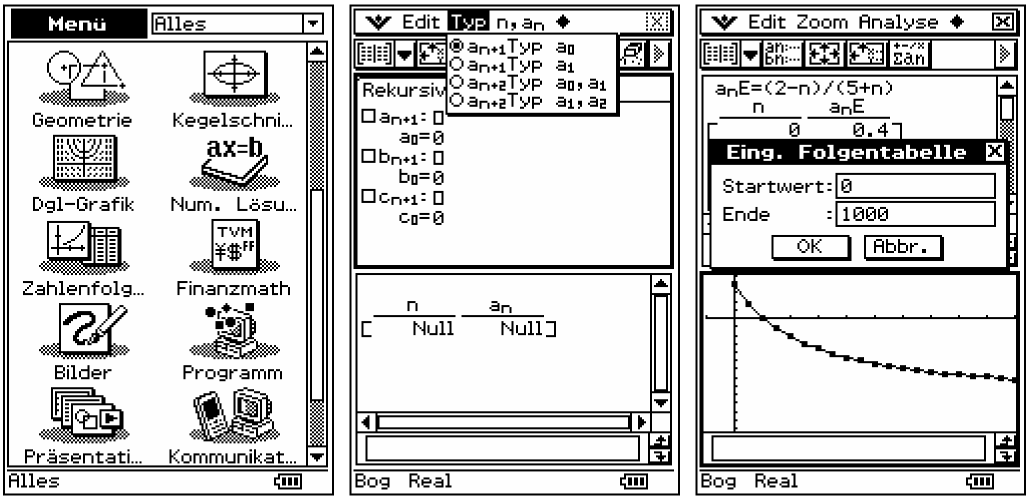
Die Eingabe erfolgt über Dialogfenster. Probieren Sie es aus!

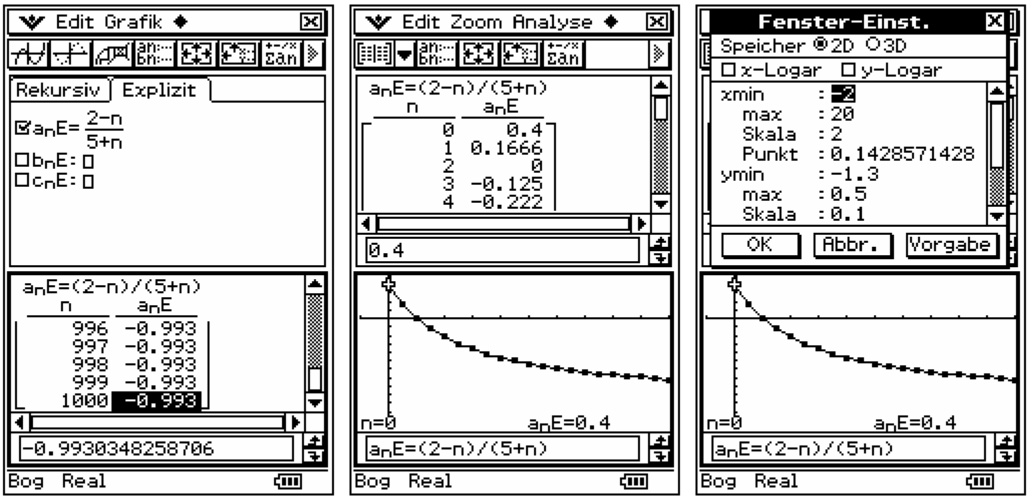




Modifizieren Sie das Programm!

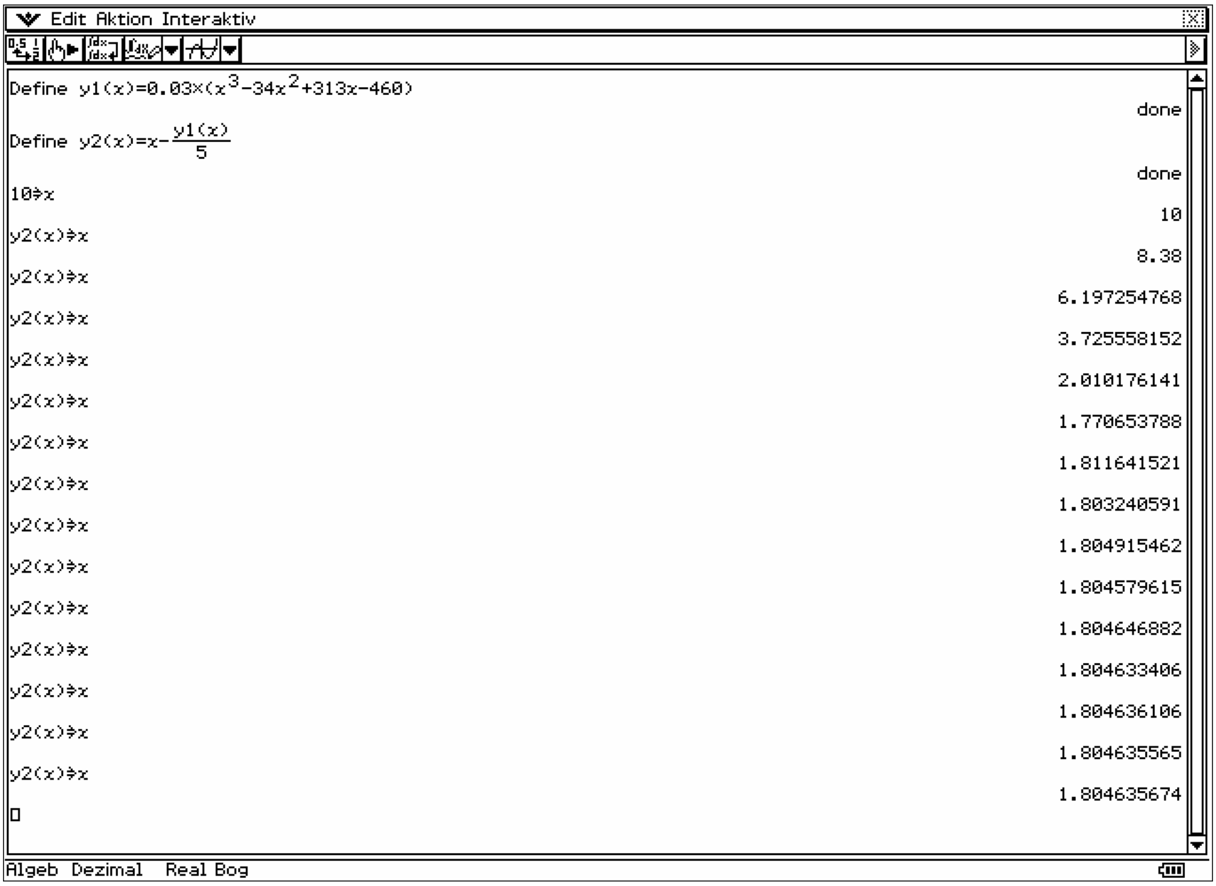
S. 196, Zahlenfolgen (Rekursionsformeln) im Zahlenfolge-Menü





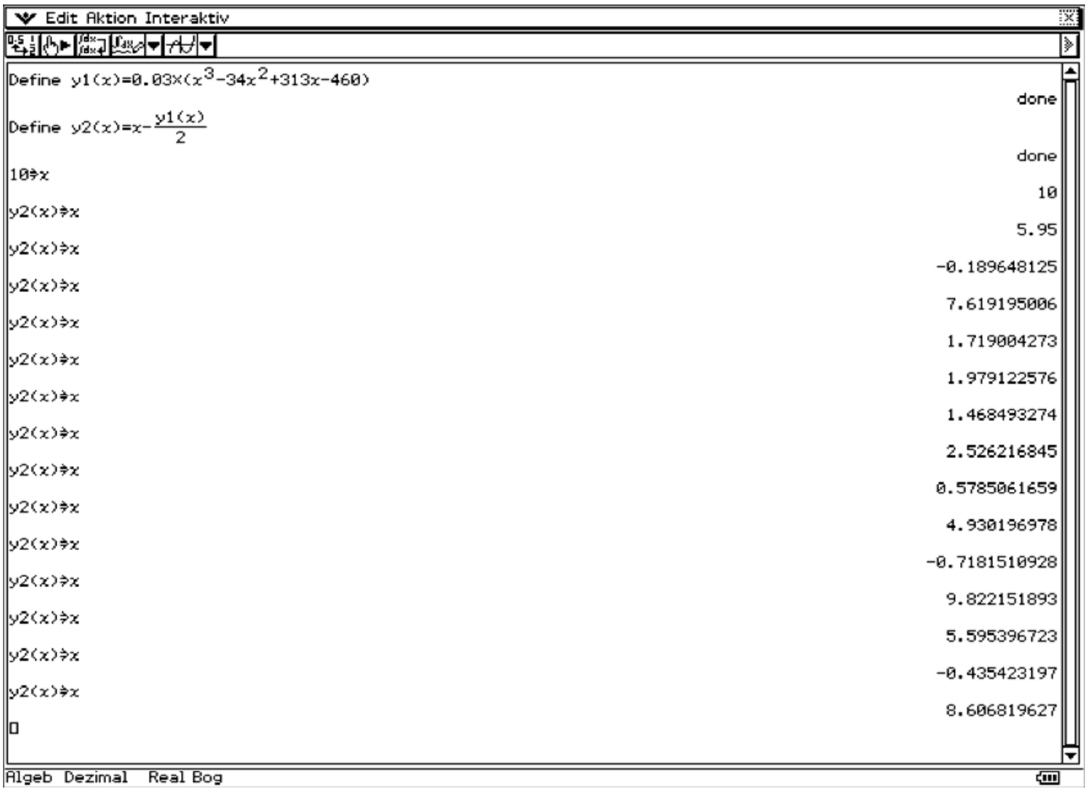
Wählen Sie ein passendes Betrachtungsfenster aus!

S. 198ff, Sägezahnverfahren

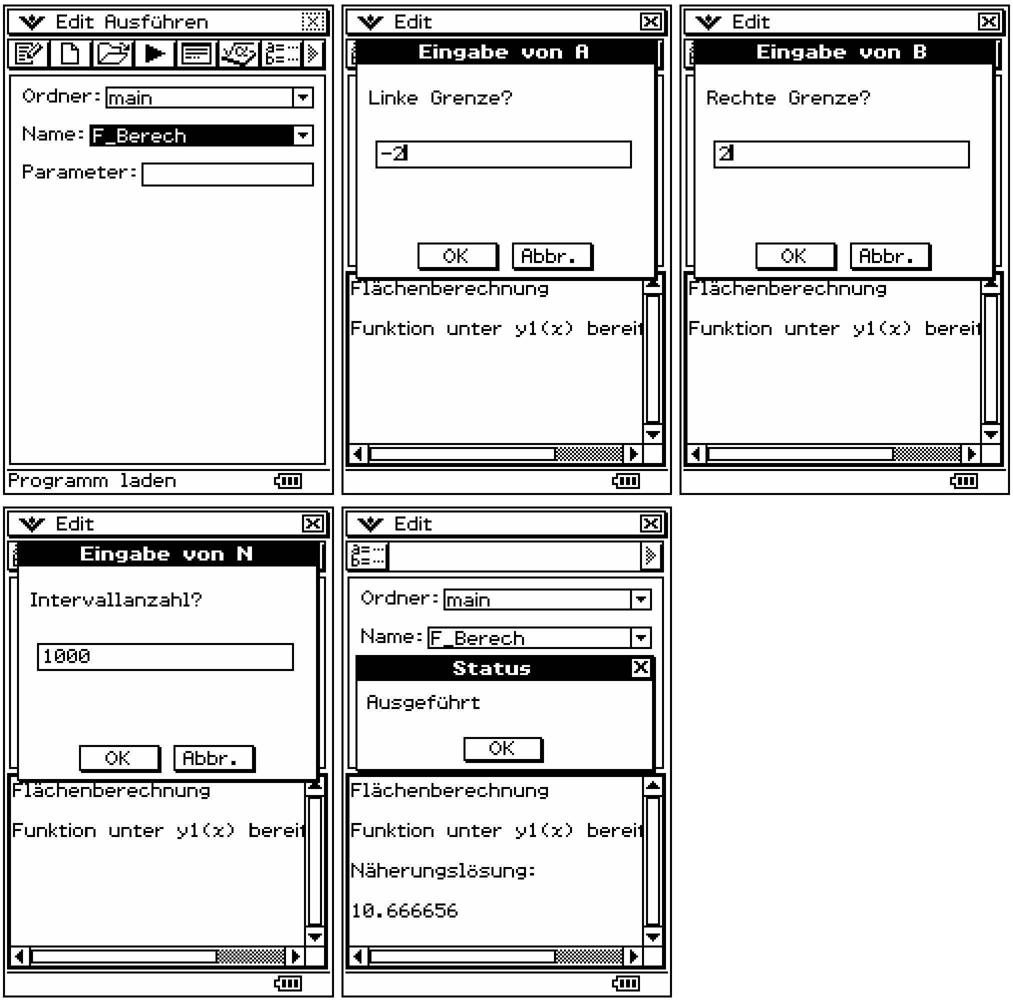


Wiederholtes Drücken der EXE-Taste reproduziert den vorherigen Befehl!

