Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben und Lösungen zur ANALYSIS

Aufgabe 36:

Die Fakultät $a_n=(n-1)!$ einer natürlichen Zahl n ist

charakterisiert durch die rekursive Eigenschaft $a_{n+1}=n\cdot a_n$.

Für nichtganzzahlige Werte z wird sie erweitert zu der

sogenannten Gamma-Funktion, diese ist definiert als

$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$. Zeigen Sie mittels partieller

Integration, dass auch die Gammafunktion diese rekursive

Eigenschaft erfüllt, d.h. dass $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$ gilt!

Lösung:

$\Gamma(n)=(n-1)!$

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

ans | n=6

$$120=120$$

$$\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^{z-1} \cdot e^{-x} dx$$

ans|z=6

$$120$$

$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)$

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)$$

ans|n=5

$$120=120$$

$$\int_0^{\infty} x^{z} e^{-x} dx = z\cdot\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \,|\, z=5$$

$$120=120$$

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \Leftrightarrow u'\cdot v=(u\cdot v)'-u\cdot v'$

und

$$\int u'\cdot v dx = u\cdot v - \int u\cdot v' dx$$

$v=x^{z}, u'=e^{-x}$ ergibt $v'=z\cdot x^{z-1}$, $u=-e^{-x}$

somit

$$\int_0^{\infty} x^{z} e^{-x} dx = -x^{z} e^{-x} \big|_0^{\infty} + z\cdot\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

$x^{z} e^{-x} | z=0 = 0$ und $\lim\limits_{z\to\infty} \left(x^{z} e^{-x}\right)=0$

Aufgabe 37:

Sei f eine integrierbare Funktion und F deren Stammfunktion. Zeigen Sie durch Substitution, dass

$\int f(m\cdot x+n) dx = \frac{1}{m} F(m\cdot x+n)+C$ gilt $(m, n \in \mathbf{R})$! Was ergibt sich also für $\int_{\square}^{\square}(3x-5)^{100}dx$?**Lösung:**

$$\int_{\square}^{\square}(3x-5)^{100}dx+C$$

$$\frac{(3\cdot x-5)^{101}}{303}+C$$

$t=3x-5$, $dt=3dx$, d.h. $dx=\frac{1}{3}dt$

somit

$$\int_{\square}^{\square}(3x-5)^{100}dx+C=\frac{1}{3}\int_{\square}^{\square}t^{100}dt+C\,|\,t=3x-5$$

$$\frac{(3\cdot x-5)^{101}}{303}+C=\frac{(3\cdot x-5)^{101}}{303}+C$$

Aufgabe 38:

Gebietsintegral in kartesischen Koordinaten: Der Bereich $0\leq x\leq\pi$ und $0\leq y\leq\sin(x)$ ist mit der Masse der Dichte $\rho(x,y)=1+x+4y$ belegt. Skizzieren Sie diesen Bereich und berechnen Sie seine Gesamtmasse! (Hinweis: Die Masse ergibt sich durch Integration der Dichte über den Bereich.)

Lösung: sin-Bogen über den ersten Nullstellen

$$m=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin(x)}(1+x+4y)\,dy\,dx$$

$$m=2\cdot\pi+2$$

schrittweise

$$\int_0^{\sin(x)}(1+x+4y)\,dy$$

$$x\cdot\sin(x)+\sin(x)-\cos(2\cdot x)+1$$

$$\int_0^{\pi} \mathrm{ansdx}$$

$$2\cdot\pi+2$$

Aufgabe 39:

Gebietsintegral in Polarkoordinaten. Durch $0\leq a\leq r\leq b$ und $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ ist ein Gebiet gegeben (Radius r, Winkel $\varphi, a, b\in R$). Skizzieren Sie es für a=1, b=2! Berechnen Sie anschließend das Gebietsintegral von $f(x,y)=x\cdot y$ über diesen Bereich! (Hinweis: x und y zuerst durch Polarkoordinaten r,φ ausdrücken.)

Lösung:

$x=r\cdot\cos(\varphi)$, $y=r\cdot\sin(\varphi)$, Funktionnaldeterminante r

$$\int_{□}^{□}\int_{□}^{□} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{□}^{□}\int_{□}^{□} f(r\cdot\cos(\varphi),r\cdot\sin(\varphi))\cdot r\,d\varphi\,dr$$

ergibt

$$\int_a^b\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cdot\cos(\varphi)\cdot r\cdot\sin(\varphi)\cdot r\,d\varphi\,dr$$

$$\frac{-a^4}{8}+\frac{b^4}{8}$$

Aufgabe 40:

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion $f(x,y)=4(x-2)(y^2+10y)+3x^3$. Finden Sie anhand der notwendigen Bedingung Kandidaten für Extremstellen. Prüfen Sie anhand des Kriteriums $\Delta=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}\cdot f_{yx}>0$, ob es sich wirklich um Extremstellen handelt. Falls ja, handelt es sich um Minima oder Maxima?

Lösung:

Define $f(x,y)=4(x-2)(y^2+10y)+3x^3$

done

$f(x,y)$

$3\cdot x^3+4\cdot(x-2)\cdot\left(y^2+10\cdot y\right)$

$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \Rightarrow Eq1$

$9\cdot x^2+4\cdot y^2+40\cdot y=0$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \Rightarrow Eq2$

$4\cdot(x-2)\cdot(2\cdot y+10)=0$

$\begin{cases} Eq1 \\ Eq2 \end{cases}\Big|_{x,y}$

$\left\{\{x=2, y=-9\}, \{x=2, y=-1\}, \left\{x=-\frac{10}{3}, y=-5\right\}, \left\{x=\frac{10}{3}, y=-5\right.\right.$ ▶

Es gibt vier verdächtige Stellen

Define $\Delta(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\,\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y\right.$ ▶

done

$\Delta(x,y)\,|\,\{x=2, y=-9\}$

-1024

kein Extremum (Sattelpunkt)

$\Delta(x,y)\,|\,\{x=2, y=-1\}$

-1024

kein Extremum (Sattelpunkt)

$\Delta(x,y)\,|\,\left\{x=-\frac{10}{3}, y=-5\right\}$

2560

Extremum

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) \mid \left\{x=-\frac{10}{3}, y=-5\right\}$$

$$-60$$

$f_{xx}<0$ ergibt Max.

$$\Delta(x,y) \mid \left\{x=\frac{10}{3}, y=-5\right\}$$

$$640$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) \mid \left\{x=\frac{10}{3}, y=-5\right\}$$

$$60$$

$f_{xx}>0$ ergibt Min.

$$f(x,y) \mid \{x=2, y=-9\}$$

$$24$$

$$f(x,y) \mid \{x=2, y=-1\}$$

$$24$$

$$\text{approx}\left(f(x,y) \mid \left\{x=-\frac{10}{3}, y=-5\right\}\right.$$

$$422.2222222$$

$$\text{approx}\left(f(x,y) \mid \left\{x=\frac{10}{3}, y=-5\right\}\right.$$

$$-22.22222222$$

Define z1(x,y)=f(x,y)

done

3D–Grafik Z1:… Z2:…

Aufgabe 41:

Ermitteln Sie für folgende Potenzreihen die Folge a_i der Koeffizienten und bestimmen Sie den Konvergenzradius!

a) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot(3\cdot x)^{i}\right)$

b) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i\cdot x)^{i}}{2^{i}}\right)$

c) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{i}\right)\right)^{i}\right)$

vgl.

de.wikipedia.org/wiki/Konvergenzradius

Lösung:

a) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot(3\cdot x)^{i}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot 3^{i}x^{i}\right)$, d.h. $a_i=i\cdot 3^{i}$

Wurzelkriterium:

$$r=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[i]{i\cdot 3^{i}}}\right)$$

$$r=\frac{1}{3}$$

Konvergenzbereich: $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

Randpunkte: $x=-\frac{1}{3}$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot(3\cdot x)^{i}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(i)=\infty \quad \text{divergent}$$

Randpunkte: $x=\frac{1}{3}$ divergent

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot(-1)^{i}\right)$$

Undefined

notwendiges Konvergenzkriterium nicht erfüllt

$$\lim_{i\to\infty}\left(i\cdot(-1)^i\right)\neq 0$$

b) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i\cdot x)^i}{2^i}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{i^i}{2^i}x^i\right)$, d. h. $a_i=\left(\frac{i}{2}\right)^i$

Wurzelkriterium: $\frac{1}{\sqrt[i]{a_i}}$ untersuchen

$$r=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[i]{\left(\frac{i}{2}\right)^i}}\right)$$

$$r=0$$

nirgends konvergent außer für $x=0$

Quotientenkriterium: $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ untersuchen

$$\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^i}{\left(\frac{i+1}{2}\right)^{i+1}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}}\cdot\frac{i^i}{(i+1)^{i+1}}=2\cdot\left(\frac{i}{i+1}\right)^i\frac{1}{i+1}$$

$$r=\lim_{i\to\infty}\left(2\cdot\left(\frac{i}{i+1}\right)^i\frac{1}{i+1}\right)$$

$$r=0$$

c) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{i}\right)\right)^i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\left(\sin\left(\frac{1}{i}\right)\right)^i\cdot x^i\right)$, d. h.

$a_i=\left(\sin\left(\frac{1}{i}\right)\right)^i$

Wurzelkriterium: $\frac{1}{\sqrt[i]{a_i}}$ untersuchen

$$r=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[i]{\left(\sin\left(\frac{1}{i}\right)\right)^i}}\right)=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{i}\right)}\right)$$

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{i}\right)}\right)$$

$$\infty$$

Reihe ist überall konvergent!

Aufgabe 42:

Nähern Sie die Funktion f(x)=ln(x) durch ein

Taylor-Polynom 3. Grades an für die Entwicklungsstelle

x_0=3!

vgl.

de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe

de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Taylorpolynom

Lösung:

Define f(x)=ln(x)

done

x_0:=3

3

taylor(f(x),x,3,x_0)

$$\frac{(x-3)^3}{81}-\frac{(x-3)^2}{18}+\frac{x-3}{3}+\ln(3)$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i!}\left(\frac{d^i}{dx^i}(f(x))\,|x=x_0\right)(x-x_0)^i\right)+R_n$$

mit $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x))\,|x=\xi\right)(x-x_0)^{n+1}$,

$x\ldots\xi\ldots x_0$

(Lagrange-Restgliedformel)

$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x))\,|x=\xi$ and n=3

$$\frac{-6}{\xi^4}$$

allgemein: $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x))\,|x=\xi \;=\; \frac{(-1)^n \cdot n!}{\xi^{n+1}}$

$$\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x))\,|x=\xi \text{ and } n=4\right)=\left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{\xi^{n+1}}\,|n=4\right)$$

$$\frac{24}{\xi^5}=\frac{24}{\xi^5}$$

Restgliedabschätzung: mit $\xi=x_0-\Delta x$ für

$x\ldots\xi\ldots x_0=3$ und $x_0-\Delta x\le x\le x_0+\Delta x$

$|R_n|\le\frac{1}{(n+1)!}\frac{\left|(-1)^n\right|\cdot n!}{(x_0-\Delta x)^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}$, d.h.

$|R_3|\le\frac{1}{4}\frac{(x-3)^4}{(3-|x-3|)^4}$

Aufgabe 43:

Ermitteln Sie für folgende Funktionen die Taylor-Reihe 2. Grades an der Entwicklungsstelle $x_0=1$!

a) $f(x)=x^2+x$ b) $f(x)=\frac{1}{1+x}$

Lösung:

a)

taylor$(x^2+x, x, 2, 1)$

$$(x-1)^2+3\cdot(x-1)+2$$

b)

taylor$\left(\frac{1}{1+x}, x, 2, 1\right)$

$$\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}$$

Aufgabe 44:

Berechnen Sie $\sqrt[3]{11}$ mittels einer Schmiegeparabel (=Taylor-Polynom 2. Grads). Schätzen Sie den Fehler mittels dem Restglied $R_2(x)$ ab!

Lösung:

Sei $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(8)=\sqrt[3]{8}=2=x_0$ (Entwicklungsstelle)

taylor($\sqrt[3]{x}$, x, 2, 8)

$$\frac{-(x-8)^2}{288}+\frac{x-8}{12}+2$$

$$f(x)\approx\frac{-(x-8)^2}{288}+\frac{x-8}{12}+2$$

$$\frac{-(x-8)^2}{288}+\frac{x-8}{12}+2\,|\,x=11$$

$$\frac{71}{32}$$

approx(ans)

$$2.21875$$

approx($\sqrt[3]{11}$)

$$2.223980091$$

$$\sqrt[3]{11}\approx 2.22$$

genauer: Fehlerabschätzung

$$\left|\sqrt[3]{x}-\left(\frac{-(x-8)^2}{288}+\frac{x-8}{12}+2\right)\right|\le R_2$$

mit $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x))\,|\,x=\xi\right)(x-x_0)^{n+1}$,

$x\ldots\xi\ldots x_0$

(Lagrange-Restgliedformel)

$R_2=\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dx^3}(f(x))\,|\,x=\xi\right)(x-8)^3$, $8\le\xi\le 11$,

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\sqrt[3]{x}\right) \mid x=\xi$$

$$\frac{10}{27\cdot\xi^{\frac{8}{3}}}$$

$$R_2 \le \frac{1}{3!}\frac{10}{27\cdot 8^{\frac{8}{3}}}(11-8)^3$$

$$R_2 \le \frac{5}{768}$$

approx(ans)

$$R_2 \le 6.510416667\text{E-}3$$

zum Vergleich

$$R_2=\left|\sqrt[3]{x}-\left(\frac{-(x-8)^2}{288}+\frac{x-8}{12}+2\right)\right| \mid x=11$$

$$R_2=11^{\frac{1}{3}}-\frac{71}{32}$$

approx(ans)

$$R_2=5.230090569\text{E-}3$$

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie eine Näherungslösung der Gleichung $x\cdot(2+\sin(x))=\frac{1}{10}$. Dabei soll die linke Seite der Gleichung durch eine Schmiegeparabel angenähert werden. Überlegen Sie sich dazu zuerst eine geeignete Entwicklungsstelle.