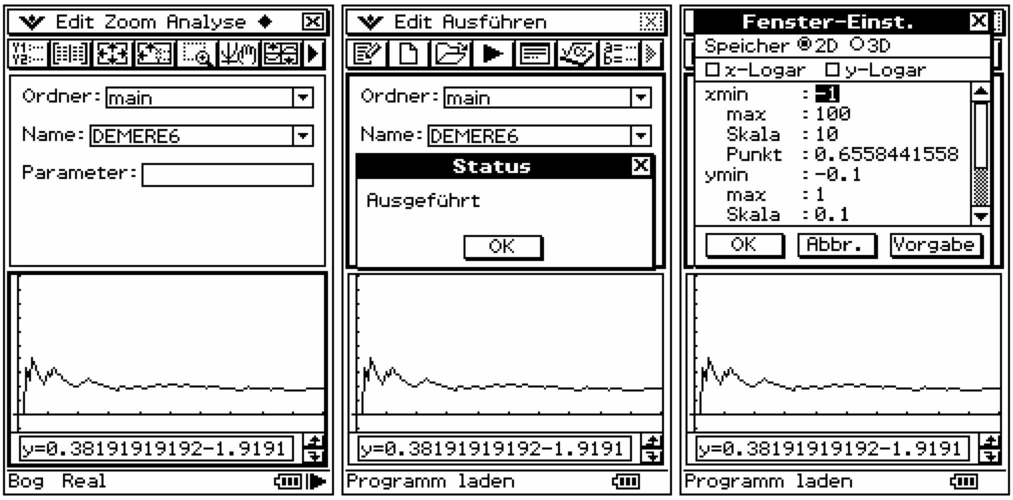
Veränderung der Steigung von 5 auf 2 (S. 200 unten): das Verfahren divergiert nun offenbar:

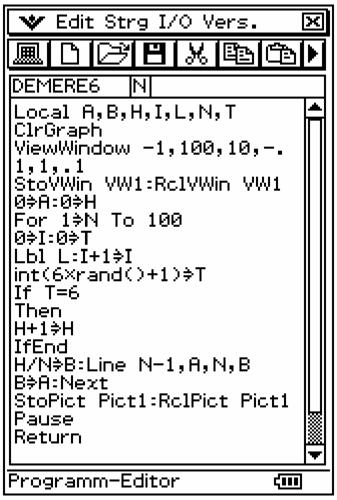


S. 202, Flächenberechnungen (Approximation mit Rechtecken)

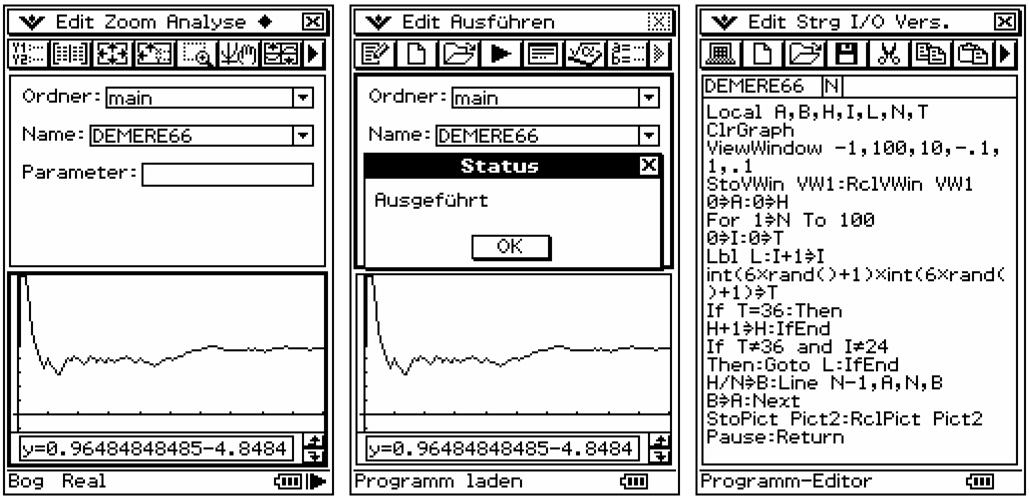


S. 260, Wahrscheinlichkeiterechnung (Würfelprogramme)





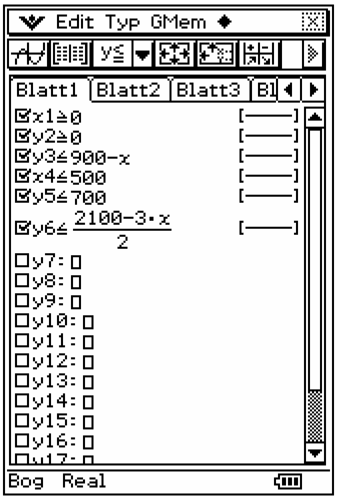
rand( ) ohne Argument erzeugt eine Zufallszahl aus]0;1[.

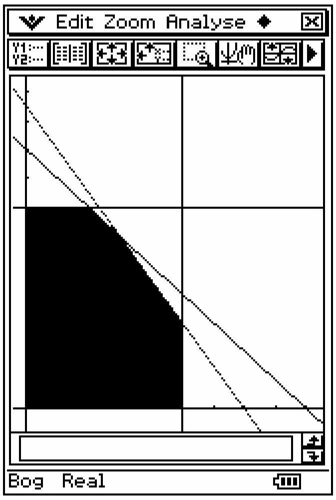


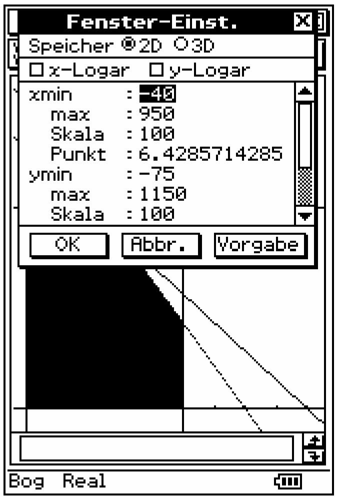
Viel Spaß beim Testen der Programme!

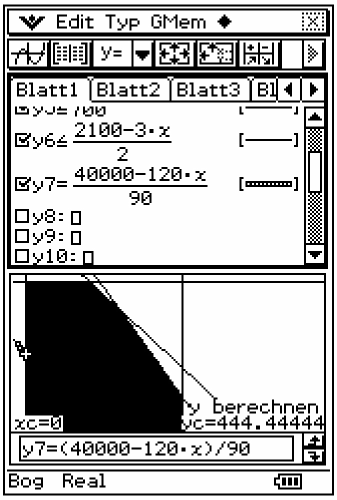
Abschließend betrachten wir lineare Optimierungsprobleme (Ungleichungsgrafik) S.291ff

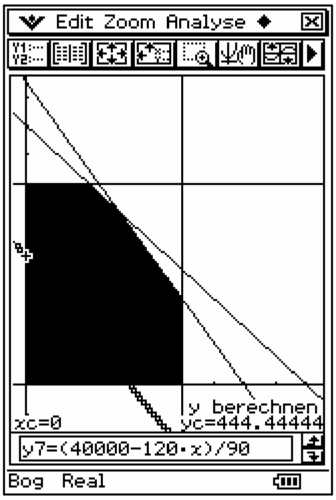
Hierbei: x1 entspricht x und x2 entspricht y



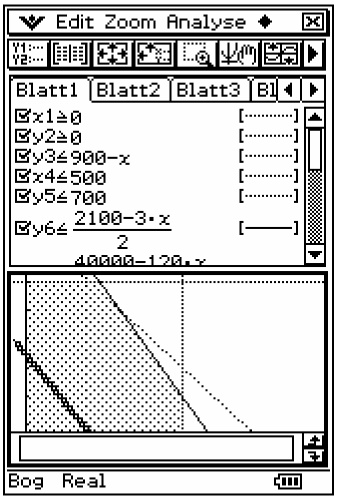


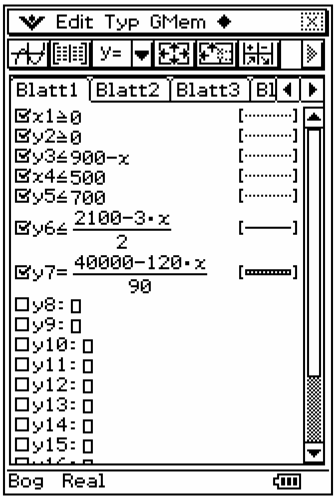


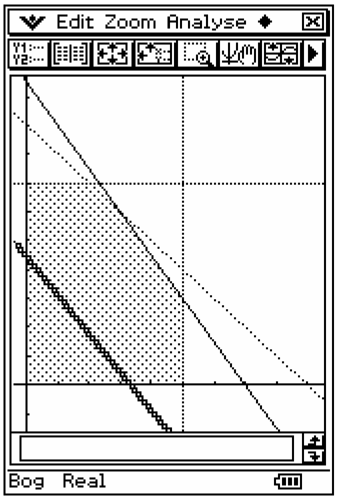




mit Zielfunktion







Mit veränderter Schattierung wird es noch eindrucksvoller!

Prof. Dr. Ludwig Paditz 27.02.2008

Arbeitsmaterial (Teil 4) zur Fortbildungsveranstaltung D01856

Einsatz des ClassPad 330 im Mathematikunterricht des Beruflichen Gymnasiums (Bausteinkurs)

Inhaltlich: Einführung der CAS-GTR am berufl. Gymnasium Sachsen im Zusammenhang mit der Einführung neuer Schulbücher von Bildungsverlag EINS, die kürzlich erschienen sind:

Kl.-stufe 11
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21503.pdf
Jg.-stufe 12/13
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21523.pdf
bzw.
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21525.pdf
und
http://vm-wkweb2.digital-spirit.de/bv1web/assets/Probeseiten/427-21543.pdf

1) Lösungsverfahren für (parameterbehaftete) lineare Gleichungssysteme:

Kl.11, S.92ff (Kap. 2.8 und 2.9), Jg.12, S.8ff (Kap. 1 und 5), Jg.13 NT, S. 79ff (Anwendungen)

a) Notationen von LGS:

i) in Einzelgln. (Jg.12, S.9 o.):

$$-3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 23 \quad (g1)$$
$$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 11 \quad (g2)$$

ii) als Vektorgl.:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

als Linearkombination (Jg.12,tech.FR, S.283): $x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 + x_4 \cdot \vec{a}_4 + 1 \cdot \left(-\vec{b}\right) = \vec{o}$

iii) als Matrixgl.:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & -2 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

b) denkbares Lösungsverhalten eines LGS:

keine Lös. (unlösb. LGS), genau eine Lös. (eind. lösb. LGS), unendl. viele Lös. (mehrd. lösb. LGS)

c) Lösbarkeitskriterien:

i) $\underline{A}$ reguläre Matrix, d.h. quadratische Matrix und $\det(\underline{A}) \neq 0 \Rightarrow$ eind. Lös. $\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ bzw. Cramer'sche Regel anwendbar.

ii) $\underline{A}$ singuläre Matrix, d.h. quadr. Matrix u. $\det(\underline{A}) = 0$ oder $\underline{A}$ nichtquadratisch ($\det(\underline{A})$ nicht def.)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{keine Lös.: } \mathrm{Rg}(\underline{A}) < \mathrm{Rg}(\underline{A},\vec{b}),\ \vec{b} \text{ lin. unabhängig von } \vec{a}_1 \text{ bis } \vec{a}_4 \text{ (Vektoren in } \underline{A}\text{)}, \\ \text{Lös. vorhanden: } \mathrm{Rg}(\underline{A}) = \mathrm{Rg}(\underline{A},\vec{b}),\ \vec{b} \text{ lin. abhängig von } \vec{a}_1 \text{ bis } \vec{a}_4 \text{ (Vektoren in } \underline{A}\text{)}. \end{cases}$$

(Jg. 12, tech. FR, S.287, Satz 5.4 u. Def. 5.3, $\mathrm{Rg}(\underline{A})$ … Rang der Matrix $\underline{A}$.)
Rang … Anzahl der lin. unabh. Vektoren (Zeilen oder Spalten) in der Matrix $\underline{A}$ bzw. $\underline{A},\vec{b}$.

Hinweis: $\underline{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ und $\underline{A}, \vec{b} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{b})$ (sogen. erweiterte Matrix)

Sei $\underline{A} \in \mathfrak{M}(n,m)$ mit $m \le n$, d.h. $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, dann ist das LGS
eindeutig lösbar, falls $Rg(\underline{A}) = Rg(\underline{A},\vec{b}) = m$ und
mehrdeutig lösbar, falls $Rg(\underline{A}) = Rg(\underline{A},\vec{b}) = r < m$ (m-r Unbekannte frei wählbar) gilt.

Ein homogenes LGS ist stets lösbar, da immer $Rg(\underline{A}) = Rg(\underline{A},\vec{o})$ gilt ($\vec{o}$ … Nullvektor).

d) Lösungsmethoden:

Durch geeignete Umformungsschritte erfolgt Übergang zu äquivalenten LGS, aus denen schließlich die Lös. sofort abgelesen werden kann.

Einzelschrittverfahren: Gauß'sche Algorithmus oder Austauschverfahren für $\underline{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} = \vec{o}$
(letzteres, vgl. Simplexverfahren Kl.11 S.302, freie Pivotwahl)

Spezielle Verfahren: Inverse Matrix oder Determinanten nutzen, falls sinnvoll: $\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ bzw.
Cramer'sche Regel

Spezielle TR-Befehle: ref($\underline{A},\vec{b}$) bzw. rref($\underline{A},\vec{b}$) zur Erzeugung der Stufenform (Dreiecksform)
bzw. reduzierten Stufenform (Diagonalform)

Hinweis: im CAS mit parameterbehafteten LGS kommt es hier z.T. zu fehlerhaften Ergebnissen!

Lit.-hinw.:

[1] Paditz, L. (2004):
Mathematische Modelle und wissenschaftlich-technische Anwendungen
Beispiele aus Schule und Studium mit dem grafikfähigen Symbol-Taschenrechner ClassPad300
Hrg. v. CASIO Europe GmbH im Bildungsverlag EINS, Norderstedt 2004 (1.Aufl.), 112 S.,
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/ClassPad_01.pdf (Kapitel 1)

[2] Paditz, L. (2006):
Solving Problems in Algebra and Analysis with the CAS-Calculator
Beitrag in: Schriftenreihe des Collegium Europaeum Jenense 2006, Band Nr. 34,
Herausgeber: Fothe, Michael; Hermann, Martin; Zimmermann, Bernd;
"Learning in Europe - Computers in Mathematics Instruction", p. 88-112,
ISBN 978-3-933159-12-0 (im Buch formal falsche ISBN 978-3-933159-12-1) bzw. ISBN 3-933159-12-1
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Paditz_Beitrag_CEJ_2006.pdf

[3] Paditz, L. (2006):
The Rank of a Matrix with Parameters and the Solution of a Linear System of Equations with Parameters
DES-TIME-2006 - Dresden Int Symp on Technology and its Integration into Mathematics Education, July 20 - 23, 2006, Dresden (Germany) - Proceedings, ISBN 3-901769-74-9.
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Paditz_DES-TIME-2006.pdf

Download: http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Rank_LinEqSys.zip
(u.a. mit *.vcp-files für den ClassPad mit den in [2] genannten Programmen AVRank und LinEqSys)

Weitere Lösungsmöglichkeiten im ClassPad mit dem **solve**-Befehl bzw. mit einer speziellen

Eingabemaske, z.B. $\left\{\begin{array}{l} g1 \\ g2 \\ g3 \end{array}\right|_{x_1, x_2, x_3}$ zur Lösung von n Gleichungen mit n Unbekannten.

e) Beispiele aus den Schulbüchern (ohne Parameter):
z.B. Jg. 12 techn.FR, S.30f, Jg.13 NT S.79ff (mehrstufige Prod.-prozesse)

f) Beispiele aus den Schulbüchern (mit Parametern):
z.B. Jg.12 techn.FR, S.33ff (Musteraufg. S.35)

g) Beispiele mit einer besten Näherungslösung (Bestapproximation) in unlösbaren LGS:
z.B. Jg.12 techn.FR S. 286, Skizze S. 286, Orthogonalität s. S. 295.

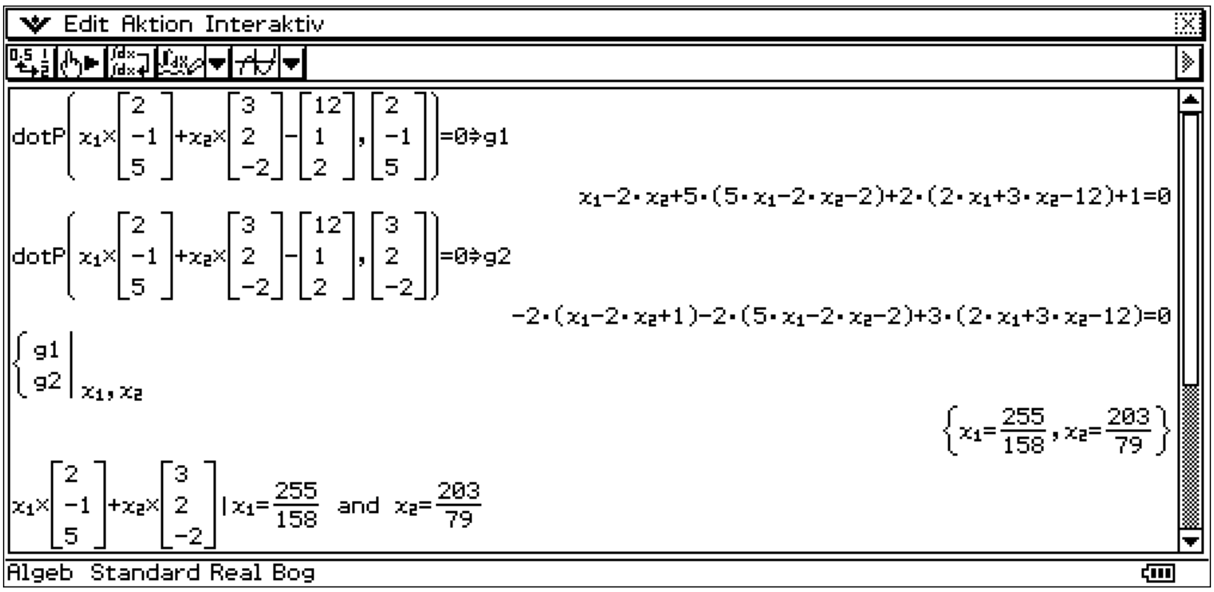
$$\begin{array}{rl} 2x_1 + 3x_2 = 12 & \text{(g1)} \\ -1x_1 + 2x_2 = \ \ 1 & \text{(g2)} \\ 5x_1 - 2x_2 = \ \ 2 & \text{(g3)} \end{array} \quad , \quad \text{d.h.} \quad x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

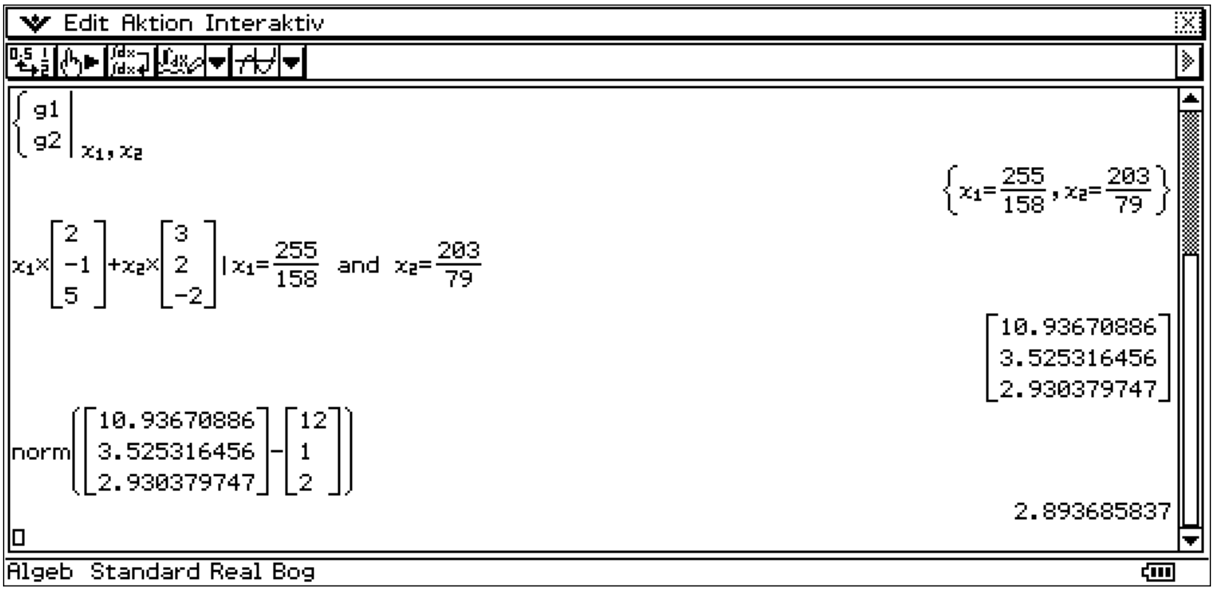
Die beste Näherungslösung ist offenbar erreicht, wenn die Linearkombination links $x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ der rechten Seite $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sehr nahe kommt, d.h. der Differenzvektor $\left(x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu der Ebene steht, die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, vgl. Skizze im Schulbuch Jg.12 S. 286.

Ansatz (Orthogonalitätsbedingungen als Skalarprodukt):

$$\left(x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \left(x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Dieses LGS liefert die optimalen Koeffizienten für die Bestapproximation:

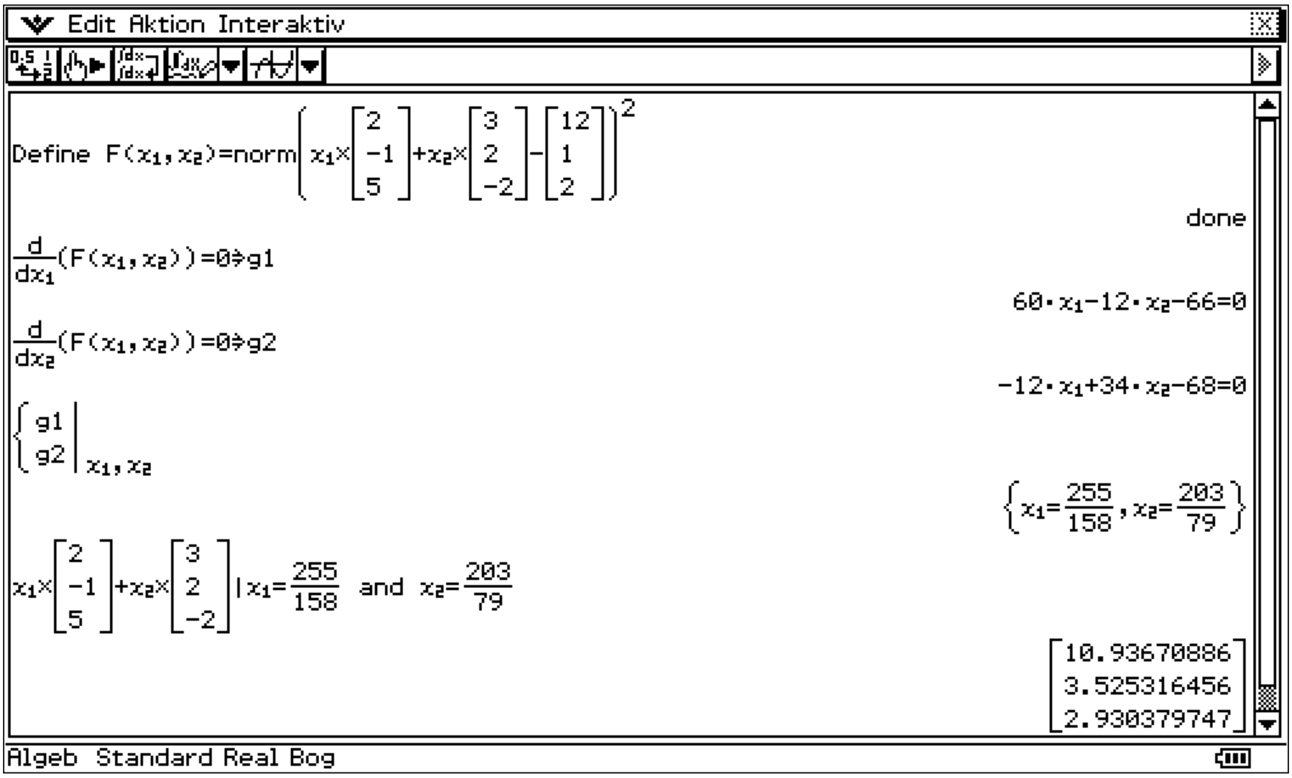




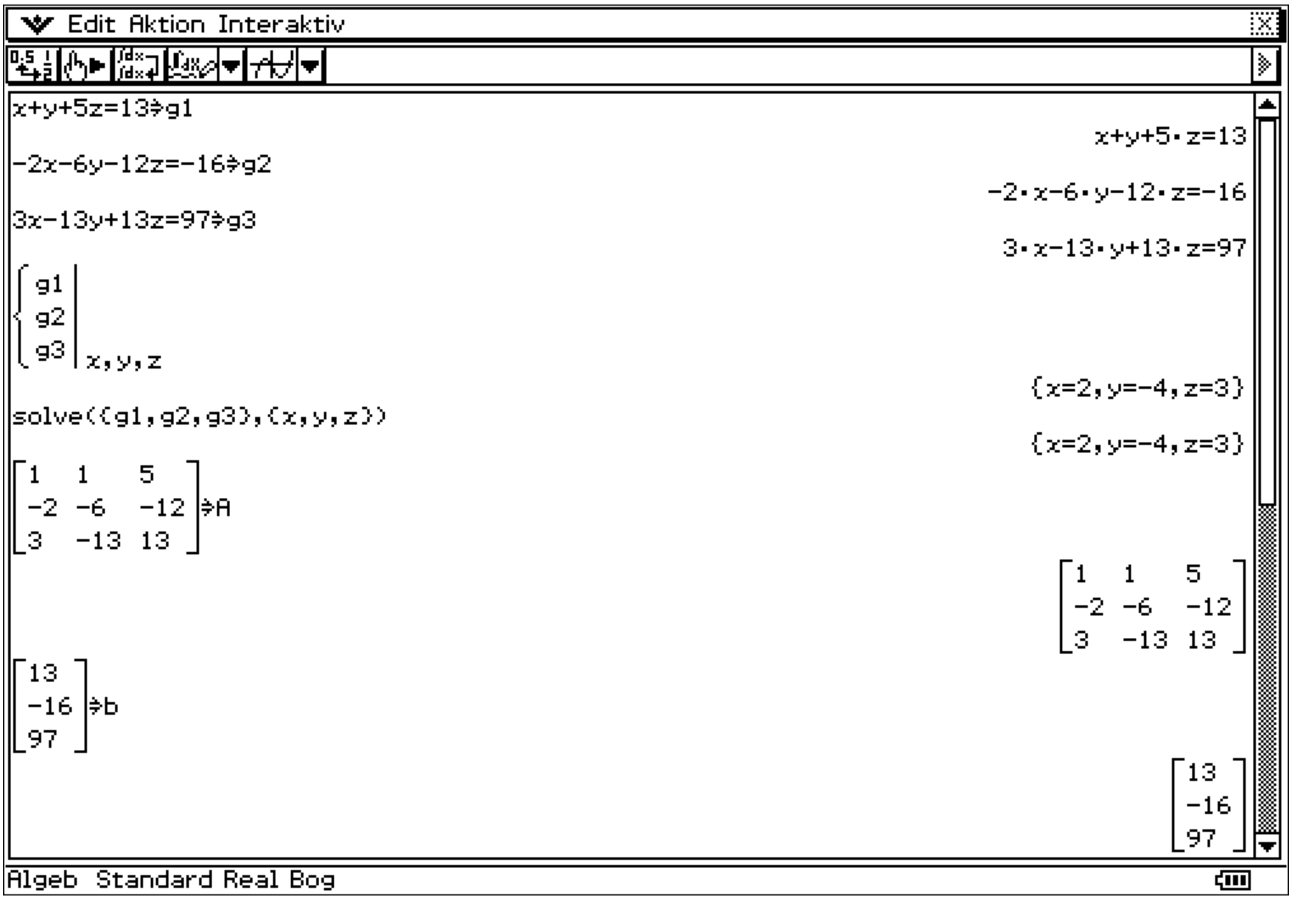
Die „beste" Näherungslösung $\begin{pmatrix} 10,9 \\ 3,5 \\ 2,9 \end{pmatrix}$ hat damit den (minimalen) Abstand von 2,9 Einheiten zu $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

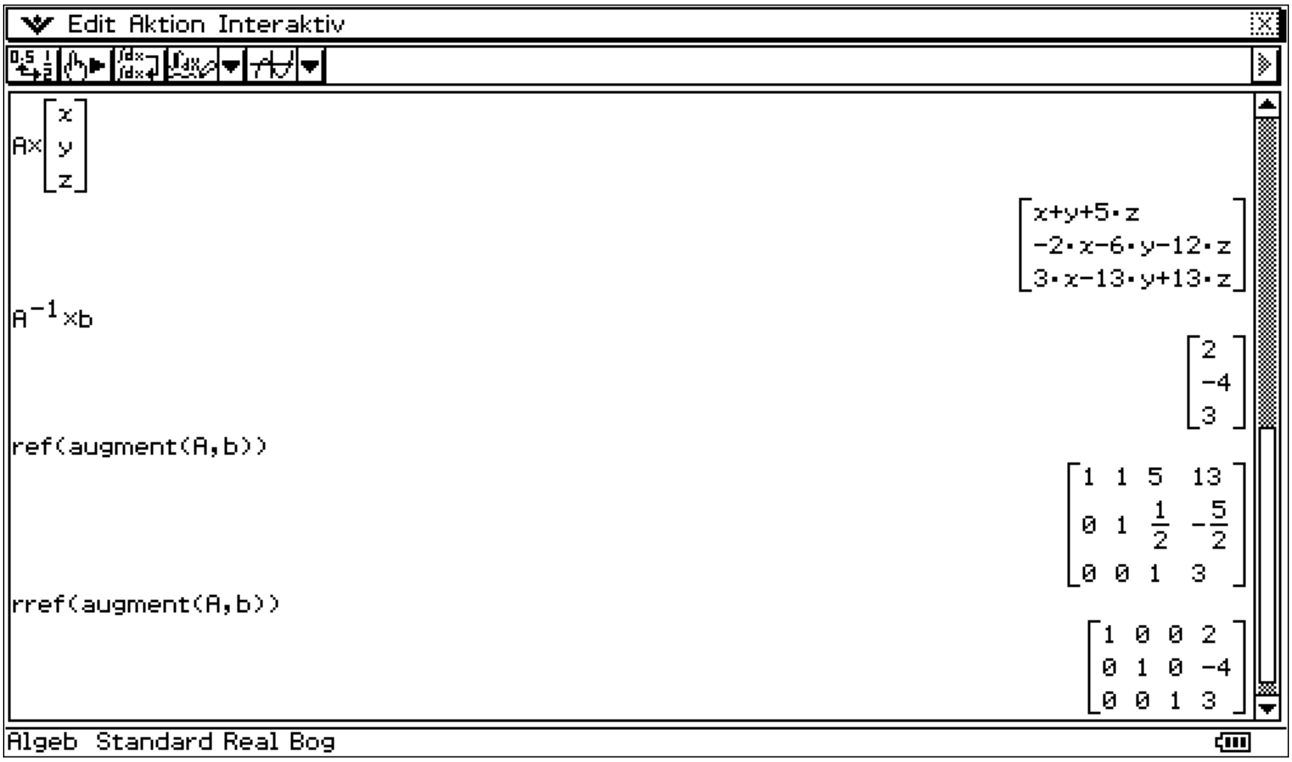
In praktischen Anwendungsaufgaben hat man oft unlösbare Systeme und sucht dann nach einer besten Näherungslösung (Bestapproximation). Einen anderen Zugang bietet die Analysis:

$$F(x_1,x_2) = \| x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \|^2 \rightarrow \text{min!}$$



zu e) Beispiele aus den Schulbüchern (ohne Parameter): Kl.11, S.99 Musteraufgabe





Schließlich betrachten wir noch die Cramersche Regel:

Edit Aktion Interaktiv

$$\frac{\det\left(\begin{bmatrix} 13 & 1 & 5 \\ -16 & -6 & -12 \\ 97 & -13 & 13 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} \Rightarrow x$$

2

$$\frac{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 13 & 5 \\ -2 & -16 & -12 \\ 3 & 97 & 13 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} \Rightarrow y$$

−4

$$\frac{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 13 \\ -2 & -6 & -16 \\ 3 & -13 & 97 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} \Rightarrow z$$

3

Algeb Standard Real Bog

Austauschverfahren für $\underline{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} = \vec{o}$: Wir nutzen das TR-Programm LinEqSys (mit Spaltentilgung)

Edit Aktion Interaktiv

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & -12 \\ 3 & -13 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & -12 \\ 3 & -13 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ -16 \\ 97 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ -16 \\ 97 \end{bmatrix}$$

augment(A,-b)⇒ST

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -13 \\ -2 & -6 & -12 & 16 \\ 3 & -13 & 13 & -97 \end{bmatrix}$$

"Starttabelle ST, Pivotwahl (i,k)=(1,1), d.h. x1 mit y1 getauscht"

"Starttabelle ST, Pivotwahl (i,k)=(1,1), d.h. x1 mit y1 getauscht"

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 13 \\ -4 & -2 & -10 \\ -16 & -2 & -58 \end{bmatrix}$$

Algeb Standard Real Bog

Edit Aktion Interaktiv

"verkürzte Tabelle T1, Pivotwahl (i,k)=(2,1), d.h. x2 mit y2 getauscht"

"Tabelle T1, Pivotwahl (i,k)=(2,1), d.h. x2 mit y2 getauscht"

LinEqSys(T1,2,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{31}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$

"verkürzte Tabelle T2, Pivotwahl (i,k)=(3,1), d.h. x3 mit y3 getauscht"

"verkürzte Tabelle T2, Pivotwahl (i,k)=(3,1), d.h. x3 mit y3 getauscht"

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew⇒ET

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

"nach drei Schritten enthält Endtabelle ET die Lösung."

Algeb Standard Real Bog

zu f) Beispiele aus den Schulbüchern (mit Parameter): Kl.12 techn.FR, S.35 Musteraufgabe

Edit Aktion Interaktiv

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & t & t \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & t \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & t & t \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ t \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ t \\ 5 \end{bmatrix}$$

det(A)

$$-2\cdot t^2+t+1$$

solve(det(A)=0,t)

$$\left\{t=1, t=-\frac{1}{2}\right\}$$

"Für t≠1 und t≠−1/2 ist A regulär ⇒ eind. Lös."

"Für t≠1 und t≠−1/2 ist A regulär ⇒ eind. Lös."

simplify($A^{-1}\times b$)

$$\begin{bmatrix} \frac{5\cdot t+3}{2\cdot t+1} \\ \frac{t^2+3\cdot t+1}{2\cdot t+1} \\ \frac{-1}{2\cdot t+1} \\ \frac{t+3}{2\cdot t+1} \end{bmatrix}$$

Algeb Standard Real Bog

Edit Aktion Interaktiv

"Für t≠1 und t≠−1/2 ist A regulär ⇒ eind. Lös."

"Für t≠1 und t≠−1/2 ist A regulär ⇒ eind. Lös."

simplify($A^{-1}\times b$)

$$\begin{bmatrix} \frac{5\cdot t+3}{2\cdot t+1} \\ \frac{t^2+3\cdot t+1}{2\cdot t+1} \\ \frac{-1}{2\cdot t+1} \\ \frac{t+3}{2\cdot t+1} \end{bmatrix}$$

rank(A|t=−1/2)

3

rank(augment(A,b)|t=−1/2)

4

"für t=−1/2 keine Lösung"

"für t=−1/2 keine Lösung"

rank(A|t=1)

3

rank(augment(A,b)|t=1)

3

"für t=1 mehrdeutige Lösung, da Rg(A)=Rg(A,b)=3<4 (Maximalrang nicht erreicht)"

"für t=1 mehrdeutige Lösung, da Rg(A)=Rg(A,b)=3<4 (Maximalrang nicht erreicht)"

Algeb Standard Real Bog

Edit Aktion Interaktiv

ref(augment(A,b)|t=1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rref(augment(A,b)|t=1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"x_4 wird frei gewählt (parametrisiert): $x_4=s\in R$"

"x_4 wird frei gewählt (parametrisiert): $x_4=s\in R$"

Lösung: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-s \\ 3-s \\ 1-s \\ s \end{bmatrix} = s\times\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s\in R$

Algeb Standard Real Bog

Angenommen, das LGS wird ohne Voruntersuchung mit den vorhandenen Befehlen gelöst:

Edit Aktion Interaktiv

rref(augment(A,b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\cdot t+3}{2\cdot t+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{t^2+3\cdot t+1}{2\cdot t+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2\cdot t+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t+3}{2\cdot t+1} \end{bmatrix}$$

"offenbar ist nur t=-1/2 kritisch (Division durch Null)"

"offenbar ist nur t=-1/2 kritisch (Division durch Null)"

ref(augment(A,b)|t=-1/2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

"Für t=-1/2 ist ein Widerspruch (letzte Zeile) erkennbar ⇒ keine Lös."

"Für t=-1/2 ist ein Widerspruch (letzte Zeile) erkennbar ⇒ keine Lös."

Algeb Standard Real Bog

Damit entsteht die Vermutung der eindeutigen Lösung für alle $t \neq -1/2$, was unkorrekt ist. Der Fall t=1 ergibt eine mehrdeutige Lösung, die hier nicht erkannt wird.
Auch der **rank**-Befehl im ClassPad gibt den t-unabhängigen Maximalrang 4 an, was falsch ist.

Edit Aktion Interaktiv

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & t & t \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & t \end{bmatrix}$$

b

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ t \\ 5 \end{bmatrix}$$

rank(A) — 4

rank(augment(A,b)) — 4

rank(A|t=-1/2) — 3

rank(augment(A,b)|t=-1/2) — 4

rank(A|t=1) — 3

rank(augment(A,b)|t=1) — 3

Algeb Standard Real Bog

Ursprünglich wurden die Befehle für reine Zahlenschemata ohne symbolische Variablen programmiert und dann in das CAS übernommen, wobei hier keine Fallunterscheidungen erkannt werden!
Damit bleibt die Empfehlung, eine **quadratische Matrix** A zuerst über deren Determinante zu untersuchen. Für **nichtquadratische Matrizen** sind Einzelschrittverfahren zu bevorzugen, da ref(…), rref(…) und rank(…) in der Regel nicht für Fallunterscheidungen programmiert sind und fehlerhafte Ergebnisse anzeigen können.

Wird nicht per Hand gerechnet, sind die oben genannten Programme LinEqSys und AVRank als Einzelschrittverfahren zu empfehlen. (Rang = Anzahl der möglichen Austauschritte im Austauschverfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung.)

Beispiel Jg.12 techn.FR S.37 Aufg. 03: **Wheatstone'sche Messbrücke** (7 denkbare Einzelgleichungen.)

```
Edit Aktion Interaktiv
I1+I2=I3+I4⇒g1
                                                    I1+I2=I3+I4
I2=I3+I5⇒g2
                                                    I2=I3+I5
I5+I1=I4⇒g3
                                                    I1+I5=I4
I1×R1+I4×R4=U⇒g4
                                                    I1·R1+I4·R4=U
I2×R2+I3×R3=U⇒g5
                                                    I2·R2+I3·R3=U
I5×R5+I4×R4=I3×R3⇒g6          Fehler!
                              Ungültige             I4·R4+I5·R5=I3·R3
I5×R5+I2×R2=I1×R1⇒g7          Variablenreferenz
                                                    I2·R2+I5·R5=I1·R1
42⇒U                               OK
                                                    42
{8,2,8,12,2}⇒{R1,R2,R3,R4,R5}
                                                    {8,2,8,12,2}
{g1
 g2
 g3
 g4
 g5
 g6
 g7 | I1,I2,I3,I4,I5,a,b
                        {I1=3/2, I2=5, I3=4, I4=5/2, I5=1, a=a, b=b}
"R1 bis R5 sind Systemvariablen und können oben nicht genutzt werden"
   "R1 bis R5 sind Systemvariablen und können oben nicht genutzt werden"
R1
Algeb  Standard Real Bog
```

Das überbestimmte LGS wurde gelöst durch Hinzunahme der fiktiven Variablen a,b. Die Fehlermeldung entstand durch den zuletzt gestarteten Aufruf R1. R1(phi) ist im 2D-Grafik-Menü nicht definiert worden.

```
Edit Aktion Interaktiv
"R1 bis R100 sind Systemvariablen (2D-Grafik in Polarkoordinaten) und können oben nicht genutzt werden"
   "R1 bis R100 sind Systemvariablen (2D-Grafik in Polarkoordinaten) und können oben nicht genutzt werden"
{I1+I2=I3+I4
 I2=I3+I5
 I5+I1=I4
 I1×R1+I4×R4=U
 I2×R2+I3×t=U
 I5×R5+I4×R4=I3×t
 I5×R5+I2×R2=I1×R1 | I1,I2,I3,I4,I5,a,b
   {I1=(21·t+147)/(2·(11·t+17)), I2=(21·t+357)/(11·t+17), I3=420/(11·t+17), I4=(63·t+21)/(2·(11·t+17)), I5=(21·t-63)/(11·t+17), a=a, b=b}
"für t=63/21 ist I5=0"
                                                    "für t=63/21 ist I5=0"
{I1+I2=I3+I4
 I2=I3+I5
 I5+I1=I4
 I1×R1+I4×R4=U
 I2×R2+I3×t=U|t=63/21
 I5×R5+I4×R4=I3×t|t=63/21
 I5×R5+I2×R2=I1×R1 | I1,I2,I3,I4,I5,a,b
                   {I1=21/10, I2=42/5, I3=42/5, I4=21/10, I5=0, a=a, b=b}
Algeb  Standard Real Bog
```

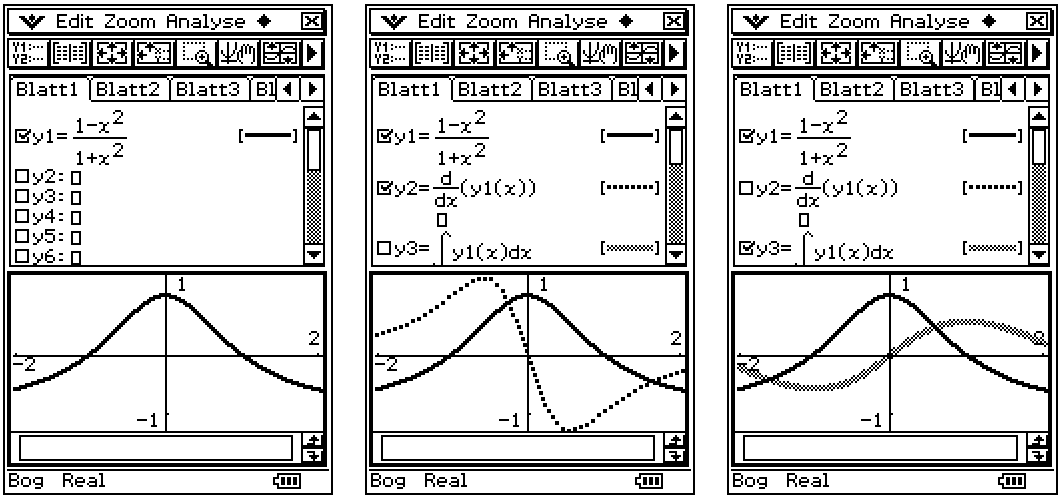
Lit.-hinw.: s. [4] S. 94 Beisp. 3.4 und S. 104 Beisp. 3.7

[4] Aulenbacher,G., Paditz,L., Wabel-Frenk,U. (1996, 2001):
Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Band 3: Lineare Algebra - Stochastik
(Hrg. v. Prof. Dr .W.Preuß, HTW Dresden(FH), u. Prof. Dr. G.Wenisch, FH Darmstadt),
Fachbuchverl. Leipzig im Hanser Verl. München 1996 (1.Aufl.), 2001 (2.Aufl.), 356 S., ISBN: 3-446-21682-0.

2) Stammfunktionen und Ableitungsfunktionen:

Jg. 12, NT, S.125 und techn.FR S. 150.

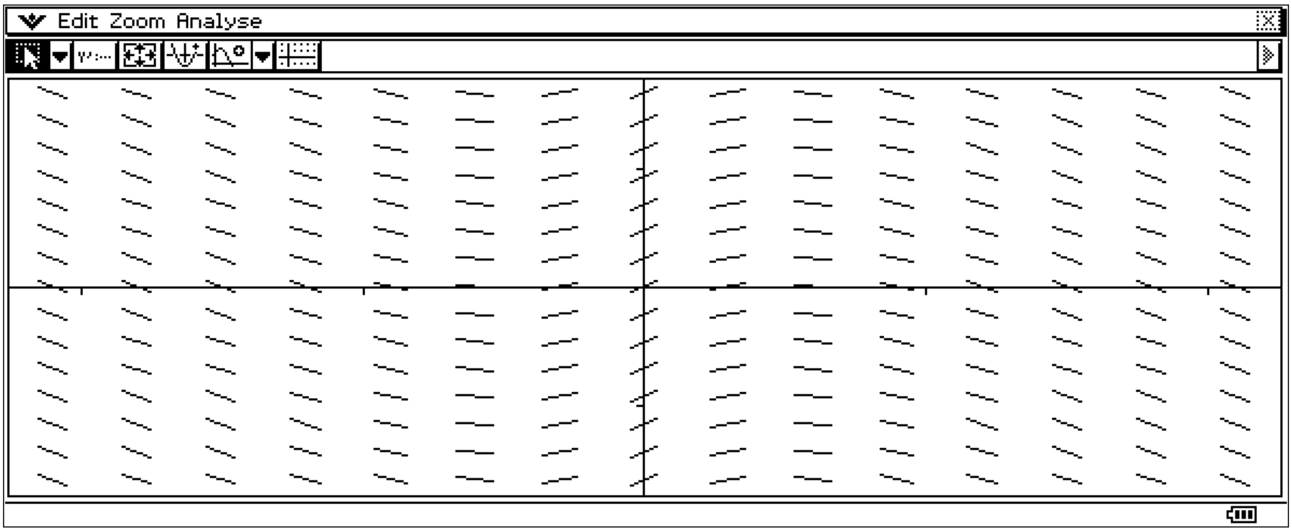
Die Differenziation und Integration von Formeltermen ist ein zentrales Anliegen im CAS.