Lösung:

$$\text{solve}\left(x\cdot(2+\sin(x))=\frac{1}{10}, x\right)$$

$$\{x=0.04880929907\}$$

2D-Grafik

Entwicklungsstelle sei $x_0=0$, da gesuchte Lösung nahe 0 liegt.

taylor(x·(2+sin(x)),x,2,0)

$$x^2+2\cdot x$$

solve$\left(x^2+2\cdot x=\frac{1}{10},x\right)$

$$\left\{x=\frac{-\sqrt{110}}{10}-1,x=\frac{\sqrt{110}}{10}-1\right\}$$

approx(ans)

$$\{x=-2.048808848,x=0.04880884817\}$$

Näherungslösung: $x\approx 0.048809$

Aufgabe 46:

Zeigen Sie, dass die Ableitung von f(x)=sin(x) gleich f'(x)=cos(x) ist! Nutzen Sie dazu die Potenzreihendarstellung der Sinusfunktion und bilden Sie gliedweise die Ableitung. Vergleichen Sie anschließend mit der Potenzreihe der Kosinusfunktion.

vgl.
de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe#Trigonometrische_Funktic▶

Lösung:

Sinusreihe:

$$\sin(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^i\cdot\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right),\quad x\in\mathbf{R},$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x))=\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^i\cdot\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\left((-1)^{i}\cdot\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^{i}\cdot\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right)$$

somit $\cos(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^{i}\cdot\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right)$

Potenzreihen dürfen innerhalb des Konvergenzbereiches gliedweise differenziert werden.

Aufgabe 47:

Gesucht ist ein Näherungswert für $\Gamma(2.8)$. Hierzu soll die Taylorentwicklung 2. Grades der Gammafunktion $\Gamma(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0=3$ betrachtet werden. Ermitteln Sie mit der Taylor-Reihe einen Näherungswert für $\Gamma(2.8)$ auf 2 Kommastellen genau! Schätzen Sie den Fehler auf den so ermittelten Wert auf 3 Kommstellen genau ab!

Hinweis: Für $x>2$ ist $\Gamma'''(x)$ streng monoton steigend.

Folgende Werte der Gammafunktion benötigen Sie möglicherweise: $\Gamma(n)=(n-1)!$ für $n\in N^{+}$

$$\begin{bmatrix}\Gamma'(3) & \Gamma''(3) & \Gamma'''(3) & \Gamma''''(3) & \Gamma'''''(3)\\ 1.85 & 2.49 & 3.45 & 5.52 & 8.85\end{bmatrix}$$

Lösung: vgl. auch Aufg. 36

$\Gamma(2.8)$

$$\frac{36\cdot\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{25}$$

approx(ans)

$$1.676490788$$

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}e^{-x}dx$$

$$\Gamma'(z)=\frac{d}{dz}\left(\int_0^{\infty}x^{z-1}e^{-x}dx\right)=\int_0^{\infty}\frac{d}{dz}\left(x^{z-1}e^{-x}\right)dx=$$

$$\frac{d}{dz}\left(x^{z-1}e^{-x}\right)$$

$$x^{z-1}\cdot\ln(x)\cdot e^{-x}$$

$$\Gamma'(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}\cdot\ln(x)\cdot e^{-x}dx\,|z=3$$

$$\Gamma'(3)=1.84556867$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(x^{z-1}e^{-x}\right)$$

$$x^{z-1}\cdot(\ln(x))^2\cdot e^{-x}$$

$$\Gamma''(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}\cdot(\ln(x))^2\cdot e^{-x}dx\,|z=3$$

$$\Gamma''(3)=2.492929992$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\left(x^{z-1}e^{-x}\right)$$

$$x^{z-1}\cdot(\ln(x))^3\cdot e^{-x}$$

$$\Gamma'''(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}\cdot(\ln(x))^3\cdot e^{-x}dx\,|z=3$$

$$\Gamma'''(3)=3.449965014$$

$$\frac{d^4}{dz^4}\left(x^{z-1}e^{-x}\right)$$

$$x^{z-1}\cdot(\ln(x))^4\cdot e^{-x}$$

$$\Gamma^4(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}\cdot(\ln(x))^4\cdot e^{-x}dx\,|z=3$$

$$\Gamma^4(3)=5.521798578$$

$$\frac{d^5}{dz^5}\left(x^{z-1}e^{-x}\right)$$

$$x^{z-1}\cdot(\ln(x))^5\cdot e^{-x}$$

$$\Gamma^5(z)=\int_0^{\infty} x^{z-1}\cdot(\ln(x))^5\cdot e^{-x}dx\,|z=3$$

$$\Gamma^5(3)=8.845805594$$

$$\Gamma(z)=\Gamma(3)+\Gamma'(3)(z-3)+\frac{\Gamma''(3)}{2}(z-3)^2$$

$$\Gamma(2.8)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}2\\1.84556867\\\frac{2.492929992}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2.8-3\\(2.8-3)^2\end{bmatrix}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{14}{5}\right)=\frac{66905999273333}{39807350082188}$$

approx(ans)

$$\Gamma(2.8)=1.680744866$$

Restgliedabschätzung:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(\Gamma(z))\,|z=\xi\right)(z-z_0)^{n+1},\quad z\ldots\xi\ldots z_0$$

(Lagrange-Restgliedformel)

$$|R_2|\le\frac{1}{3!}|2.8-3|^3\max(\Gamma'''(\xi),\xi\in[2.8,3])$$

$$\Gamma'''(z)=\int_0^{\infty} x^{z-1}\cdot(\ln(x))^3\cdot e^{-x}dx\,|z=2.8$$

$$\Gamma'''\left(\frac{14}{5}\right)=2.50305501$$

$$\Gamma'''(z)=\int_0^{\infty} x^{z-1}\cdot(\ln(x))^3\cdot e^{-x}dx\,|z=2.9$$

$$\Gamma'''\left(\frac{29}{10}\right)=2.93947925$$

$$\Gamma'''(z)=\int_0^{\infty} x^{z-1}\cdot(\ln(x))^3\cdot e^{-x}dx \mid z=3$$

$$\Gamma'''(3)=3.449965014$$

also

$$|R_2|\le\frac{1}{3!}0.2^3 3.449965014$$

$$|R_2|\le\frac{6202561}{1348396500}$$

approx(ans)

$$|R_2|\le 4.599953352\text{E-}3$$

Aufgabe 48:

Bestimmmen Sie das unbestimmte Integral

$\int \sin(n\cdot x)\cdot\cos(m\cdot x)dx$ für $(n, m\in N^+,\ n\neq m)$ durch

zweimalige partielle Integration und anschließendem Umstellen nach dem gesuchten Integral! Was erhalten Sie damit für das bestimmte Integral von 0 bis 2π?

Lösung:

$$\int \sin(n\cdot x)\cdot\cos(m\cdot x)dx$$

$$\frac{-(m\cdot\cos(m\cdot x+n\cdot x)-n\cdot\cos(m\cdot x+n\cdot x)-m\cdot\cos(m\cdot x-n\cdot x)-n\cdot\cos}{2\cdot(m+n)\cdot(m-n)}$$

simplify(ans)

$$\frac{n\cdot\cos(m\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)+m\cdot\sin(m\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)}{(m+n)\cdot(m-n)}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\cdot x)\cdot\cos(m\cdot x)dx$$

$$\frac{-(m\cdot\cos(2\cdot m\cdot\pi+2\cdot n\cdot\pi)-m\cdot\cos(2\cdot m\cdot\pi-2\cdot n\cdot\pi)-n\cdot\cos(2\cdot m\cdot\pi\cdot}{2\cdot(m+n)\cdot(m-n)}$$

simplify(ans|m=constn(1) and n=constn(2))

$$0$$

Bem.: Orthogonalitätsbedingung für $n \neq m$

Diese Art der Integrale wird bei der Herleitung der Fourier-Reihe benötigt.

Für $n=m$ folgt

$$\int_{\square}^{\square} \sin(n\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)\,dx+C$$

$$C-\frac{\cos(2\cdot n\cdot x)-1}{4\cdot n}$$

tExpand(ans)

$$\frac{-\left((\cos(n\cdot x))^2-(\sin(n\cdot x))^2-1\right)}{4\cdot n}+C$$

$(\cos(n\cdot x))^2=1-(\sin(n\cdot x))^2$ ergibt

$$\frac{-\left(1-(\sin(n\cdot x))^2-(\sin(n\cdot x))^2-1\right)}{4\cdot n}+C=$$

$$\frac{2(\sin(n\cdot x))^2}{4\cdot n}+C=\frac{(\sin(n\cdot x))^2}{2\cdot n}+C$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)\,dx$$

$$\frac{-(\cos(4\cdot n\cdot \pi)-1)}{4\cdot n}$$

ans|n=constn(1)

$$0$$

Bem.: Orthogonalitätsbedingung für $n=m$

Aufgabe 49:

Betrachtet werde ein Sägezahnimpuls, der für $x\in(0,3]$ definiert ist als $f(x)=\frac{1}{3}x$ und für weitere x-Werte periodisch fortgesetzt wird. Berechnen Sie die dessen

Fourier-Reihe, d.h. ermitteln Sie alle Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n! Welchen Wert hat die Grenzfunktion an der Stelle x=0? Lassen Sie sich mithilfe eines Computerprogramms einige der ersten Terme der Fourier-Reihe zeichnen! [Zusatz] Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(n)\right)$, indem Sie die Fourier-Reihe an der Stelle $x = \frac{3}{2\pi}$ auswerten!

Lösung:

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)),\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

Periode

T:=3

3

$$\frac{a0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^3\frac{1}{3}x\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}0x\right)dx$$

$$\frac{a0}{2}=\frac{1}{2}$$

$$an=\frac{2}{T}\int_0^3\frac{1}{3}x\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}n\cdot x\right)dx$$

$$an=\frac{6\cdot n\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi)\cdot\pi+3\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi)-3}{6\cdot n^2\cdot\pi^2}$$

ans|n=constn(1)

an=0

$$bn=\frac{2}{T}\int_0^3\frac{1}{3}x\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}n\cdot x\right)dx$$

$$bn=\frac{-(6\cdot n\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi)\cdot\pi-3\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi))}{6\cdot n^2\cdot\pi^2}$$

ans|n=constn(1)

$$bn=\frac{-1}{\pi\cdot constn(1)}$$

ans|constn(1)=n

$$bn=\frac{-1}{n\cdot\pi}$$

Ergebnis:

$$s(x)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot\pi}\sin(\frac{2\pi}{3}n\cdot x)\right)$$

2D-Grafik

Es gilt (**Dirichlet-Kriterium**, halbe Sprunghöhe):

$s(x)=f(x)$ für alle Stetigkeitsstellen $(0<x<3)$

$s(x)=\frac{1}{2}$ für die Unstetigkeitsstellen $(x=0,3,6,...)$

weiter mit $x=\frac{3}{2\pi}$

$$s(\frac{3}{2\pi})=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot\pi}\sin(n)\right)=\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}\frac{3}{2\pi}$$

hieraus:

$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(n)\right)=\frac{1}{2\pi}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(n)\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

Aufgabe 50:

Formen Sie die DGL yy'+x-2y'=3 in explizite Form um, d.h. stellen Sie um nach y'. Lassen Sie sich das Richtungsfeld etwa mit dem Online-Tool (java) der Bluffton University (Homepage von Prof. Darryl K.

Nester)

homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html

skizzieren. FindenSie grafsch die partikuläre Lösung für das Anfangswertproblem y(2)=3! [Zusatz] Warum zeigt das Online-Tool eine Kurve mit vielen Zacken an?

Lösung:

solve(y·ys+x−2ys=3, ys)

$$\left\{ys=\frac{-x}{y-2}+\frac{3}{y-2}\right\}$$

$y'=\frac{-x}{y-2}+\frac{3}{y-2}$

$$y'=\frac{-x}{y-2}+\frac{3}{y-2}$$

simplify(ans)

$$y'=\frac{-(x-3)}{y-2}$$

Anfangswertproblem (AWP)

$y'=\frac{-(x-3)}{y-2}$ mit y(2)=3

dSolve($y'=\frac{-(x-3)}{y-2}$, x, y, x=2, y=3)

$$\left\{y=\sqrt{-x^2+6\cdot x-7}+2\right\}$$

$(ans-2)^2$

$$\left\{(y-2)^2=-x^2+6\cdot x-7\right\}$$

$ans-(-x^2+6\cdot x-7)$

$$\left\{x^2+(y-2)^2-6\cdot x+7=0\right\}$$

$(x-3)^2+(y-2)^2=2$

Kreisgleichung (quadratische Ergänzung)

DGL-Grafik-Editor

Euler-Verfahren zur numerischen Lösung des AWP

de.wikipedia.org/wiki/Explizites_Euler-Verfahren

Diskretisierungs-Schrittweite $h>0$ (bzw. $h<0$), betrachte die diskreten Punkte

$x_k=x_0+k\cdot h$, $k=0,1,2,3,...$

d.h. $x_{k+1}=x_k+h$

und berechne die Werte

$y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k,y_k)$ hier mit $f(x_k,y_k)=y'(x_k)=\frac{3-x_k}{y_k-2}$,

$k=0,1,2,3,...$

Tabellierung:

h:=0.2

0.2

x_0:=2

2

seq(x_0+k·h,k,0,10,1)

{2,2.2,2.4,2.6,2.8,3,3.2,3.4,3.6,3.8,4}

Define $f(x_k,y_k)=\frac{3-x_k}{y_k-2}$

done

y_0:=3

3

y_1:=y_0+h·f(x_0,y_0)

3.2

x_1:=2.2

2.2

y_2:=y_1+h·f(x_1,y_1)

3.333333333

usw.