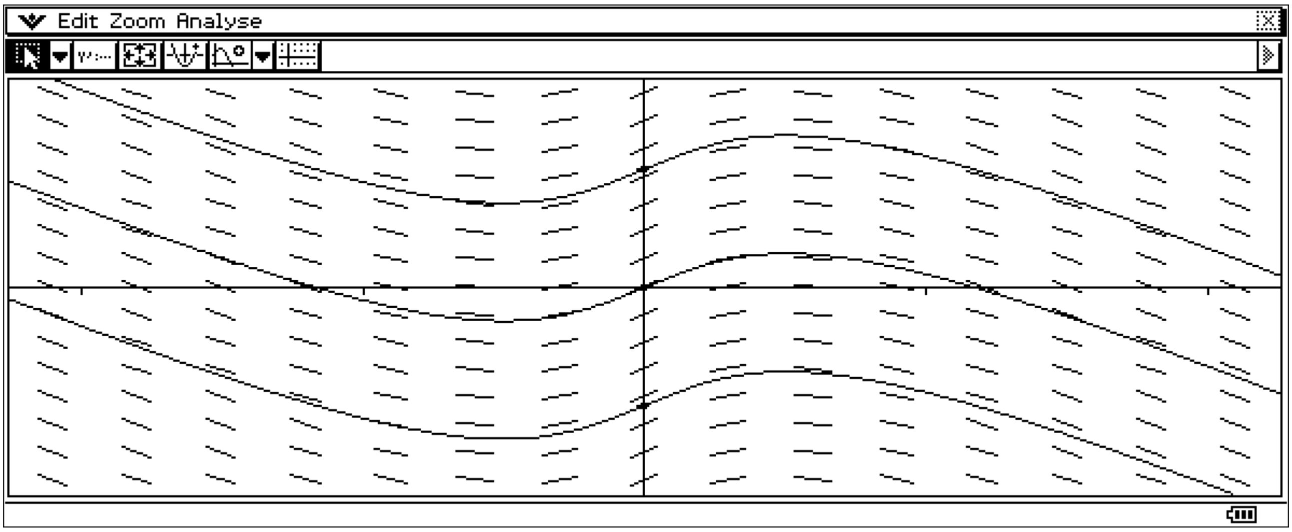
Es sei F'(x) = f(x) = (1-x^2)/(1+x^2) eine Ableitungsfunktion einer (unbekannten) Stammfunktion y = F(x).

Die Ableitung kann sehr negativ, nur etwas negativ, null oder etwas positiv oder sehr positiv sein. Daraus kann man den Verlauf der Stammfunktion vermuten (bis auf eine additive Konstante C, die Integrationskonstante). Über f(x) = F'(x) = y' findet man für ein festes xo in jedem Punkt P(xo,yo) ein Geradenstück, das den vermutlichen Verlauf von F(x) tangiert.

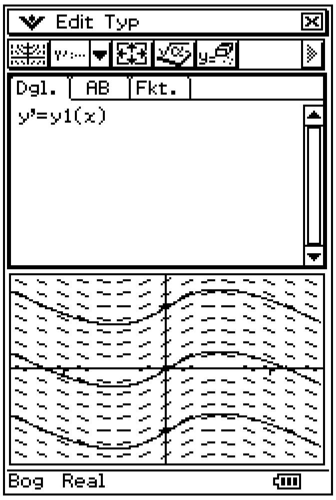
Gleichung für das Geradenstück (Tangente an y=F(x)): **y = yo + f(xo)*(x-xo)**.
Diese Geradenstücke werden auch **Linienelemente** genannt.
Das **Richtungsfeld** ist die Gesamtheit der Linienelemente. Im **Menü zur Differenzialgleichungsgrafik** des CP330 können Richtungsfelder generiert werden:

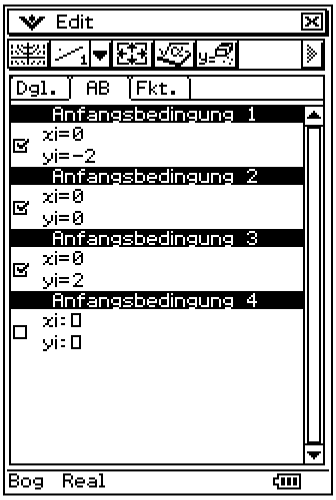


Mittelpunkte paralleler Linienelemente liegen auf einer sogenannten **Isokline** (Punkte mit festem Anstieg f(x)=F'(x)=const.). Um Linienelemente und damit Richtungsfelder schneller zeichnen zu können, zeichnet man oft die Kurvenschar y' = f(x) = (1-x^2)/(1+x^2) = const. = c (Isoklinenschar), d.h. in diesem Fall x = const. Damit liegen hier parallele Linienelemente senkrecht übereinander. Mögliche Stammfunktionen folgen dem Verlauf der Linienelemente und werden auch **Integralkurven** genannt.



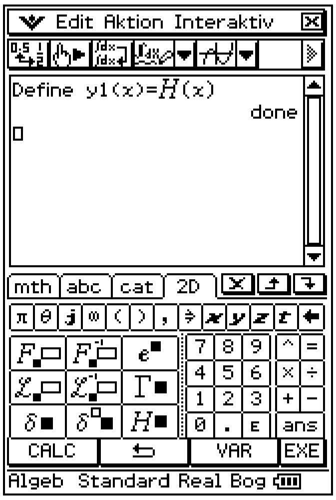
Folgende Einstellungen waren zu tätigen:



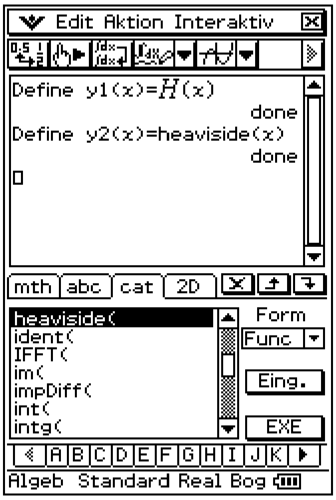


Man erkennt die Parallelität der Integralkurven (senkrechte Verschiebung in Richtung y-Achse).

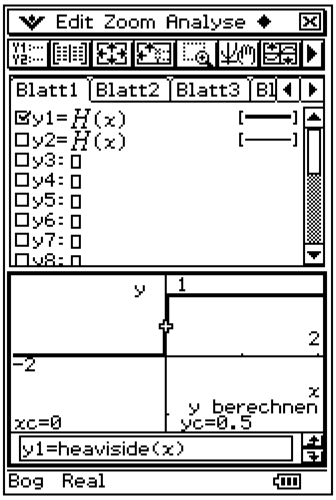
Die Heaviside-Funktion y=H(x) ist im CP330 implementiert und als Eingabemaske im virtuellen 2D-Menü oder im Katalog zu finden:



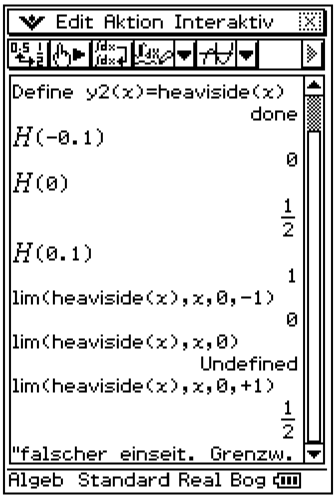
bzw.



Grafik:



Im Schulbuch Jg.12 techn.FR, S. 152 (NT S. 127) ist H(x) als linksseitig stetig definiert im Gegensatz zum CP330:



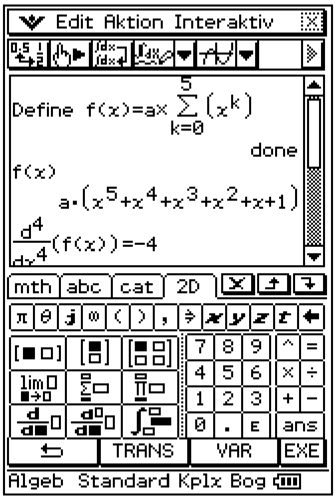
Der rechtsseitige Grenzwert ist hier unkorrekt (Fehler im OS 3.02).
Mit dem Update des OS auf Version 3.03 soll dieser Fehler behoben sein (Veröffentlichung Anfang März 2008 geplant, wird aber vermutlich Mai).

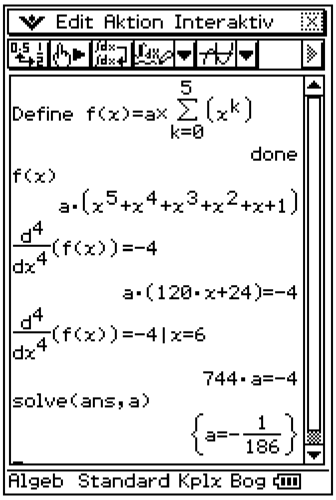
Die Stammfunktion zu y = f(x) = H(x) ist y = F(x) = x * H(x) + C.

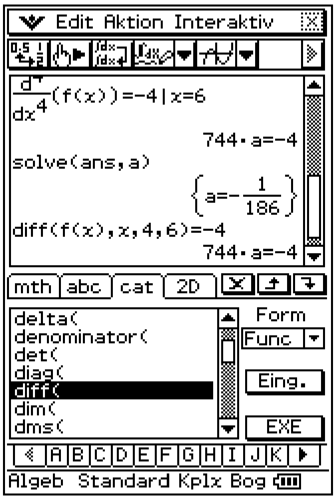
In technischen Anwendungen wird H(x) auch als **Einheitssprungfunktion** bezeichnet. Die Stammfunktion wird dann **Rampenfunktion** genannt.

Zur Berechnung von Ableitungen haben wir im CAS spezielle Eingabemasken bzw. Befehle:

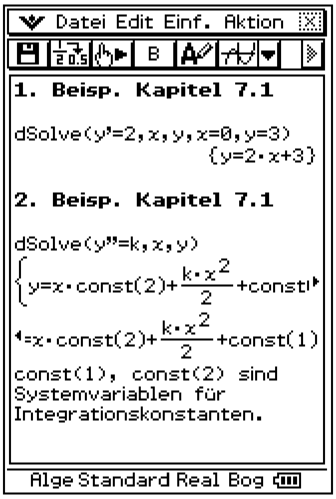
Jg.12 techn.FR, S.156 (NT S. 131), Aufg. 10 e)







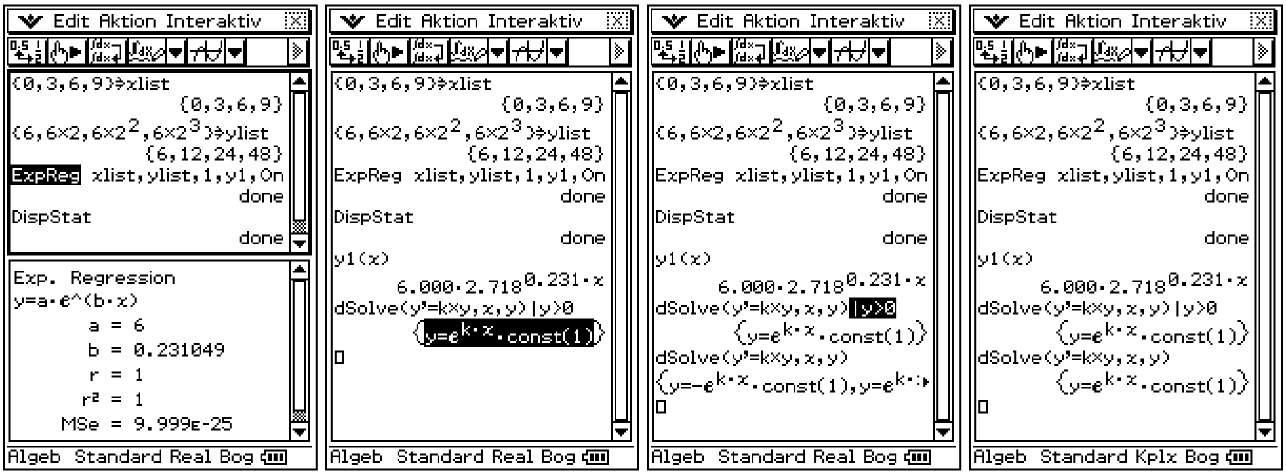
3) Differenzialgleichungen: Jg.12 NT S.314ff, techn.FR S,307



Druckfehlerhinw.: Jg.12 techn.FR:
S.307 12.Z.v.u.: vgl. Seite **168**,
S.307 4.Z.v.u.: vgl. Seite **170**,
S.311 11.Z.v.u.: vgl. Seite **118f.**