Folgeneditor

$a_{n+1}=a_n+0.2,\ a_0=2$ (xliste)

$b_{n+1}=b_n+\frac{0.2\cdot(3-a_n)}{b_n-2},\ b_0=3$ (yliste)

$b_{n+1}=c_n+\frac{0.2\cdot(3-(2+n\cdot 0.2))}{c_n-2},\ c_0=3$ (yliste)

xliste

{2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4, 4.2, 4.4,

yliste

{3, 3.2, 3.333333333, 3.423333333, 3.479539422, 3.5(

Define $y1(x)=\sqrt{-x^2+6\cdot x-7}+2$

done

STAT–Editor

Aufgabe 51:

Prüfen Sie durch Einsetzen, ob die Funktion $y(x)=\frac{e^x}{3+e^x}$

eine Lösung der DGL $y'=y\cdot(1-y)$ ist!

Lösung:

Define $y(x)=\frac{e^x}{3+e^x}$

done

$\frac{d}{dx}(y(x))$

$$\frac{3\cdot e^x}{(e^x+3)^2}$$

$\frac{3\cdot e^x}{(e^x+3)^2}=y(x)(1-y(x))$

$$\frac{3\cdot e^{x}}{(e^{x}+3)^{2}}=\frac{-\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+3}-1\right)\cdot e^{x}}{e^{x}+3}$$

simplify(ans)

$$\frac{3\cdot e^{x}}{(e^{x}+3)^{2}}=\frac{3\cdot e^{x}}{(e^{x}+3)^{2}}$$

DelVar y

done

dSolve(y'=y·(1−y),x,y)

$$\left\{y=\frac{e^{x+\mathrm{const}(1)}}{e^{x+\mathrm{const}(1)}-1},y=\frac{e^{x+\mathrm{const}(1)}}{e^{x+\mathrm{const}(1)}+1}\right\}$$

ans|const(1)=c

$$\left\{y=\frac{e^{x+c}}{e^{x+c}-1},y=\frac{e^{x+c}}{e^{x+c}+1}\right\}$$

$y=\frac{e^{x+c}}{e^{x+c}+1}$ |c=ln(1/3)

$$y=\frac{e^{x}}{3\cdot\left(\frac{e^{x}}{3}+1\right)}$$

simplify(ans)

$$y=\frac{e^{x}}{e^{x}+3}$$

Aufgabe 52:

Finden Sie durch Einsetzen Werte für a, b und c, sodass die Funktion $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ eine Lösung der DGL $y''+3y=x^2+x$ ist!

Lösung:

dSolve(y''+3y=x^2+x, x, y)

$$\left\{y=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}+\cos(\sqrt{3}\cdot x)\cdot\text{const}(1)+\sin(\sqrt{3}\cdot x)\cdot\text{const}(2)-\frac{2}{9}\right\}$$

ans|const(1)=0 and const(2)=0

$$\left\{y=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}-\frac{2}{9}\right\}$$

oder:

Define $y(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))+3y(x)=x^2+x$$

$$3\cdot\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)+2\cdot a=x^2+x$$

ans−(x^2+x)

$$3\cdot\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)-x^2-x+2\cdot a=0$$

collect(ans)

$$-(1-3\cdot a)\cdot x^2-(1-3\cdot b)\cdot x+2\cdot a+3\cdot c=0$$

$$\left.\begin{cases}1-3\cdot a=0\\1-3\cdot b=0\\2\cdot a+3\cdot c=0\end{cases}\right|_{a,\,b,\,c}$$

$$\left\{a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3},\ c=-\frac{2}{9}\right\}$$

Aufgabe 53:

Zeigen Sie, dass $y(x,t)=A\cdot\sin(x\pm v\cdot t)$ Lösungen der partiellen DGL

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x,t))=\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}(y(x,t))$$ ("Wellengleichung") sind!

Dabei ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Lösung:

Define $y(x,t)=A\cdot\sin(x+v\cdot t)$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x,t))=\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}(y(x,t))$$

$$-A\cdot\sin(t\cdot v+x)=-A\cdot\sin(t\cdot v+x)$$

Define $y(x,t)=A\cdot\sin(x-v\cdot t)$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x,t))=\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}(y(x,t))$$

$$A\cdot\sin(t\cdot v-x)=A\cdot\sin(t\cdot v-x)$$

Aufgabe 54:

Klassifizieren Sie die folgenden DGL bezüglich der im Unterricht besprochenen Merkmale. [Zusatz] Überlegen Sie sich durch geschicktes Nachdenken eine Funktion, welche die DGL erfüllt.

a) $y'(x)=x$ b) $y'(x)=e^x$

c) $y'(x)=2\cdot y(x)$ d) $y''(x)=42$

e) $y''(x)=y(x)$ f) $y'(x)=\frac{1}{y(x)}$

Lösung:

a)

$$\int_{\square}^{\square} x\,dx$$

$$\frac{x^2}{2}$$

b)

$$\int_{\square}^{\square} e^x\,dx$$

e^x

c)

dSolve(y'=2y,x,y)|const(1)=1

$\{y=e^{2\cdot x}\}$

d)

$\int_{□}^{□}\int_{□}^{□} 42\,dx\,dx$

$21\cdot x^2$

e)

dSolve(y''=y,x,y)|const(1)=1 and const(2)=0

$\{y=e^{-x}\}$

f)

dSolve(y'=1/y,x,y)|const(1)=0

$\{y=-\sqrt{2\cdot x}, y=\sqrt{2\cdot x}\}$

Aufgabe 55:

Klassifizieren Sie die DGL! Vorgegeben ist die allgemeine Lösung der DGL. Finden Sie eine partikuläre Lösung, welche die gegebene Anfangsbedingung erfüllt!

a) $y'=x$ mit Lösung $y=\frac{1}{2}x^2+C$ für $y(0)=4$

b) $y'=y$ mit Lösung $y=C\cdot e^x$ für $y(0)=4$

c) $y'=3y$ mit Lösung $y= C\cdot e^{3x}$ für $y(0)=4$

d) $y''=3y$ mit Lösung $y=C_1\cdot e^{\sqrt{3}x}+C_2\cdot e^{-\sqrt{3}x}$ für $y(0)=4$ und $y'(0)=5$

e) $y''=-3y$ mit Lösung $y=C_1\cdot\cos(\sqrt{3}x)+C_2\cdot\sin(\sqrt{3}x)$ für $y(0)=4$, $y'(0)=5$

Lösung:

a) inhom. lin. mit konst. Koeff. 1.Ordn.

Define $y(x)=\frac{1}{2}x^{2}+C$

done

$y(0)=4$

$C=4$

b) hom. lin. mit konst. Koeff. (y'−y=0) 1.Ordn.

Define $y(x)=C\cdot e^{x}$

done

$y(0)=4$

$C=4$

c) hom. lin. mit konst. Koeff. (y'−3y=0) 1.Ordn.

Define $y(x)=C\cdot e^{3x}$

done

$y(0)=4$

$C=4$

d) hom. lin. mit konst. Koeff. (y''−3y=0) 2.Ordn.

Define $y(x)=C1\cdot e^{\sqrt{3}x}+C2\cdot e^{-\sqrt{3}x}$

done

$y(0)=4$

$C1+C2=4$

$\left(\frac{d}{dx}(y(x))\,|\,x=0\right)=5$

$\sqrt{3}\cdot C1-\sqrt{3}\cdot C2=5$

$\left\{\begin{array}{l}C1+C2=4\\ \sqrt{3}\cdot C1-\sqrt{3}\cdot C2=5\end{array}\right|_{C1,\,C2}$

$\left\{C1=\frac{5\cdot\sqrt{3}+12}{6},\ C2=\frac{\sqrt{3}\cdot(4\cdot\sqrt{3}-5)}{6}\right\}$

simplify(ans)

$$\left\{C1=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{6}+2, C2=\frac{-5\cdot\sqrt{3}}{6}+2\right\}$$

e) hom. lin. mit konst. Koeff. (y''+3y=0) 2.Ordn.

Define $y(x)=C1\cdot\cos(\sqrt{3}x)+C2\cdot\sin(\sqrt{3}x)$

done

y(0)=4

C1=4

$$\left(\frac{d}{dx}(y(x)) | x=0\right)=5$$

$$\sqrt{3}\cdot C2=5$$

solve(ans, C2)

$$\left\{C2=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$$

allgemeine Lösung finden:

dSolve(y'=x, x, y)|const(1)=C

$$\left\{y=\frac{x^2}{2}+C\right\}$$

dSolve(y'=y, x, y)|const(1)=C

$$\{y=C\cdot e^{x}\}$$

dSolve(y'=3y, x, y)|const(1)=C

$$\{y=C\cdot e^{3\cdot x}\}$$

dSolve(y''=3y, x, y)|const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\{y=C2\cdot e^{\sqrt{3}\cdot x}+C1\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot x}\}$$

dSolve(y''=-3y, x, y)|const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\{y=C1\cdot\cos(\sqrt{3}\cdot x)+C2\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot x)\}$$

Aufgabe 56:

Prüfen Sie, ob die folgende DGL homogen und linear sind!

Falls nichts, geben Sie den homogenen und den inhomogenen Anteil an!

a) $y'=y$ b) $y'=y+\sin(x)$

c) $x^2y''=2y'-y$ d) $0=\frac{y''+2y}{y''-3y}$

e) $\frac{y'}{y}=x+\frac{1}{y}$ f) $(y'')^2=\ln(x)\cdot(y\cdot y')$

g) $\sqrt{y'+y}=0$ h) $y''-2y'+y=\sin(x)$

i) $\ln(x)y''+\frac{y'}{x}=0$

Lösung:

a) hom. lin. ($y'-y=0$)

b) inhom. lin. ($y'-y=\sin(x)$), vgl. a)

c) hom. lin. ($x^2y''-2y'+y=0$)

d) hom. lin. ($y''+2y=0$ mit $y''-3y\neq0$)

e) inhom. lin. ($y'-x\cdot y=1$ mit $y\neq0$)

f) nichtlin. (keine Unterscheidung in hom. bzw. inhom.!)

g) lin. hom. mit $y'+y\geq0$

h) inhom. lin. Störfkt. $\sin(x)$

i) lin. hom.

Lösungen:

a)

dSolve(y'=y, x, y)|const(1)=C

$$\left\{y=C\cdot e^{x}\right\}$$

b)

dSolve(y'=y+sin(x), x, y)|const(1)=C

$$\left\{y=C\cdot e^{x}-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}\right\}$$

c) keine elementare Lösung!

$\mathrm{dSolve}(x^2y''=2y'-y,x,y)|\mathrm{const}(1)=C1 \text{ and } \mathrm{const}(2)=C2$

$$\left\{y''=\frac{2\cdot y'}{x^2}-\frac{y}{x^2}\right\}$$

d)

$\mathrm{dSolve}(y''+2y=0,x,y)|\mathrm{const}(1)=C1 \text{ and } \mathrm{const}(2)=C2$

$$\{y=C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+C2\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)\}$$

$\frac{d^2}{dx^2}(C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+C2\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x))-3(C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+C2\cdot\mathrm{si}$ ▶

$$-3\cdot(C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+C2\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x))-2\cdot C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)-2\cdot C2\cdot\mathrm{s}$$ ▶

simplify(ans)

$$-5\cdot C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)-5\cdot C2\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)\neq 0$$

ans/(−5)

$$\frac{5\cdot C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+5\cdot C2\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)}{5}\neq 0$$

simplify(ans)

$$C1\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+C2\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)\neq 0$$

also keine Lösung!

e)

$\mathrm{dSolve}\left(\frac{y'}{y}=x+\frac{1}{y},x,y\right)|\mathrm{const}(1)=C$

$$\left\{-C\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-\int e^{\frac{-x^2}{2}}dx\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+y=0\right\}$$

f)

$\mathrm{dSolve}((y'')^2=\ln(x)\cdot(y\cdot y'),x,y)$

$$\{y''=-\sqrt{y}\cdot\sqrt{\ln(x)}\cdot\sqrt{y'},\ y''=\sqrt{y}\cdot\sqrt{\ln(x)}\cdot\sqrt{y'}\}$$

g)

$\mathrm{dSolve}(\sqrt{y'+y}=0,x,y)|\mathrm{const}(1)=C$

$$\{y=C\cdot e^{-x}\}$$

h)

dSolve(y''−2y'+y=sin(x), x, y) | const(1)=C1 and const(2)▶

$$\left\{y=C2\cdot x\cdot e^{x}+C1\cdot e^{x}+\frac{\cos(x)}{2}\right\}$$

i)

dSolve$\left(\ln(x)y''+\frac{y'}{x}=0, x, y\right)$ | const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\left\{y-C2-\int\frac{-e^{C1}}{|\ln(x)|}dx=0, -\int\frac{e^{C1}}{|\ln(x)|}dx+y-C2=0\right\}$$

Aufgabe 57:

In einen undichten Tank fließen pro Sekunde 10[l] Wasser. Außerdem sickert jede Sekunde ein Promille der aktuellen Wassermenge aus dem Tank. Zum Zeitpunkt t=7[s] enthält der Tank 98[l]. Der Tank sei so groß, dass er nie voll wird. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Wassermenge im Tank auf und geben Sie die Anfangsbedingung an. Schreiben Sie alle Zahlenwerte mit ihren physikalischen Einheiten auf! Klassifizieren Sie diese DGL!

Lösung:

Die Wassermenge (in Litern) im Tank sei bezeichnet mit V. Die Zuflussrate beträgt $\sigma z=10[l/s]$. die Abflussrate $\sigma a=-\frac{1}{1000}V[s^{-1}]$ (Promille=1 Tausendstel). Zu jedem Zeitpunkt setzt sich die Änderung dV der Wassermenge zusammen aus Zufluss- und Abflussrate:

$\frac{d}{dt}(V)=V'(t)=\sigma z+\sigma a=10-\frac{1}{1000}V$ ergibt

$V'+\frac{1}{1000}V=10$ für $V=V(t)$, DGL lin. inhom. 1.Ordn.

AB: $V(7)=98$

$\mathrm{dSolve}(V'+\frac{1}{1000}V=10,t,V,t=7,V=98)$

$$\left\{V=-9902\cdot e^{\frac{-t}{1000}+\frac{7}{1000}}+10000\right\}$$

$V(t)=10000-9902\cdot e^{\frac{7}{1000}}e^{\frac{-t}{1000}}=10000-9902\cdot e^{0.007}e^{-}$

$\mathrm{approx}(9902\cdot e^{0.007})$

$$9971.557166$$

Define $V(t)=10000-9971.557\cdot e^{-0.001t}$

done

$\mathrm{approx}(V(7))$

$$98.0001649$$

$\mathrm{approx}(V(0))$

$$28.443$$

$\lim\limits_{t\to\infty}(V(t))$

$$10000$$

Aufgabe 58:

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL durch direkte Integration!

a) $y'''=\sin(2x)$ b) $\frac{y'}{x}-\ln(x)=0$

c) $(y''-x)\cdot(y'+x^2)=0$

d) $(y')^2-y'-6=0$

Lösung:

a)

$$dSolve(y'''=\sin(2x), x, y) | const(1)=C1 \text{ and } const(2)=C2$$

$$\left\{y=C3\cdot x^2+\frac{x^2}{4}+C2\cdot x+C1+\frac{\cos(2\cdot x)}{8}\right\}$$

zusammengefasst: $y=C\cdot x^2+C2\cdot x+C1+\frac{\cos(2\cdot x)}{8}$

b)

$$dSolve\left(\frac{y'}{x}-\ln(x)=0, x, y\right) | const(1)=C1$$

$$\left\{y=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}+C1\right\}$$

c) ein Faktor muss "verschwinden"!

$$dSolve((y''-x)=0, x, y) | const(1)=C1 \text{ and } const(2)=C2$$

$$\left\{y=\frac{x^3}{6}+C2\cdot x+C1\right\}$$

sowie

$$dSolve((y'+x^2)=0, x, y) | const(1)=C3$$

$$\left\{y=\frac{-x^3}{3}+C1\right\}$$

d) sei $y'=z$

$$solve(z^2-z-6=0, z)$$

$$\{z=-2, z=3\}$$

$$dSolve(y'=-2, x, y) | const(1)=C1$$

$$\{y=-2\cdot x+C1\}$$

$$dSolve(y'=3, x, y) | const(1)=C2$$

$$\{y=3\cdot x+C2\}$$

$$dSolve((y')^2-y'-6=0, x, y) | const(1)=C1$$

$$\{y=-2\cdot x+C1, y=3\cdot x+C1\}$$

$$\{y=-2\cdot x+C1, y=3\cdot x+C2\}$$

$$\{y=-2\cdot x+C1, y=3\cdot x+C2\}$$

Aufgabe 59:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung für die DGL $y'=(1+y^2)x^3$ mit der Methode TdV: "Trennung der Variablen".

b) Ermitteln Sie die partikuläre Lösung für das Anfangswertproblem $y(3)=2$!

Lösung:

a)

$\text{dSolve}(y'=(1+y^2)x^3, x, y)\,|\,\text{const}(1)=C$

$$\left\{y=\tan\left(\frac{x^4}{4}+C\right)\right\}$$

b)

$\text{Define } y(x)=\tan\left(\frac{x^4}{4}+C\right)$

done

$y(3)=2$

$$\tan\left(C+\frac{81}{4}\right)=2$$

$\text{solve}(\text{ans}, C)$

$$\left\{C=-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\cdot\text{constn}(1)+\frac{\pi}{2}-\frac{81}{4}\right\}$$

$\text{ans}\,|\,\text{constn}(1)=k$

$$\left\{C=k\cdot\pi-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-\frac{81}{4}\right\}$$

$y(x)=\tan\left(\frac{x^4}{4}+k\cdot\pi-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-\frac{81}{4}\right),\quad k\in\mathbb{Z}$

Es gilt: $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}(2)$

$\text{judge}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}(2)\right)$

TRUE

Kontrolle der AB wegen der mehrdeutigen(?) partikulären Lösung:

Define $y1(x)=\tan\left(\frac{x^4}{4}+k\cdot\pi+\tan^{-1}(2)-\frac{81}{4}\right)$

done

2D-Grafik

y(3)=2

$$\frac{-1}{\tan\left(k\cdot\pi-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=2$$

solve(ans, k)

{k=-constn(1)}

Die tan-Funktion hat die Periode π, sodass k=0 gesetzt werden kann:

Ergebnis: $y1(x)=\tan\left(\frac{x^4}{4}+\tan^{-1}(2)-\frac{81}{4}\right)$

Aufgabe 60:

Wir betrachten noch einmal die DGL aus dem vorangegangenen Aufgabenblatt. Diese lautete:

$$V'+\frac{1}{1000}V=10$$

mit V(7)=98. Lösen Sie zuerst die homogene DGL mit dem Verfahren der Trennung der Variablen!

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die homogene DGL noch einmal mit dem Verfahren der charakteristischen Gleichung lösen! Um eine partikuläre Lösung zu finden, wählen Sie den Ansatz yp(x)=A und bestimmen Sie A durch Einsetzen in die DGL! Geben Sie nun die allgemeine Lösung der DGL an und ermitteln Sie die Lösung für die gegebene Anfangsbedingung!

Lösung:

dSolve$(V'+\frac{1}{1000}V=0,t,V)$ | const(1)=C

$$\left\{V=C\cdot e^{\frac{-t}{1000}}\right\}$$

charakt. Gl. lautet $\lambda+\frac{1}{1000}=0$, d.h. $\lambda=-\frac{1}{1000}$

Ansatz:

Define yp(x)=A

done

$\frac{d}{dx}(yp(x))+\frac{1}{1000}yp(x)=10$

$$\frac{A}{1000}=10$$

hieraus: A=10000

Define $V(t)=10000+C\cdot e^{\frac{-t}{1000}}$

done

V(7)=98

$$C\cdot e^{-\frac{7}{1000}}+10000=98$$

solve(ans, C)

$$\left\{C=-9902\cdot e^{\frac{7}{1000}}\right\}$$

approx(ans)

$$\{C=-9971.557166\}$$

Bem.: Wir rechnen in der Mathematik nur mit den Maßzahlen (ohne Maßeinheiten), nachdem diese aufeinander abgestimmt wurden.

Aufgabe 61:

Betrachtet werden soll die DGL $x \cdot y' = y \cdot \sin(x)$

a) Klassifizieren Sie diese DGL bzgl. Ordnung, Homogenität, Linearität. (Begründung!)

b) Sie kann mittels der Methode "Trennung der Variablen" gelöst werden. Geben Sie die beiden Integrale an, die dabei zu lösen wären!

c) Eines der beiden Integrale ist schwer zu lösen. Daher soll die Lösung genähert werden für kleine Werte $|x|$, indem der Term $\sin(x)$ in der DGL ersetzt wird durch seine Taylorentwicklung 3. Grades um die Stelle $x_0=0$. Geben Sie die dadurch entstehenden Integrale an!

d) Finden Sie die allgemeine Lösung der genäherten DGL!

Lösung:

a) hom. lin. DGL 1.Ordnung: $x \cdot y' - \sin(x) \cdot y = 0$

dSolve(x·y'−sin(x)·y=0, x, y)|const(1)=C

$$\left\{-\int \frac{\sin(x)}{x} dx + \ln(|y|) - C = 0\right\}$$

b)

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{y} dy = \int_{\square}^{\square} \frac{\sin(x)}{x} dx + C$$

$$\ln(|y|) = \int \frac{\sin(x)}{x} dx + C$$

c)

taylor(sin(x), x, 3, 0)

$$\frac{-x^3}{6} + x$$

$$\int \frac{1}{y}dy=\int \frac{\frac{-x^3}{6}+x}{x}dx+C=\int \frac{-x^2}{6}+1dx+C$$

d)

$$\int \frac{1}{y}dy=\int \frac{-x^2}{6}+1dx+C$$

$$\ln(|y|)=\frac{-x^3}{18}+x+C$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=-e^{\frac{-x^3}{18}+x+C}, y=e^{\frac{-x^3}{18}+x+C}\right\}$$

$y=C1\cdot e^{\frac{-x^3}{18}+x}$ mit $C1 \in \mathbb{R}$. ($y=0$ singuläre Lösung)

Bem.: Integralsinus

$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ ist eine nicht elementar integrierbar Fu

https://de.wikipedia.org/wiki/Integralsinus

allgemeine Lösung demnach: $y=C1\cdot e^{Si(x)}$

Aufgabe 62:

Lösen Sie die DGL $y'+y=x^2$, indem Sie

a) einmal die homogene DGL mittels Trennung der Variablen (TdV) lösen und anschließend eine Variation der Konstanten (VdK) durchführen;

b) und einmal die Lösungsformel direkt anwenden:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL 1. Ordnung $y'+P(x)y=Q(x)$ lautet

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot\left(e^{\int P(x)dx}\right)dx+C\right)$$

statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node182.html

www.massmatics.de/merkzettel/

#!505:Lineare_Differentialgleichungen_1._Ordnung

Hinweis: Partielle Integration für das Integral verwenden.

Lösung:

dSolve$(y'+y=x^2, x, y)|\mathrm{const}(1)=C$

$$\{y=C\cdot e^{-x}+x^2-2\cdot x+2\}$$

a) TdV:

$$\int\frac{1}{y}dy=\int-1dx+C$$

$$\ln(|y|)=-x+C$$

solve(ans, y)

$$\{y=-e^{-x+C}, y=e^{-x+C}\}$$

$y(x)=C1\cdot e^{-x}$

VdK: $y(x)=C1(x)\cdot e^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(C1(x)\cdot e^{-x}\right)+C1(x)\cdot e^{-x}=x^2$$

$$\left(\frac{d}{dx}(C1(x))-C1(x)\right)\cdot e^{-x}+e^{-x}\cdot C1(x)=x^2$$

simplify(ans)

$$\frac{d}{dx}(C1(x))\cdot e^{-x}=x^2$$

$C1'(x)=x^2\cdot e^{x}$

$\int x^2 \cdot e^x \, dx$

$$x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x$$

$y(x) = C1(x) \cdot e^{-x} =$

$(x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x) \cdot e^{-x}$

$$(x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x) \cdot e^{-x}$$

simplify(ans)

$$x^2 - 2 \cdot x + 2$$

Ergebnis: $y = C1 \cdot e^{-x} + x^2 - 2 \cdot x + 2$

b)

Define $P(x)=1$

done

Define $Q(x)=x^2$

done

$$e^{-\int P(x)\,dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot \left(e^{\int P(x)\,dx} \right) dx + C \right)$$

$$(x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C) \cdot e^{-x}$$

y=simplify(ans)

$$y = C \cdot e^{-x} + x^2 - 2 \cdot x + 2$$

Aufgabe 63:

Ermitteln Sie, ob folgende Mengen von Funktionen linear abhängig oder unabhängig sind! Wie lautet jeweils deren **lineare Hülle**?

a) $\{x\}$ b) $\{0,x\}$ c) $\{1,x\}$

d) $\{x^{1/2},x^{-1/2}\}$ e) $\{x,x^2,2x^3\}$

f) $\{x,x^2,(3x)^2\}$ g) $\{\sqrt{x},\sqrt{2x}\}$

h) $\{\ln(x),\ln(2x)\}$ i) $\{\ln(x),\ln(2x),4\}$

https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Hülle

Lösung:

a) $\{x\}$ ergibt die Menge $\{y|y=\lambda\cdot x,\ \lambda\in\mathbf{R}\}$

Menge aller linearen Funktionen durch den Koordinatenursprung

b) $\{0,x\}$ ergibt die Menge $\{y|y=\lambda\cdot x,\ \lambda\in\mathbf{R}\}$

Menge aller linearen Funktionen durch den Koordinatenursprung

c) $\{1,x\}$ ergibt die Menge $\{y|y=\lambda_1+\lambda_2\cdot x,\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}\}$

Menge aller linearen Funktionen

d) $\{x^{1/2}, x^{-1/2}\}$ ergibt die Menge $\{y \mid y=\lambda_1 \cdot \sqrt{x}+\lambda_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$

e) $\{x, x^2, 2x^3\}$ ergibt die Menge $\{y \mid y=\lambda_1 \cdot x+\lambda_2 \cdot x^2+\lambda_3 \cdot x^3,$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}\}$

Menge aller kubischen Funktionen (ohne y=const.)

f) $\{x, x^2, (3x)^2\}$ ergibt die Menge $\{y \mid y=\lambda_1 \cdot x+\lambda_2 \cdot x^2,$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$

Menge aller quadratischen Funktionen (ohne y=const.)

g) $\{\sqrt{x}, \sqrt{2x}\}$ ergibt die Menge $\{y \mid y=\lambda \cdot \sqrt{x},\ \lambda \in \mathbf{R}\}$

Menge aller Wurzelfunktionen (Quadratwurzeln)

h) $\{\ln(x), \ln(2x)\}$ ergibt die Menge $\{y \mid y=\lambda_1+\lambda_2 \cdot \ln(x),$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$

Menge aller ln-Funktionen (mit const.-Anteil)

i) $\{\ln(x), \ln(2x), 4\}$ ergibt die Menge $\{y \mid y=\lambda_1+\lambda_2 \cdot \ln(x),$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$

Menge aller ln-Funktionen (mit const.-Anteil)

Aufgabe 64:

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mittels der

charakteristischen Gleichung!