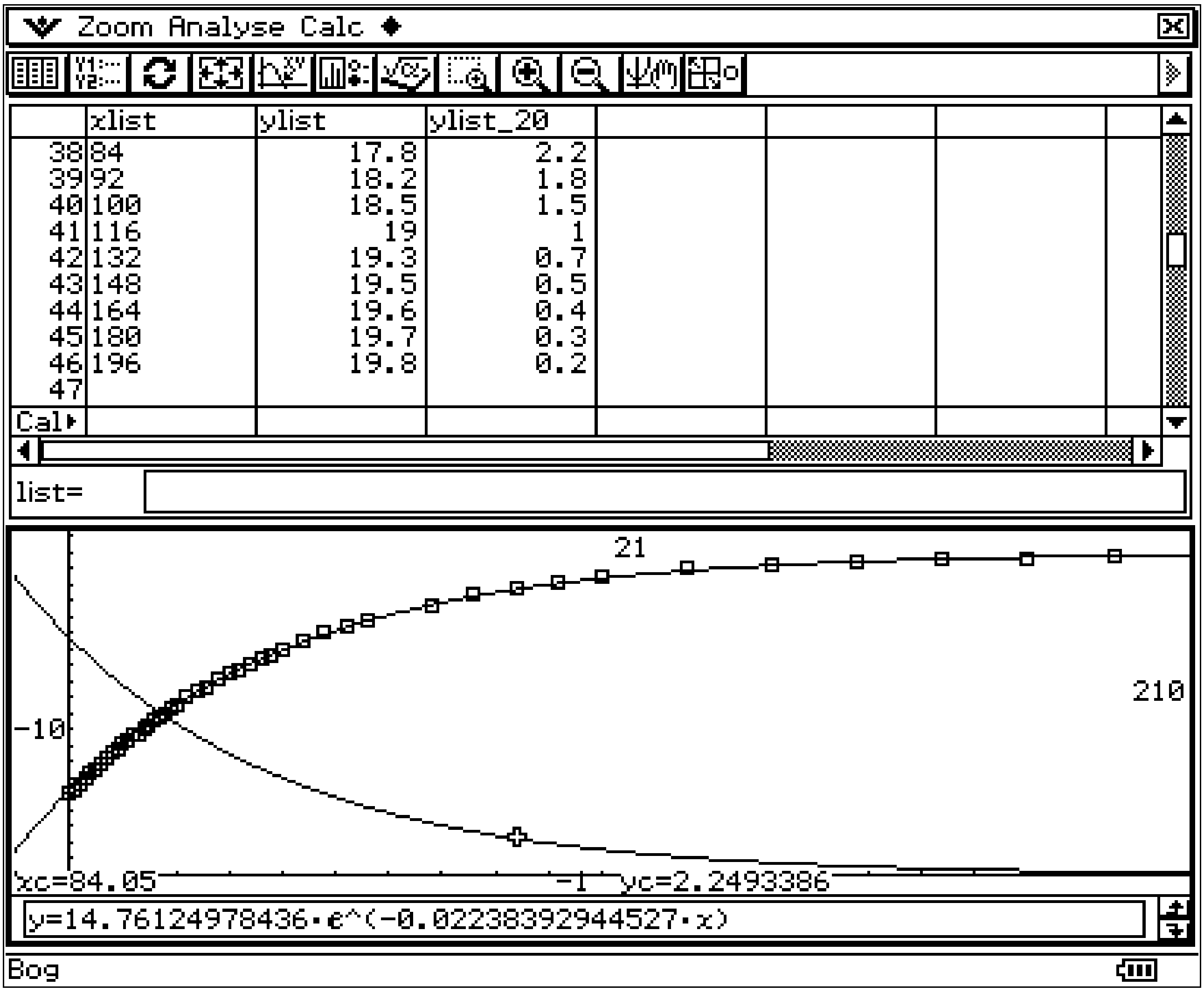
Einfache DGLn können im ClassPad mit dem dSolve-Befehl gelöst werden.
Syntax:
dSolve(DGL, x, y) bzw.
dSolve(DGL, x, y, x=xo, y=yo) mit der Bedingung yo=y(xo).

Exponentielles Wachstum (Exponentielle Regression oder Lösung einer DGL.)



Während im real-Mode zwei Teillösungen (mit „+“ bzw. „-“) ausgegeben werden, erhält man im komplex-Mode sofort die Gesamtlösung in einem Formelterm.

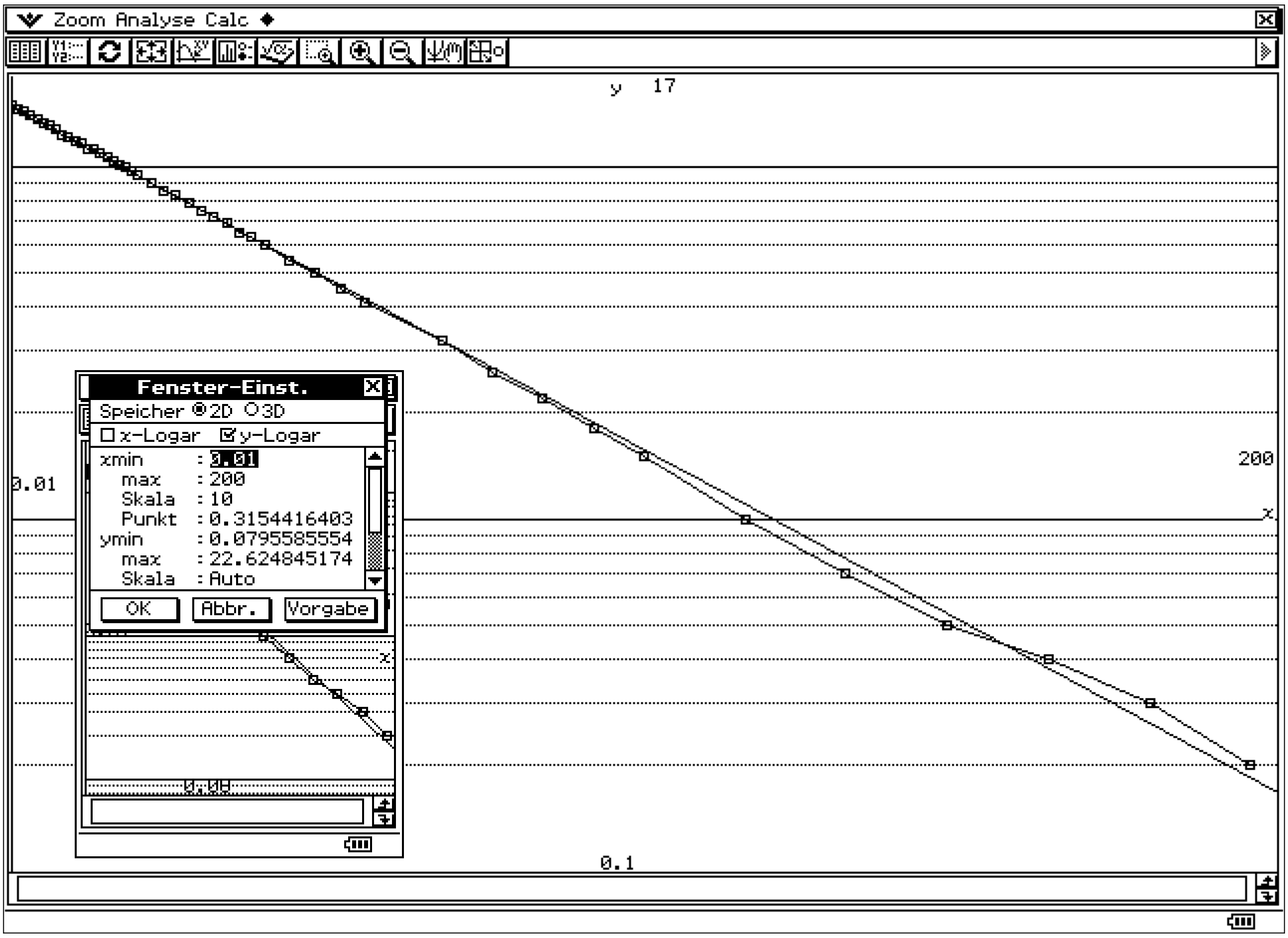
Beschränktes Wachstum:
Wir versuchen zuerst, die Datenpunkte durch eine exponentielle Regression anzunähern.



Die Datenpaare werden (nach Transformation) durch eine exponentielle Regressionsfunktion wie folgt approximiert.
Der GTR hat y=f(x)=c+a*exp(b*x) nur für c=0 implementiert (und rechnet dann intern quasilinear: ln(y)=ln(a)+b*x).
Wir betrachten deshalb den transformierten Datensatz 20-yk, k=1(1)46, um zunächst den e-Funktionsanteil mit der Standard-Statistik-Software des ClassPad zu bekommen.

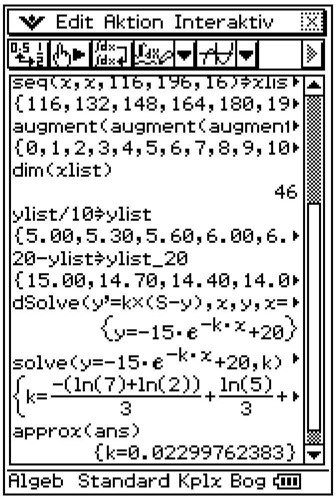
Ergebnis nach Rücktransformation: **y = f(x) = 20 – 14,76*exp(-0,0224*x)** .

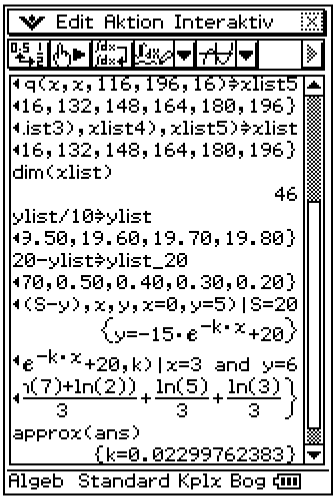
Anmerkung: Durch die Anwendung der MKQ-Berechnung auf das quasilineare Modell ist die Berechnung einfacher aber damit auch etwas ungenau:
MKQ direkt wäre: $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a * e^{b*x_i}\right)^2 \to \min!$ quasilinear: $\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(y_i\right)-\left(\ln\left(a\right)+b*x_i\right)\right)^2 \to \min!$



Unter Nutzung der logarithmischen Skalierung (y-Achse) des Betrachtungsfensters erscheint die quasilineare Regression als Gerade und man erkennt die Abweichungen zwischen den Daten und der Regressionsfunktion.

Wir lösen nun die DGL **f'(x)=k*(S-f(x))** mit der Anfangsbedingung **f(0)=5** und der Vorgabe S=20 sowie der Vorgabe f(3)=6 zur anschließenden Bestimmung von k.





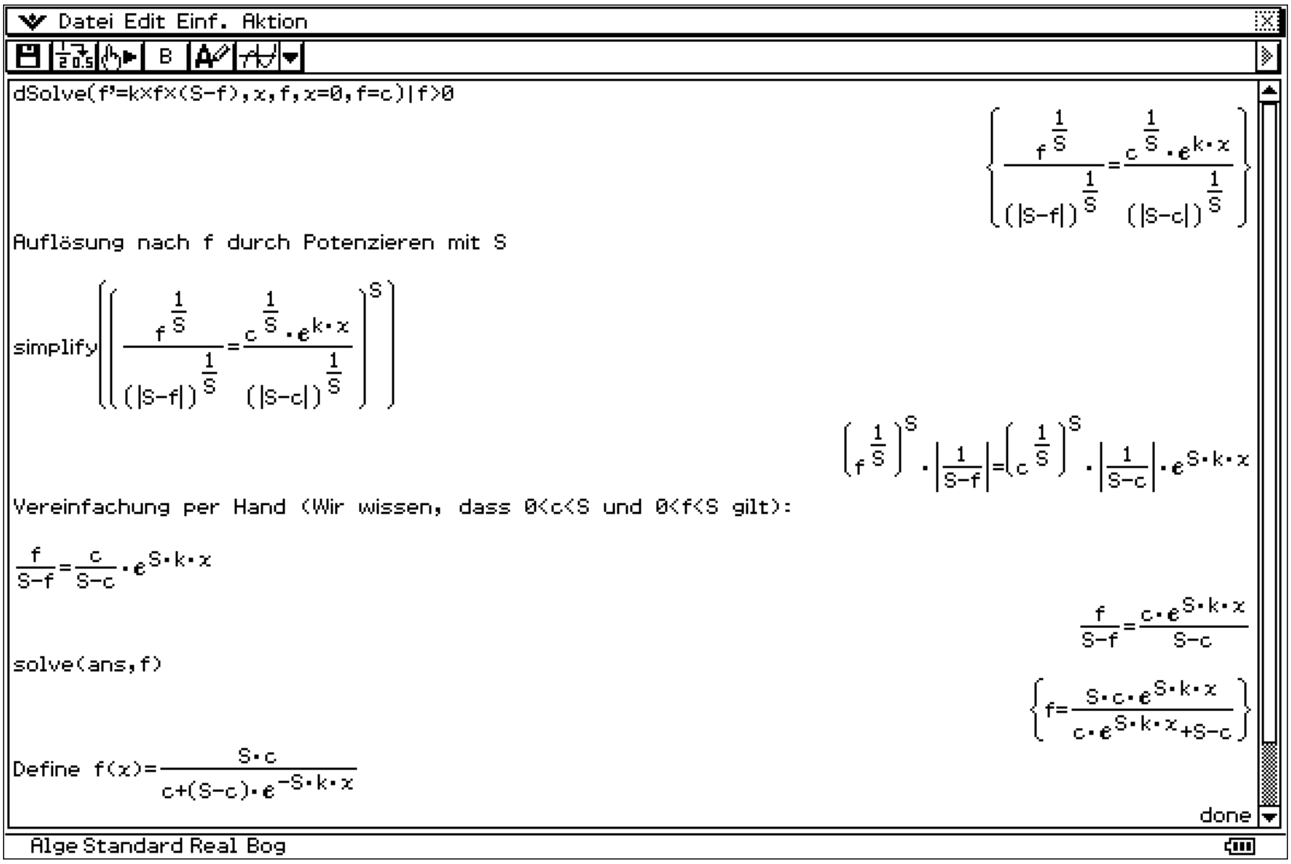
Ergebnis: **y = f(x) = 20 – 15*exp(-0,023*x) .**

Damit unterscheiden sich die analytische Lösung (über eine DGL) und die Lösung der Regressionsanalyse nur unwesentlich. Während mit der Lösung der DGL die Formelstruktur y = f(x) = c + a * exp(b*x) erst gefunden wird, geht die exponentielle Regression bereits von einem Regressions-Ansatz aus und schätzt lediglich noch die Parameter gemäß MKQ.