Hinweise: f) Eine Lösung lautet $\lambda=3$, Polynomdivision. i)

$D=\frac{d}{dx}$

a) $y'+2y=0$

b) $y''-3y'=0$

c) $2y''+\frac{10}{3}y'-\frac{4}{3}y=0$

d) $2y^{(4)}+2y''-12y=0$

e) $y(5)-y'=0$

f) $y'''-8y''+y'+42y=0$

g) $y''-4y'+4y=0$

h) $y^{(5)}=0$

i) $(D^2+6D+9)(D^2+2D+1)y=0$

Lösung:

a)

solve$(\lambda+2=0, \lambda)$

$$\{\lambda=-2\}$$

dSolve(y'+2y=0, x, y) | const(1)=C

$$\{y=C\cdot e^{-2\cdot x}\}$$

b)

solve$(\lambda^2-3\lambda=0, \lambda)$

$$\{\lambda=0, \lambda=3\}$$

dSolve(y''−3y'=0, x, y) | const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\{y=C2\cdot e^{3\cdot x}+C1\}$$

c)

solve$(2\lambda^2+\frac{10}{3}\lambda-\frac{4}{3}=0, \lambda)$

$$\left\{\lambda=-2, \lambda=\frac{1}{3}\right\}$$

dSolve$(2y''+\frac{10}{3}y'-\frac{4}{3}y=0, x, y)$ | const(1)=C1 and const(2)▶

$$\left\{y=C2\cdot e^{\frac{x}{3}}+C1\cdot e^{-2\cdot x}\right\}$$

d) $2y^{(4)}+2y''-12y=0$

solve$(2\lambda^4+2\lambda^2-12=0, \lambda)$

$$\{\lambda=-\sqrt{2}, \lambda=\sqrt{2}\}$$

rFactor$(2\lambda^4+2\lambda^2-12)$

$$2\cdot(\lambda^2+3)\cdot(\lambda+\sqrt{2})\cdot(\lambda-\sqrt{2})$$

rFactor$(2\lambda^4+2\lambda^2-12)$

$$2\cdot(\lambda+\sqrt{2})\cdot(\lambda-\sqrt{2})\cdot(\lambda+\sqrt{3}\cdot j)\cdot(\lambda-\sqrt{3}\cdot j)$$

$\{e^{-\sqrt{2}x}, e^{\sqrt{2}x}, \cos(\sqrt{3}x), \sin(\sqrt{3}x)\}$ ergibt

$y=C1\cdot e^{-\sqrt{2}x}+C2\cdot e^{\sqrt{2}x}+C3\cdot\cos(\sqrt{3}x)+C4\cdot\sin(\sqrt{3}x)$

e) y(5)−y'=0

solve($\lambda^5-\lambda=0,\lambda$)

$\{\lambda=-1,\lambda=0,\lambda=1,\lambda=-j,\lambda=j\}$

$\{1, e^{-x}, e^{x}, \cos(x), \sin(x)\}$ ergibt

$y=C0+C1\cdot e^{-x}+C2\cdot e^{x}+C3\cdot\cos(x)+C4\cdot\sin(x)$

f) y'''−8y''+y'+42y=0

solve($\lambda^3-8\lambda^2+\lambda+42=0,\lambda$)

$\{\lambda=-2,\lambda=3,\lambda=7\}$

dSolve(y'''−8y''+y'+42y=0, x, y) | const(1)=C1 and const(2

$\{y=C3\cdot e^{7\cdot x}+C2\cdot e^{3\cdot x}+C1\cdot e^{-2\cdot x}\}$

g) y''−4y'+4y=0

solve($\lambda^2-4\lambda+4=0,\lambda$)

$\{\lambda=2\}$

factor($\lambda^2-4\lambda+4$)

$(\lambda-2)^2$

dSolve(y''−4y'+4y=0, x, y) | const(1)=C1 and const(2)=C2

$\{y=C2\cdot x\cdot e^{2\cdot x}+C1\cdot e^{2\cdot x}\}$

h) $y^{(5)}=0$

solve($\lambda^5=0,\lambda$)

$\{\lambda=0\}$

5−fache Nst.

$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

$y=C0+C1\cdot x+C2\cdot x^2+C3\cdot x^3+C4\cdot x^4$

$$\int\left(\int\left(\int\left(\int\left(\int 0dx+c4\right)dx+c3\right)dx+c2\right)dx+C1\right)dx+C0$$

$$\frac{c4\cdot x^4+4\cdot c3\cdot x^3+12\cdot c2\cdot x^2+24\cdot C1\cdot x}{24}+C0$$

expand(ans)

$$\frac{c4\cdot x^4}{24}+\frac{c3\cdot x^3}{6}+\frac{c2\cdot x^2}{2}+C1\cdot x+C0$$

$C4=\frac{c4}{24}$, $C3=\frac{c3}{6}$, $C2=\frac{c2}{2}$

i) $(D^2+6D+9)(D^2+2D+1)y=0$

solve$((\lambda^2+6\lambda+9)(\lambda^2+2\lambda+1)=0,\lambda)$

$$\{\lambda=-3,\lambda=-1\}$$

factor$((\lambda^2+6\lambda+9)(\lambda^2+2\lambda+1))$

$$(\lambda+3)^2\cdot(\lambda+1)^2$$

$\{e^{-3x}, xe^{-3x}, e^{-x}, xe^{-x}\}$

$$\{e^{-3\cdot x}, x\cdot e^{-3\cdot x}, e^{-x}, x\cdot e^{-x}\}$$

$y=C1e^{-3x}+C2xe^{-3x}+C3e^{-x}+C4xe^{-x}$

$$y=C3\cdot e^{-x}+C4x\cdot e^{-x}+C1\cdot e^{-3\cdot x}+C2x\cdot e^{-3\cdot x}$$

Aufgabe 65:

Bestimmen Sie unter Nutzung der Hinweise die allgemeine Lösung folgender DGL!

a) $y''+y'-2y=-10\sin(x)$. Lösungen der charakteristischen Gleichung sind -2 sowie 1 und zudem löst $y=\cos(x)+3\sin(x)$ die DGL.

b) $y''-14y'+49y=49x^2-28x$. Es gilt $x^2-14x+49=(x-7)^2$ und x^2+C löst für ein bestimmtes C die DGL.

c) $x^2 \cdot y'' - 4x \cdot y' + 4y = x^8$. Sowohl die Fundamentallösungen als auch eine partikuläre Lösung sind Monome der Form $a \cdot x^n$.

Lösung:

a) $y = C1 \cdot e^{-2x} + C2 \cdot e^x + \cos(x) + 3\sin(x)$

dSolve(y''+y'−2y=−10sin(x), x, y) | const(1)=C1 and const

$$\{y = C2 \cdot e^x + C1 \cdot e^{-2 \cdot x} + \cos(x) + 3 \cdot \sin(x)\}$$

b) charakt. Gl. $\lambda^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda - 7)^2 = 0$ ergibt $\lambda = 7$ (Doppellösung)

Define $y(x) = x^2 + C$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) - 14\frac{d}{dx}(y(x)) + 49y(x) = 49x^2 - 28x$$

$$49 \cdot (x^2 + C) - 28 \cdot x + 2 = 49 \cdot x^2 - 28 \cdot x$$

solve(ans, C)

$$\left\{C = -\frac{2}{49}\right\}$$

dSolve(y''−14y'+49y=49x^2−28x, x, y) | const(1)=C1 and c

$$\left\{y = C2 \cdot x \cdot e^{7 \cdot x} + C1 \cdot e^{7 \cdot x} + x^2 - \frac{2}{49}\right\}$$

c) (Euler−DGL)

dSolve($x^2 \cdot$y''−4x·y'+4y=x^8, x, y) | const(1)=C1 and const(

$$\left\{y = \frac{x^8}{28} + C2 \cdot x^4 + C1 \cdot x\right\}$$

Define $y(x) = a \cdot x^n$

done

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}(y(x))-4x\frac{d}{dx}(y(x))+4y(x)=x^8$$

$$a\cdot n\cdot x^n\cdot(n-1)-4\cdot a\cdot n\cdot x^n+4\cdot a\cdot x^n=x^8$$

ans | n=8

$$28\cdot a\cdot x^8=x^8$$

$a=\frac{1}{28}$

Define $y(x)=\frac{1}{28}\cdot x^8$

done

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}(y(x))-4x\frac{d}{dx}(y(x))+4y(x)=x^8$$

$$x^8=x^8$$

hom. Dgl.

Define $y(x)=a\cdot x^n$

done

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}(y(x))-4x\frac{d}{dx}(y(x))+4y(x)=0$$

$$a\cdot n\cdot x^n\cdot(n-1)-4\cdot a\cdot n\cdot x^n+4\cdot a\cdot x^n=0$$

factor(ans)

$$a\cdot x^n\cdot(n-1)\cdot(n-4)=0$$

n=1 oder n=4

Lösung: $y=C1\cdot x^4+C2\cdot x+\frac{1}{28}\cdot x^8$

Aufgabe 66:

Lösen Sie die sogenannte "logistische Differenzialgleichung", welche ein begrenztes Wachstum beschreibt, mittels Trennung der Variablen:

$$x'=\frac{d}{dt}(x(t))=k\cdot x\cdot\left(1-\frac{x}{M}\right) \quad \text{mit } k, M\in\mathbf{R}^{+}$$

Hinweis: Lösen Sie das dabei vorkommende Integral mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung:

$$\text{dSolve}\left(x'=k\cdot x\cdot\left(1-\frac{x}{M}\right), t, x\right) \mid \text{const}(1)=C$$

$$\left\{\frac{(|x|)^{\frac{1}{M}}}{(|x-M|)^{\frac{1}{M}}}=C\cdot e^{M^{-1}\cdot k\cdot t}\right\}$$

$$\left(\left|\frac{x}{x-M}\right|\right)^{\frac{1}{M}}=C\cdot e^{M^{-1}\cdot k\cdot t} \quad \text{ergibt}$$

$$\left|\frac{x}{x-M}\right|=\left(C\cdot e^{M^{-1}\cdot k\cdot t}\right)^{M}=C1\cdot e^{k\cdot t}$$

mit $x<M$ folgt:

$$\frac{x}{M-x}=C1\cdot e^{k\cdot t}$$

$$\text{solve}\left(\frac{x}{M-x}=C1\cdot e^{k\cdot t}, x\right)$$

$$\left\{x=\frac{C1\cdot M\cdot e^{k\cdot t}}{C1\cdot e^{k\cdot t}+1}\right\}$$

$$x(t)=\frac{M}{e^{-k\cdot t}+C2}$$

Aufgabe 67:

Geben Sie eine lineare DGL an, welche $6e^{-4x}-33e^{-5x}+x$ als Lösung besitzt!

Lösung: DGL 2. Ordnung mit char. Gl.

$$\text{expand}((\lambda+4)(\lambda+5)=0)$$

$$\lambda^2+9\cdot\lambda+20=0$$

hom. DGL $y''+9y'+20y=0$

Kontrolle:

dSolve(y''+9y'+20y=0, x, y) | const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\{y=C2\cdot e^{-4\cdot x}+C1\cdot e^{-5\cdot x}\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x)+9\frac{d}{dx}(x)+20x$$

$$20\cdot x+9$$

DGL $y''+9y'+20y=20\cdot x+9$

Kontrolle:

dSolve(y''+9y'+20y=20·x+9, x, y) | const(1)=C1 and const

$$\{y=C2\cdot e^{-4\cdot x}+C1\cdot e^{-5\cdot x}+x\}$$

ans | C1=6 and C2=−33

$$\{y=-33\cdot e^{-4\cdot x}+6\cdot e^{-5\cdot x}+x\}$$

Aufgabe 68:

Die DGL $y''+\omega_0{}^2y=0$ $(\omega_0>0)$ hat die Lösung $C1e^{-\omega_0 jx}+C2e^{\omega_0 jx}$ (nachrechnen!). Hierbei können die Konstanten C1, C2 und die Funktionswerte y komplexe Zahlen sein. Aus physikalischen Grunden sind wir nur an reellen Lösungen interessiert. Zeigen Sie, dass sich diese Löung dann als $K1\cdot\cos(\omega_0\cdot x)+K2\cdot\sin(\omega_0\cdot x)$ schreiben lässt!