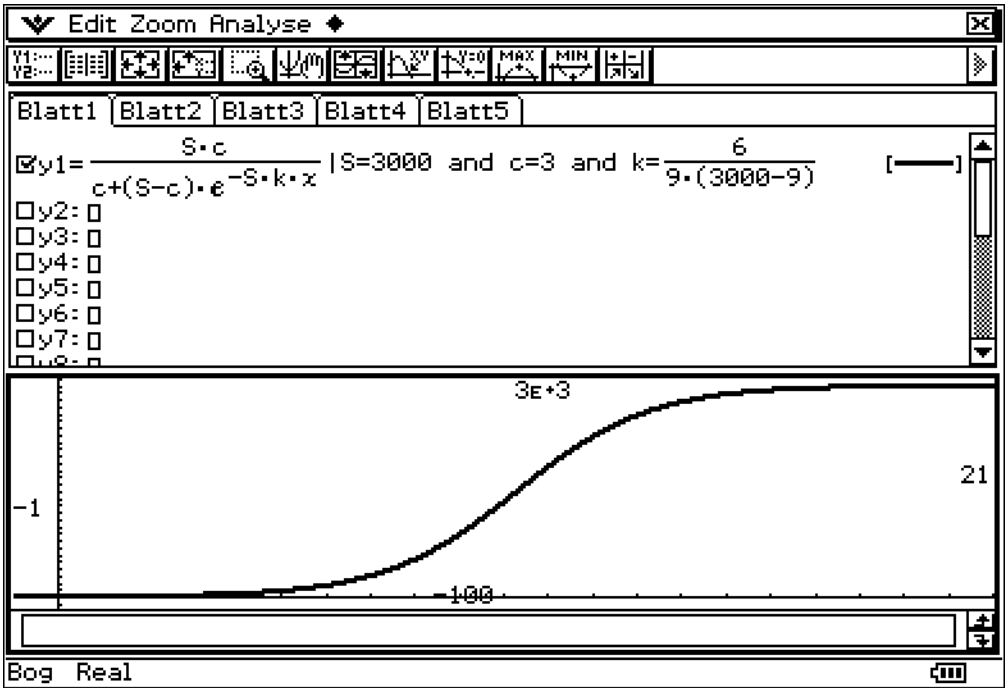
Logistisches Wachstum:

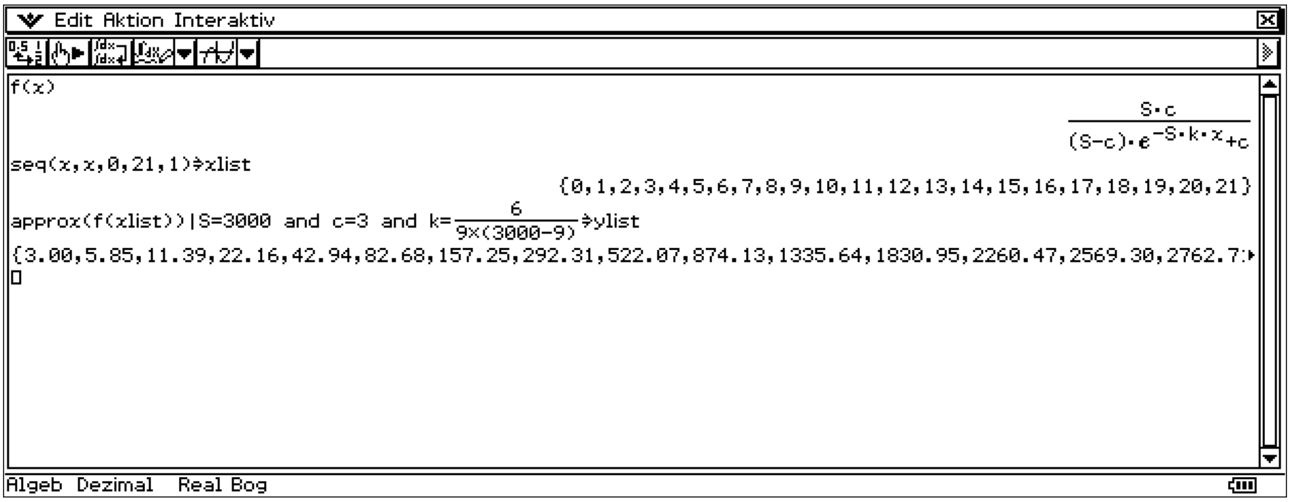
Wir untersuchen die im Schulbuch Jg.12 Kap. 7.4 betrachtete Wachstumsfunktion y = f(x) mit der Eigenschaft f'(x) = k * f(x) * (S - f(x)), wobei k>0 und S>0 fest vorgegebene Parameter sind.
Es gilt außerdem 0 < f(x) < S. Der Anfangswert des logistischen Wachstums sei f(0) = c>0 mit c<S. f'(x)>0 beschreibt die Veränderungsrate (Wachstumsgeschwindigkeit). Im Beispiel sind f(1)=9 und f'(1) = 6 vorgegeben, d.h. für k gilt dann k = f'(1) / (f(1) * (S - f(1))). Hierbei sei S=3000, c=3.

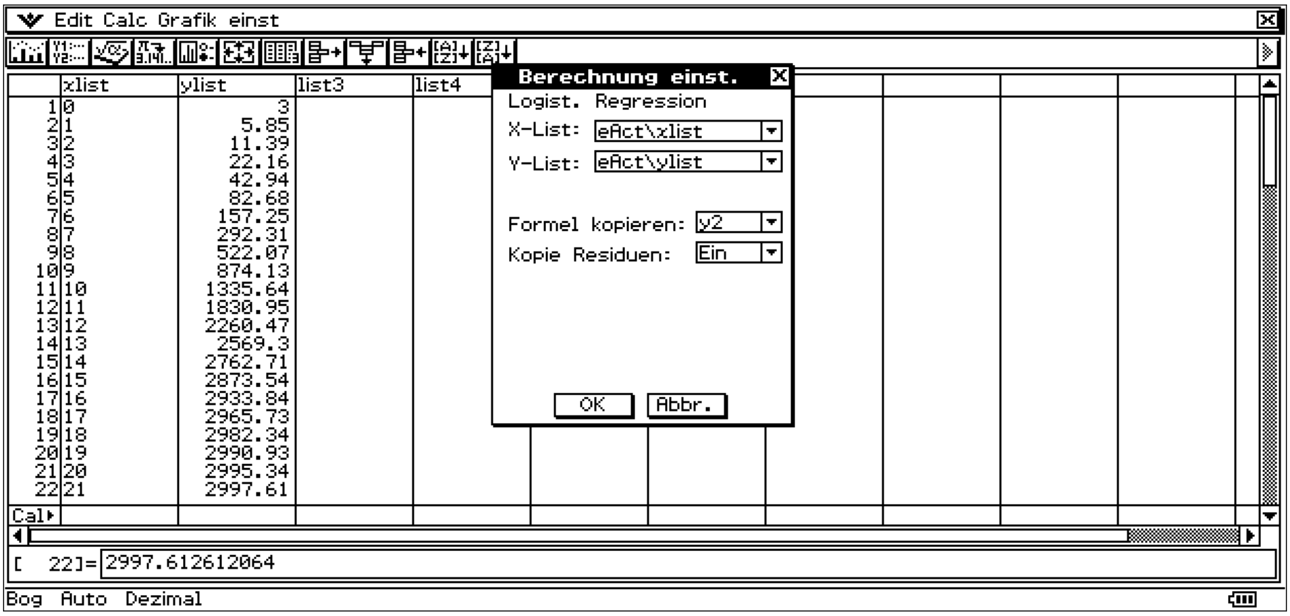
Wir lösen die DGL mit dem ClassPad wie folgt (um die angegebene Funktion nachzuprüfen):

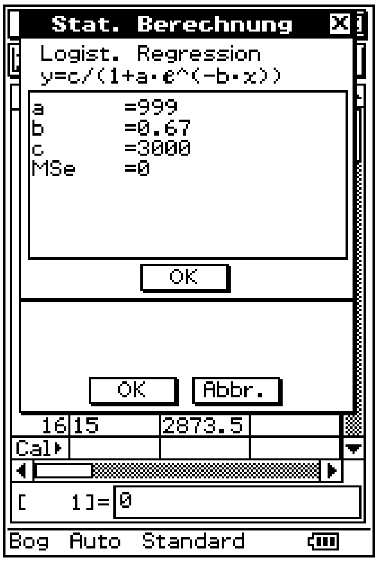


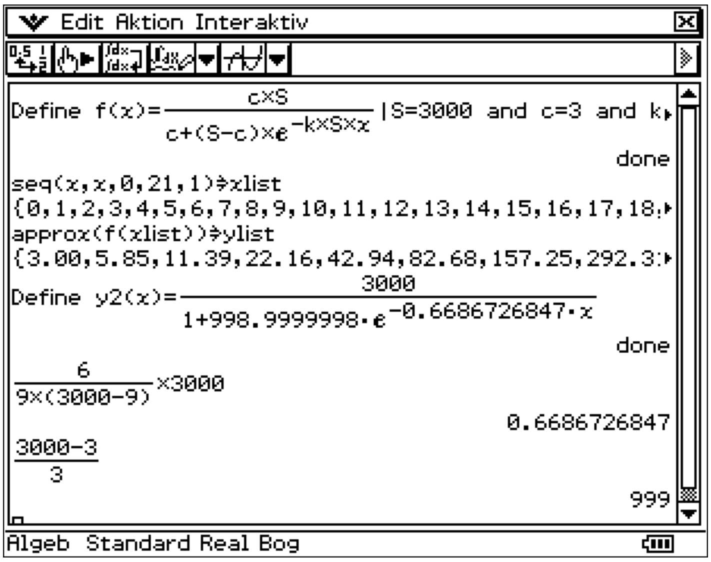
Nunmehr können wir die Wachstumsfunktion zeichnen und tabellieren:









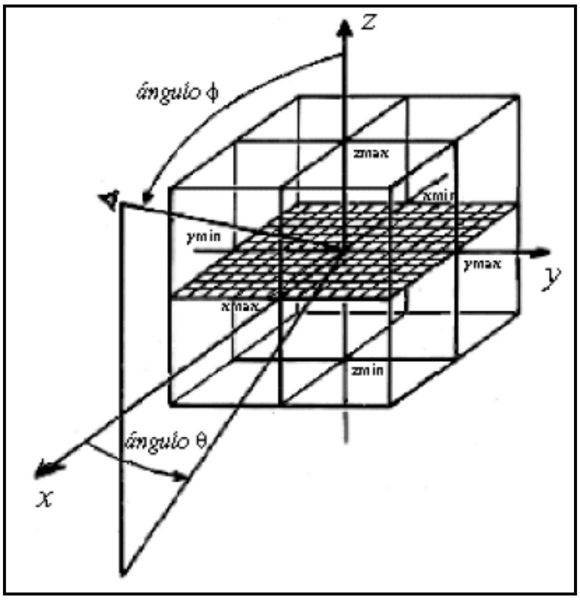


Damit haben wir über die logistische Regression die Ausgangsformel zurückerhalten!

4) 3D-Grafik von Punkten, Geraden, Ebenen und Körpern

Punkte sind als Pixelpunkt in einer 3D-Grafik sicher schwer zu erkennen, so dass sich hier anbietet, den Punkt als kleine Kugel (genauer Kugeloberfläche) dazustellen. Das 3D-Menü gestattet die Darstellung von Funktionen $z=f(x,y)$ oder Parameterdarstellungen $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ mit Vorgabe entsprechender x-y-Bereiche (Definitionsbereiche) bzw. s-t-Bereiche (Parameterbereiche).

Die 3D-Grafik erscheint im ClassPad unter einer vorzugebenden Blickrichtung (Augenpunkt des Betrachters durch den Höhenwinkel über dem Äquator zum Nordpol sowie einem Winkel zur x-z-Ebene vorzugeben (Azimutwinkel)).



Literaturhinweis :

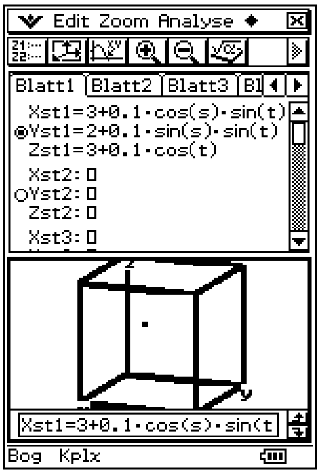
Paditz,L. (2007): **Modelos Matemáticos y Aplicaciones Científico - técnicas**
Ejemplos escolares y universitarios con la calculadora gráfica y simbólica Classpad 300
Hrg. v. CASIO Europe GmbH, Norderstedt 2007 (1.Aufl., spanische Übersetzung), 117 S.,
http://www.aulamatematica.com/libros/pdf%20libros/Paditz.pdf

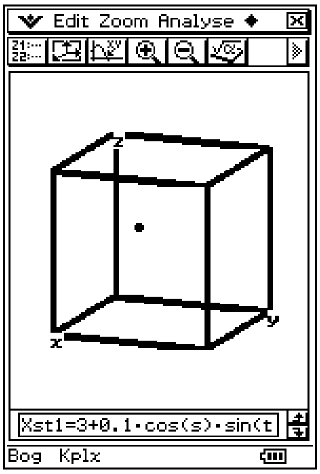
3D-Objekte werden über Liniennetze visualisiert, so dass in der Betrachtungsfenstereinstellung zusätzlich die Anzahl der Gitterlinien in x- bzw. y-Richtung vorzugeben ist.

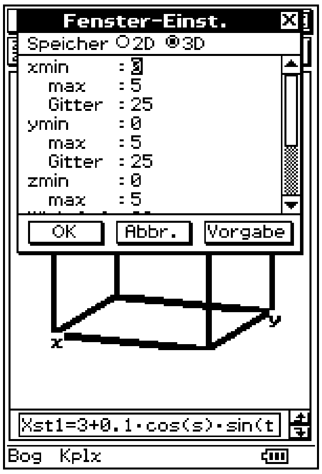
Zur besseren Anschaulichkeit kann ein zusätzlicher Betrachtungsquader parallel zu den Koordinatenebenen eingeblendet werden.

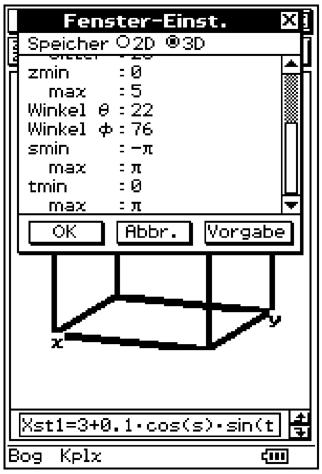
Eine Geradengleichung kann bekanntlich nur als Parameterdarstellung x=x(t), y=y(t), z=z(t) und nicht als parameterfreie Einzelgleichung dargestellt werden, da die Einzelgleichung Ax+By+Cz=D bereits eine Ebene beschreibt.
Die parameterfreie Darstellung einer Geraden könnte deshalb nur durch die gleichzeitige Angabe zweier nichtparalleler Ebenengleichungen realisiert werden, z.B. Ax+By+Cz=D und ax+by+cz=d, wobei die Normalenvektoren $[A,B,C]^T$ und $[a,b,c]^T$ linear unabhängig sind.

Die 3D-Grafik hat die Einschränkung, dass nur ein mathematisches Objekt gleichzeitig dargestellt werden kann.

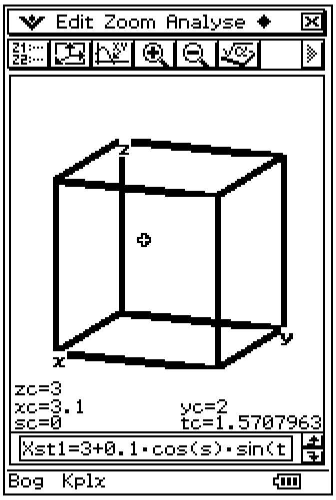






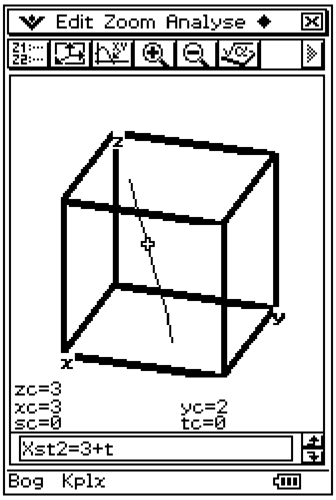


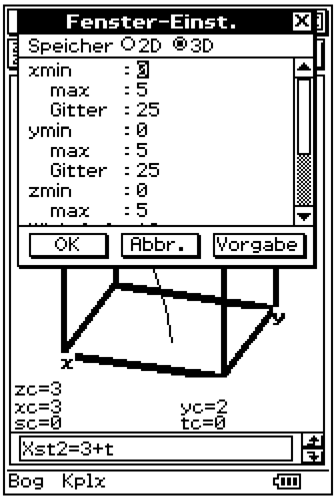
Wenn Sie mit dem Stift über das Bild gleiten, dreht sich die Grafik in die gewünschte Richtung!

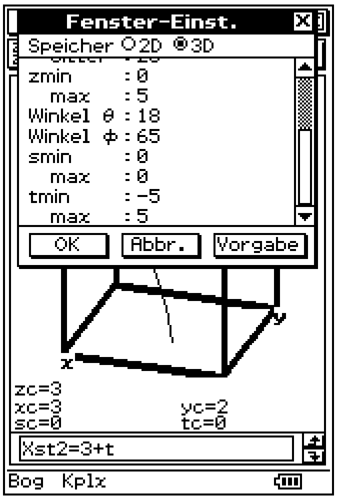


Darstellung der Koordinaten auf der Mini-Kugeloberfläche (r = 0.1)

Wir wollen nun die Geradengleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$ darstellen.







Man erkennt den Verlauf der Geraden nur im Betrachtungsquader.

Schließlich kommen wir zu einer Ebenendarstellung mit zwei linear unabhängigen Richtungs-

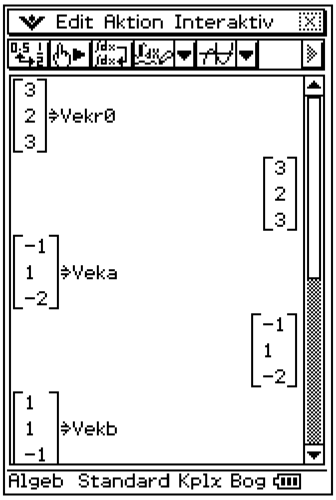
vektoren, z.B. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R},$ (Parameterdarstellung).

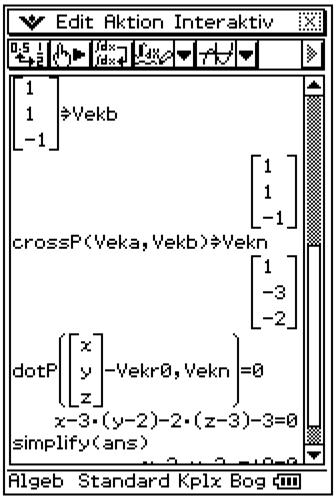
Die parameterfreie Darstellung erhalten wir mithilfe des Normalenvektors

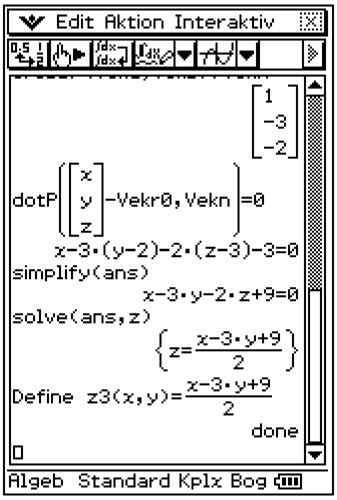
$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{i} - \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{j} + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und dem

Ansatz $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ (Skalarprodukt Differenzvektor in der Ebene orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$).

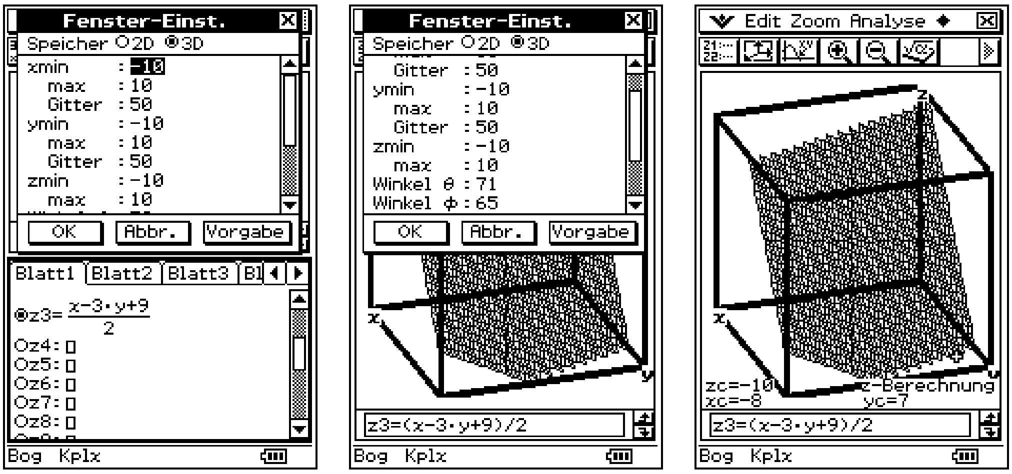
Damit lautet die Ebenengleichung (parameterfrei): 1x-3y-2z=-9 oder z=(9+x-3y)/2.



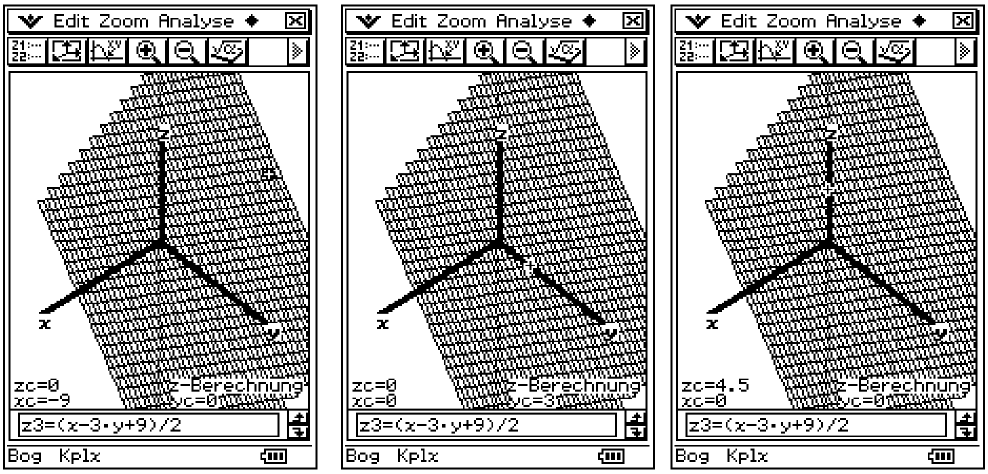




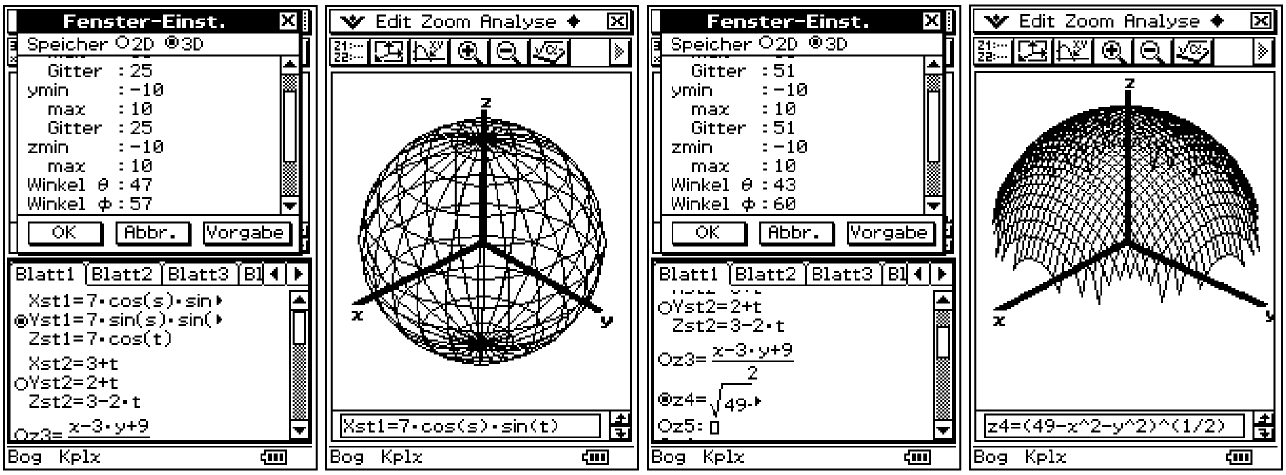
Skalarprodukt und Kreuzprodukt haben die Befehle dotP(…, …) bzw. crossP(…, …).



Darstellung der Achsenabschnitte (Fenstereinstellung: Intervalle symmetrisch um Null wählen!):



Weitere Bilder:



Beachten Sie die unterschiedlichen Liniennetze zur Visualisierung der Oberfläche! Die Formel $z4(x,y)=\sqrt{49-x^2-y^2}$ entspricht der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ \sqrt{49-s^2-t^2} \end{pmatrix}, s \in [-7,7], t \in \left[-\sqrt{49-s^2}, \sqrt{49-s^2}\right].$$

The Mathematics Education into the 21st Century Project

together with

The University of Applied Sciences (FH), Dresden (Germany)

are proud to announce our

10th (Anniversary!) International Conference

“Models in Developing Mathematics Education”

September 11 – 17, 2009
Dresden, Saxony, Germany

in cooperation with

Saxony Ministry of Education

Chairmen
Dr. Alan Rogerson, International Coordinator of the Mathematics in Society Project (Poland).
Prof Dr Fayez Mina, Dept. of Curriculum & Instruction, Faculty of Education, Ain Shams University (Egypt).

You are invited to attend our project conference to be held in the historic and beauty-ful city of Dresden, Germany.
The chairman of the Local Organising Committee will be Prof. Dr. Ludwig Paditz of the Dresden University of Applied Sciences.
For ALL further conference details and updates please email arogerson@inetia.pl .

Hinweis für deutschsprachige Lehrer:
Parallel zum Konferenzprogramm ist ein Lehrerfortbildungsangebot in deutsch geplant (Teacher’s Day in German). Dafür können auch Tagungsbeiträge in Deutsch eingereicht werden.

Parallel-Programm am Wochenende in Deutsch (Lehrerfortbildungsangebot)

Gemeinsam mit Herrn Dr. Rainer Heinrich vom Sächsischen Staatsministerium für Kultus in Dresden wird ein spezielles Programm (in deutscher Sprache) vorbereitet, das **durch das Ministerium als Lehrerfortbildung anerkannt** wird.

Freitag, 11. September	
Registrierung der Konferenzteilnehmer im Mercure Hotel (Prager Strasse)	
18.00 – 21.30	**Empfang zur Begrüßung** im Mercure Hotel
Samstag, 12. September	**Alle Vorträge in der HTW Dresden (FH), Friedrich-List-Platz 1**
9.00 – 9.25	Begrüssung & Bekanntmachungen **Prof. Fayez Mina & Dr. Alan Rogerson** (Projekt-Koordinatoren) **Prof. Dr. Ludwig Paditz** (Vorsitzender des lokalen Organisationskomitees)
9.30 – 10.30	**Eröffnungsvortrag**
10.30 – 11.00	Vormittagspause mit Tee/Kaffee
11.00 – 13.00	**Offenes Forum zum Austausch von Ideen/Erfahrungen/Materialien** Dieses Forum stellt eine Wiederholung gleichartiger Veranstaltungen auf zurückliegenden Konferenzen dar, wo Materialien, Schulbücher, Taschenrechner und Software zum Mathematikunterricht ausgestellt wurden und alle Teilnehmer an den Ausstellungstischen im Foyer Gelegenheit hatten, sich die Exponate anzusehen und darüber vor Ort zu diskutieren. Es handelt sich also um eine Art „offener Bildungsmarkt“ mit einem breiten Angebot, wo die Konferenzteilnehmer frei umhergehen und sich alles ansehen und/oder dabei auch ihre eigenen Materialien präsentieren können. **Hierbei sollen nicht nur deutschsprachige Exponate/Materialien sondern auch englischsprachige (und polnischspachige und andere Sprachen, so hoffen wir es!) zur Geltung kommen.**
Bis zum Mittagessen handelt es sich hier um das gemeinsame Programm für alle Teilnehmer	
13.00 – 14.00	gemeinsames Mittagessen
14.00 – 16.00	**1. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch)**
15.30 – 16.00	Nachmittagspause mit Tee/Kaffee
16.00 – 18.00	**2. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch)**
19.00 – 21.30	**Empfang der Teilnehmer durch das Kultusministerium**
Sonntag, 13. September	**Alle Vorträge in der HTW Dresden (FH), Friedrich-List-Platz 1**
9.00 – 10.45	**Diskussionsveranstaltung über Innovationen im Mathematikunterricht in Deutschland**,
eine Diskussionsrunde mit praktisch tätigen Mathematiklehrern und Erfahrungsberichten, u.a. mit Rüdiger Vernay, Lehrer in Bremen, Schulbuchautor ("Mathe live"); Regina Puscher, Lehrerin und Fachleiterin in Bremen, Schulbuchautorin ("Mathe live"); Heinz Böer, Lehrer am Ricarda-Huch-Gymnasium in Gelsenkirchen; MUED in Appelhülsen; SINUS in Hessen 2007-2009; Eckhard Müller, Lehrer an der Georg-Christoph-Lichtenberg-Schule, Gymnasium in Kassel; Jan Mueller, Lehrer am Rivius-Gymnasium Attendorn, Comenius EU Projekt: Entwicklung der Qualität in der mathematischen Schulausbildung,	
11.00 – 11.30	Vormittagspause mit Tee/Kaffee
11.30 – 13.00	**3. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch) – einschließlich zweier unmittelbar an die Diskussionsveranstaltung anschließender Sitzungen in Deutsch bzw. in Englisch!**
13.00 – 14.00	gemeinsames Mittagessen
14.00 – 15.30	**4. Sitzung: Parallele Veranstaltungen/Arbeitsgruppen (auch in Deutsch)**
15.30 – 16.30	Nachmittagspause mit Tee/Kaffee **Verabschiedung zu den Arbeitsgruppen**

Einer der Vortragenden wird Herr Michael Katzenbach, ehemaliger Lehrer an der Heinrich-Böll-Schule, Hattersheim, sein, gegenwärtig tätig am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB), Berlin, sowie tätig für MUED.
Die Teilnehmer am deutschsprachigen Programm sind herzlich eingeladen zur Teilnahme am Ganztagesausflug am Montag (in die Sächsische Schweiz) und am Mittwoch zum Festlichen Abendessen (mit Tanz in der alten TU Mensa) (optional, Teilnahmekosten sind zu entrichten).