Lösung:

dSolve(y''+ω₀²y=0, x, y) | const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\left\{y=C2\cdot e^{x\cdot\sqrt{-\omega_0{}^2}}+C1\cdot e^{-x\cdot\sqrt{-\omega_0{}^2}}\right\}$$

dSolve(y''+ω₀²y=0, x, y) | const(1)=C1 and const(2)=C2

$$\left\{y=C2\cdot e^{x\cdot\sqrt{-\omega_0{}^2}}+C1\cdot e^{-x\cdot\sqrt{-\omega_0{}^2}}\right\}$$

$ans|\omega_0>0$

$$\{y=C1\cdot e^{-\omega_0\cdot x\cdot j}+C2\cdot e^{\omega_0\cdot x\cdot j}\}$$

expToTrig(ans)

$\{y=C1\cdot\cos(\omega_0\cdot x)+C2\cdot\cos(\omega_0\cdot x)-C1\cdot\sin(\omega_0\cdot x)\cdot j+C2\cdot\sin(\omega_0\cdot$ ▶

Realteil: $K1\cdot\cos(\omega_0\cdot x)$

Imaginärteil: $K2\cdot\sin(\omega_0\cdot x)$

Aufgabe 69:

Die DGL für eine gedämpfte Schwingung lautet

$x''+\frac{r}{m}x'+\frac{k}{m}x=0$ (z.B. Federpendel mit Reibung). Dabei ist m die Masse, k die Federkonstante und r der Reibungskoeffizient.

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_{1,2}=-\omega_0\cdot\gamma\pm\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}$ Lösungen der charakteristischen Gleichung sind! Dabei ist $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ und

$\gamma=\frac{r}{2\sqrt{m\cdot k}}$

b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung auf! Wann kann man diese mittels Sinus-/Kosinusfunktionen ausdrücken? Begründen Sie, warum man die 3 Fälle $\gamma<1$, $\gamma=1$ und $\gamma>1$ unterscheidet! In welchen Fällen tritt eine Schwingung auf?

c) Zeigen Sie, dass das Pendel in jedem Fall asymptotisch in die Ruhelage zurückkehrt, also $\lim_{t\to\infty}(x(t))=0$ gilt!

d) In welchem Fall (für welches γ) klingt die Schwingung am schnellsten ab?

Lösung:

a) char. Gl.

solve$\left(\lambda^2+\frac{r}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0,\lambda\right)$

$$\left\{\lambda=\frac{-\left(r-\sqrt{r^2-4\cdot k\cdot m}\right)}{2\cdot m},\lambda=\frac{-\left(r+\sqrt{r^2-4\cdot k\cdot m}\right)}{2\cdot m}\right\}$$

expand(ans)

$$\left\{\lambda=\frac{-r}{2\cdot m}+\frac{\sqrt{r^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m},\lambda=\frac{-r}{2\cdot m}-\frac{\sqrt{r^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}\right\}$$

$\omega_0:=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\gamma:=\frac{r}{2\sqrt{m\cdot k}}$

$$\frac{r}{2\cdot\sqrt{k\cdot m}}$$

$-\omega_0\cdot\gamma$

$$\frac{-r\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\cdot\sqrt{k\cdot m}}$$

simplify(ans|k>0 and m>0)

$$\frac{-r}{2\cdot m}$$

$\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}$

$$\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{\frac{r^2-4\cdot k\cdot m}{k\cdot m}}}{2}$$

simplify(ans|k>0 and m>0)

$$\frac{\sqrt{r^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}$$

Damit gilt: $\lambda_{1,2}=-\omega_0\cdot\gamma\pm\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}$

b)

$$x(t)=C1\cdot e^{-\left(\omega_0\cdot\gamma+\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\right)\cdot t}+C2\cdot e^{-\left(\omega_0\cdot\gamma-\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\right)\cdot t}$$

d.h.

$$x(t)=e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\cdot\left(C1\cdot e^{-\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\cdot t}+C2\cdot e^{\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\cdot t}\right)$$

Fall $\gamma>1$ ergibt die reelle Lösung ("Kriechfall")

$$x(t)=e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\cdot\left(C1\cdot e^{-\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\cdot t}+C2\cdot e^{\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\cdot t}\right)$$

Fall $\gamma=1$ ergibt die reelle Lösung (aperiodische Grenzfall)

$$x(t)=K1\cdot e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}+K2\cdot t\cdot e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}$$

Fall $0<\gamma<1$ ergibt die komplexe Lösung

$$x(t)=e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\cdot\left(C1\cdot e^{-\omega_0\cdot j\sqrt{1-\gamma^2}\cdot t}+C2\cdot e^{\omega_0\cdot j\sqrt{1-\gamma^2}\cdot t}\right)$$

bzw. die reelle Lösung (Schwingung, "Schwingfall")

$$x(t)=e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\cdot\left(C1\cdot\cos(\omega_0\cdot\sqrt{1-\gamma^2}\cdot t)+C2\cdot\sin(\omega_0\cdot\sqrt{1-\gamma^2}\cdot t)\right)$$

d.h. mit $\omega=\omega_0\cdot\sqrt{1-\gamma^2}$:

$$x(t)=e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\cdot(C1\cdot\cos(\omega\cdot t)+C2\cdot\sin(\omega\cdot t))$$

c) **Fall $0<\gamma\leq1$**

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\right)=0$ wegen $\omega_0>0$ and $\gamma>0$

und

$$\lim_{t\to\infty}\left(t\cdot e^{-\omega_0\cdot\gamma\cdot t}\right)=0$$

Fall $\gamma>1$ ergibt

$C1\cdot e^{-\left(\omega_0\cdot\gamma+\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\right)\cdot t}+C2\cdot e^{-\left(\omega_0\cdot\gamma-\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}\right)\cdot t}$ mit

$\omega_0\cdot\gamma+\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}>0$ und $\omega_0\cdot\gamma-\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}>0$ somit auch hier

$\lim\limits_{t\to\infty}(x(t))=0.$

d) im aperiodischen Grenzfall **$\gamma=1$** schnellstes Abklingen

Aufgabe 70:

Lösen Sie $y''-y'-2y=(D^2-D-2)y=2e^{3x}$ durch schrittweise Integration!

Lösung: Faktorisierung $(D^2-D-2)=(D-2)(D+1)$

Sei $(D-2)u=2e^{3x}$ mit $u=(D+1)y$

hieraus folgt

dSolve$(u'-2u=2e^{3x},x,u)|$const$(1)=C$

$$\{u=2\cdot e^{3\cdot x}+C\cdot e^{2\cdot x}\}$$

nun ist $u=(D+1)y$, d.h.

dSolve$(y'+y=2e^{3x}+C\cdot e^{2\cdot x},x,y)|$const$(1)=C1$

$$\left\{y=\frac{e^{3\cdot x}}{2}+\frac{C\cdot e^{2\cdot x}}{3}+C1\cdot e^{-x}\right\}$$

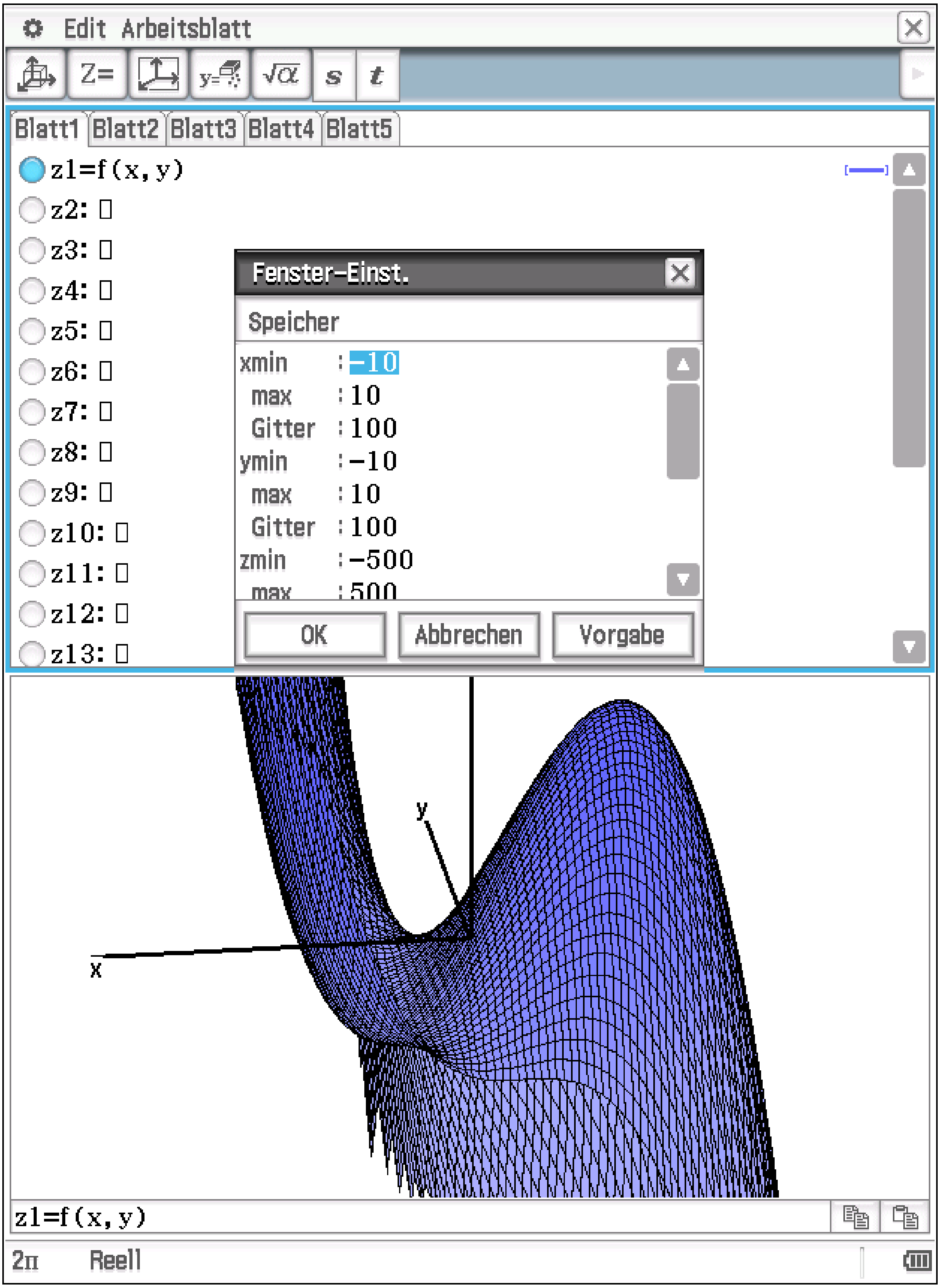
sei $C2=\frac{C}{3}$.

Kontrolle:

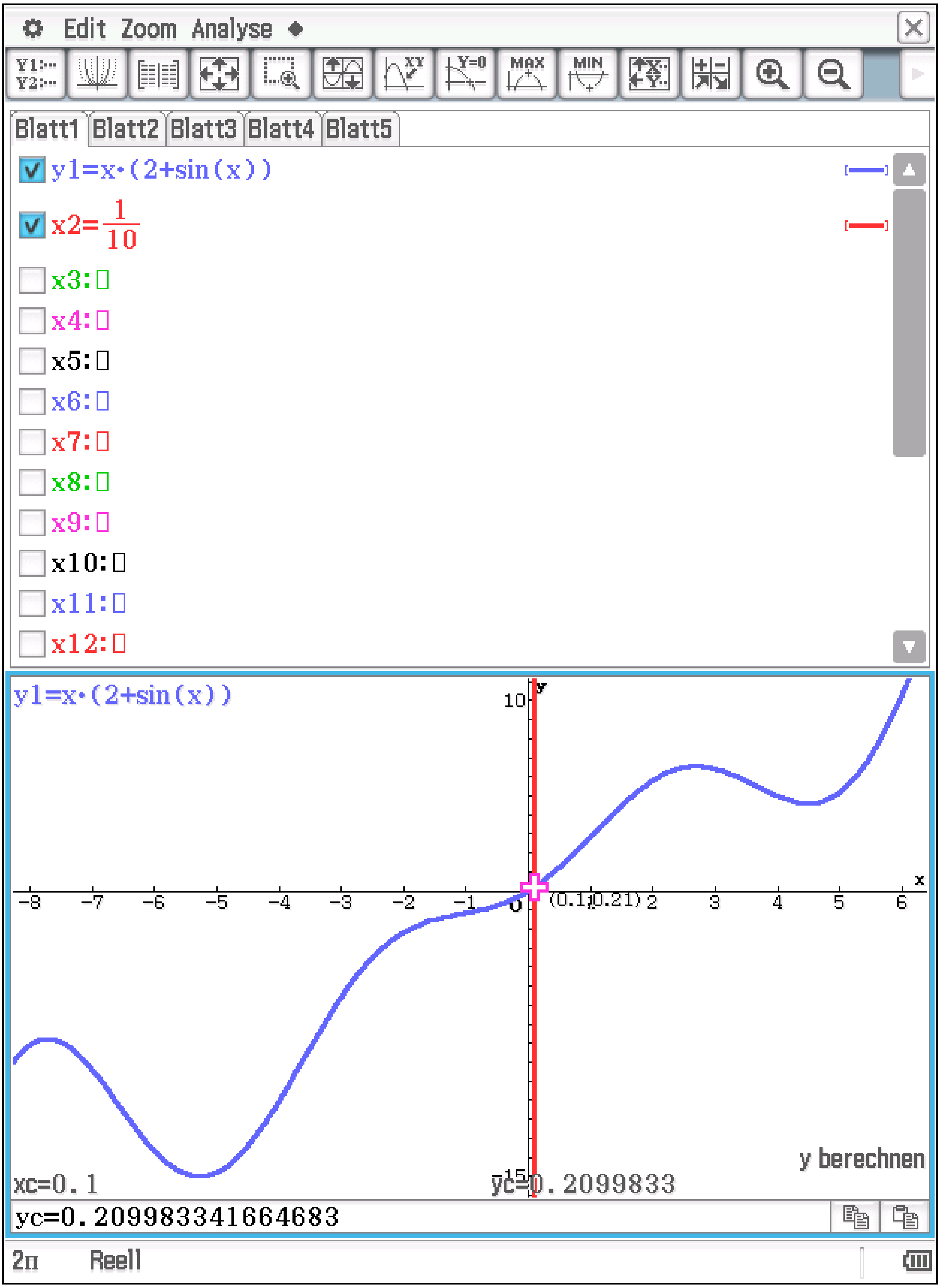
dSolve$(y''-y'-2y=2e^{3x},x,y)|$const$(1)=C1$ and const$(2)=$

$$\left\{y=\frac{e^{3\cdot x}}{2}+C2\cdot e^{2\cdot x}+C1\cdot e^{-x}\right\}$$

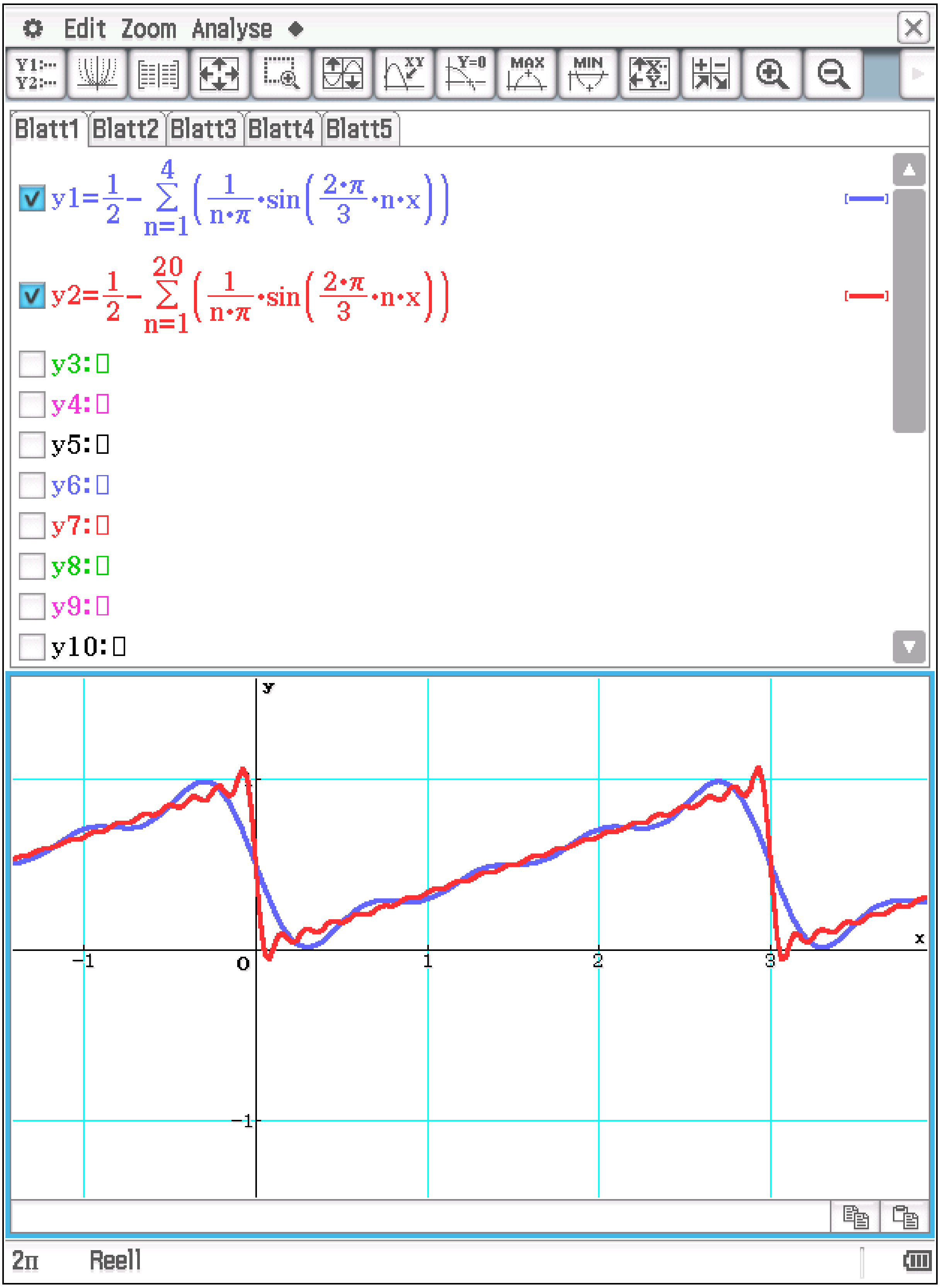
Lösungen: Aufgabe 40



Aufgabe 45

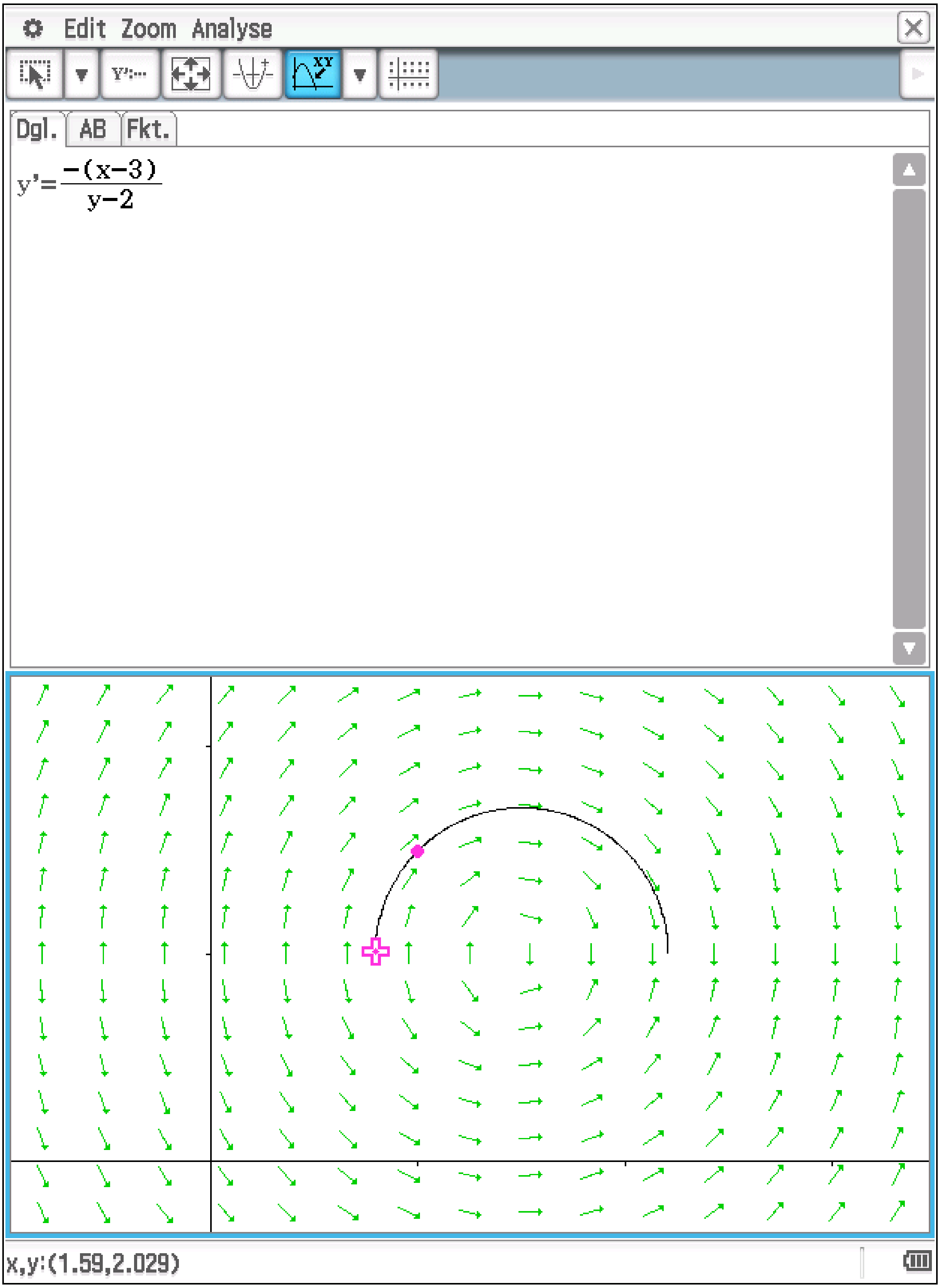

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=x·(2+sin(x))
x2=1/10
x3:
x4:
x5:
x6:
x7:
x8:
x9:
x10:
x11:
x12:
y1=x·(2+sin(x))
(0.1, 0.21)
y berechnen
xc=0.1
yc=0.2099833
yc=0.209983341664683
2π Reell

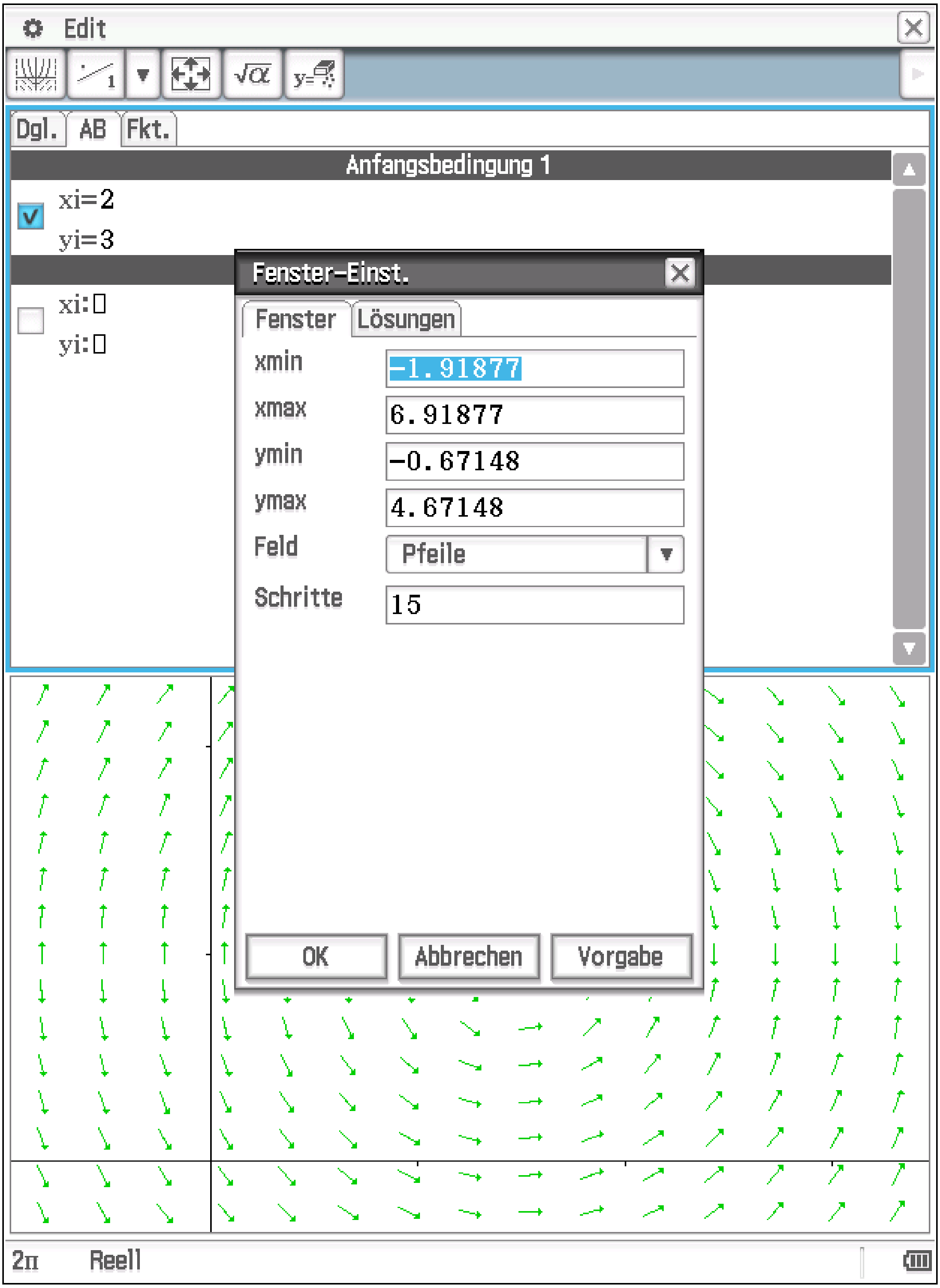
Aufgabe 49



Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
$y1=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{1}{n\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot n\cdot x\right)\right)$
$y2=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot n\cdot x\right)\right)$
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y
x
−1
0
1
2
3
−1
2π
Reell

Aufgabe 50




Edit
Dgl.
AB
Fkt.
Anfangsbedingung 1
xi=2
yi=3
xi:
yi:
Fenster-Einst.
Fenster
Lösungen
xmin
-1.91877
xmax
6.91877
ymin
-0.67148
ymax
4.67148
Feld
Pfeile
Schritte
15
OK
Abbrechen
Vorgabe
2π
Reell

Edit Grafik

Rekursiv | Explizit

$a_{n+1}=a_n+0.2$

$a_0=2$

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{0.2\cdot(3-a_n)}{b_n-2}$

$b_0=3$

$c_{n+1}=c_n+\dfrac{0.2\cdot(3-(2+n\cdot0.2))}{c_n-2}$

$c_0=3$

n	a_n	c_n
0	2	3
1	2.2	3.2
2	2.4	3.3333
3	2.6	3.4233
4	2.8	3.4795
5	3	3.5066
6	3.2	3.5066
7	3.4	3.4800
8	3.6	3.4260
9	3.8	3.3418
10	4	3.2226
11	4.2	3.0590
12	4.4	2.8324
13	4.6	2.4960
14	4.8	1.8508

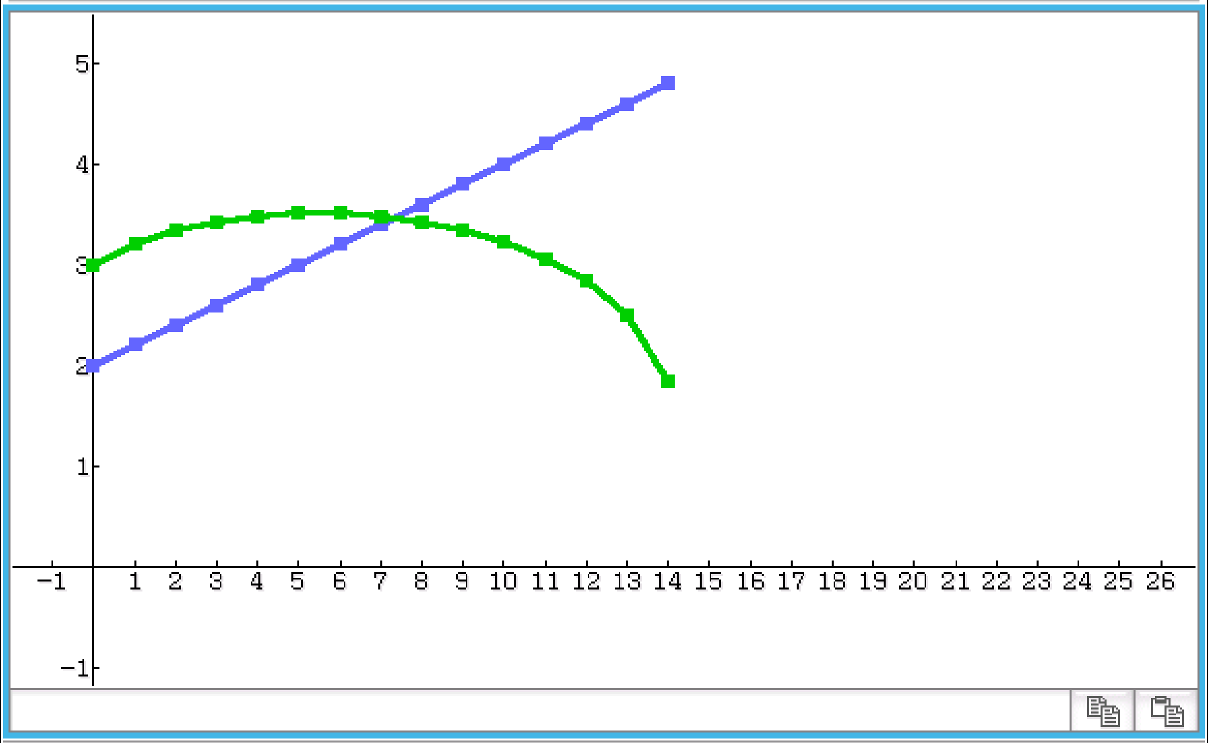
0

2π Reell

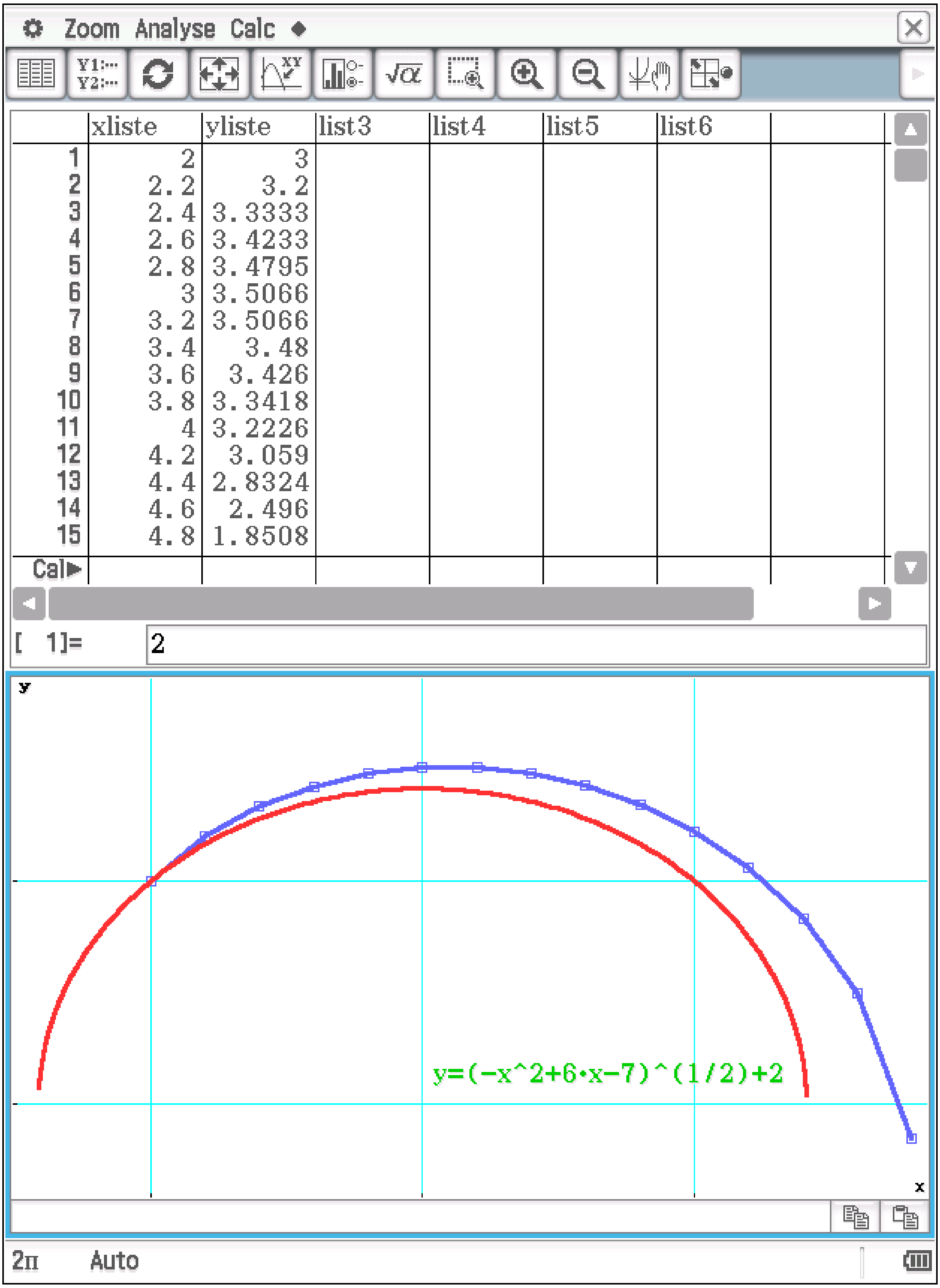
Edit Zoom Analyse

n	a_n	c_n
0	2	3
1	2.2	3.2
2	2.4	3.3333
3	2.6	3.4233
4	2.8	3.4795
5	3	3.5066
6	3.2	3.5066
7	3.4	3.4800
8	3.6	3.4260
9	3.8	3.3418
10	4	3.2226
11	4.2	3.0590
12	4.4	2.8324
13	4.6	2.4960
14	4.8	1.8508

0

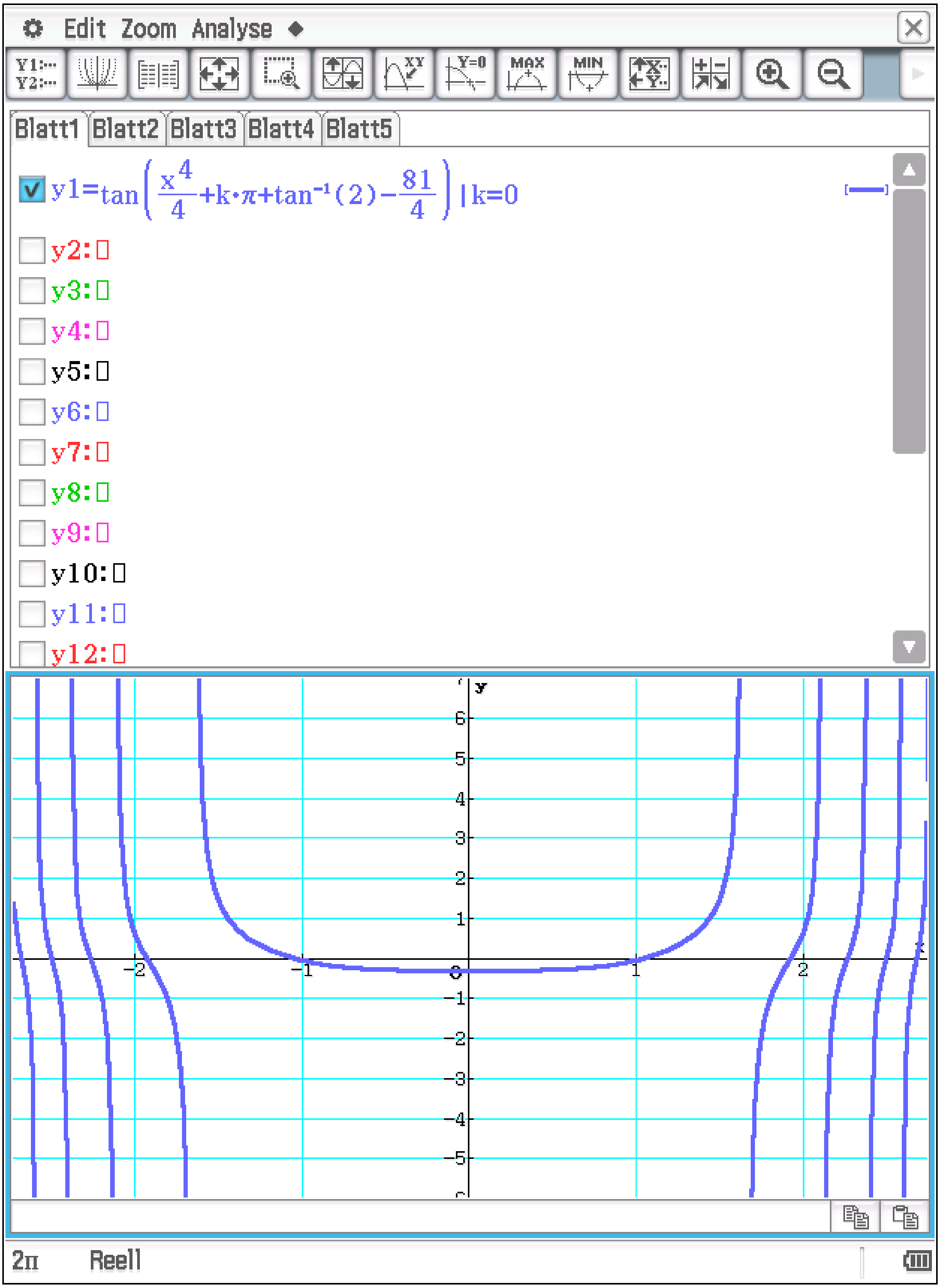


2π Reell



	xliste	yliste	list3	list4	list5	list6
1	2	3				
2	2.2	3.2				
3	2.4	3.3333				
4	2.6	3.4233				
5	2.8	3.4795				
6	3	3.5066				
7	3.2	3.5066				
8	3.4	3.48				
9	3.6	3.426				
10	3.8	3.3418				
11	4	3.2226				
12	4.2	3.059				
13	4.4	2.8324				
14	4.6	2.496				
15	4.8	1.8508				

Aufgabe 59



Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=tan(x^4/4+k·π+tan⁻¹(2)−81/4) | k=0
y2:
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
2π Reell