Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben und Lösungen zur ANALYSIS

Aufgabe 01:(Einstiegsaufgabe)

Zeigen Sie durch indirekten Beweis, dass $\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen) gilt!

Nehmen Sie an, $\sqrt{3}$ ließe sich darstellen als vollständig gekürzter Bruch p/q mit $p,q\in\mathbf{Z}$ und leiten Sie daraus einen Widerspruch ab.

Lösung:

angenommen $\sqrt{3}=p/q$ ein vollständig gekürzter Bruch,

d.h. $3q^2=p^2$,

damit ist auch p^2 durch 3 teilbar und somit auch p durch 3 teilbar, d.h. $p=3n$ mit einem $n\in\mathbf{Z}$.

Hieraus folgt $3q^2=p^2=9n^2$, $q^2=3n^2$, d.h. auch q^2 durch

3 teilbar und somit auch q durch 3 teilbar.

Damit sind p und q durch 3 teilbar, d.h. p/q war nicht vollständig gekürzt, was im Widerspruch zur Annahme steht, p/q sei bereits vollständig gekürzt!

Damit kann $\sqrt{3}$ nicht rational sein!

vgl. auch

www.mathe-online.at/mathint/zahlen/i_sqrt2.html

(Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist)

Aufgabe 02:(Einstiegsaufgabe)

(Abi 2020/Bayern) Betrachtet werde die Funktion

h: $x \rightarrow x \cdot \ln(x^2)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich **D** von h an!

b) Ermitteln Sie die Ableitung h'!

c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte (Maxima/Minima) von h!

d) Lassen Sie sich den Graphen von h mit einem elektronischen Hilfswerkzeug zeichnen.

Skizzieren Sie grafisch die Bedeutung des Ausdrucks

$\int_1^5 -h(x)dx$!

Lösung:

a) $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{0\}=R^*$ (Symbolik DIN-5473),

$\mathbf{D}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\neq 0\}$

b)

Define $h(x)=x\cdot\ln(x^2)$

done

$\frac{d}{dx}(h(x))$

$\ln(x^2)+2$

$h'(x)=\ln(x^2)+2$

c)

solve$(\ln(x^2)+2=0,x)$

$\{x=-e^{-1},x=e^{-1}\}$

$\frac{d^2}{dx^2}(h(x))$

$\frac{2}{x}$

rel. Min. für $x=e^{-1}$, rel. Max. für $x=-e^{-1}$

$h(x)|x=e^{-1}$

$$-2\cdot e^{-1}$$

$h(x)|x=-e^{-1}$

$$2\cdot e^{-1}$$

$\mathrm{Min}(\frac{1}{e},\frac{-2}{e})$, $\mathrm{Max}(\frac{-1}{e},\frac{2}{e})$

d)

Define y1(x)=h(x)

done

2D–Grafik	Y1:… Y2:…

$\int_1^5 -h(x)dx$

$$-25\cdot\ln(5)+12$$

approx(ans)

$$-28.23594781$$

–h(x) liegt im Intervall (1,5) unterhalb der x–Achse, daher Ergebnis negativ.

2D–Grafik Integration	Y1:… Y2:…

Aufgabe 03: (Ehemalige Klausuraufgabe)

Eine Funktion f(x) heißt achsensymmetrisch bzgl. der vertikalen Achse x=k, $k\in\mathbf{R}$, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: $\forall x\in D$: $f(k-x)=f(k+x)$

a) Untersuchen Sie anhand dieser Bedingung, ob $f(x)=x^2+9-6x$ symmetrisch ist bzgl. der Achse x=3!

b) Es soll untersucht werden, zu welcher Achse x=k die Funktion $f(x)=x^2+4x+4$ achsensymmetrisch ist.

Die Auswertung der Bedingung ergab:

$k^2-2kx+4k+x^2-4x+4=k^2+2kx+4k+x^2+4x+4$

Welchen Wert hat k? (**Hinweis:** Zusammenfassen nach Potenzen von x, Koeffizientenvergleich)

Lösung:

a) $x^2+9-6x=x^2-6x+9=(x-3)^2$

Define $f(x)=x^2+9-6x$

done

f(k−x)

$(x-k)^2+6\cdot(x-k)+9$

simplify(ans|k=3)

x^2

f(k+x)

$(x+k)^2-6\cdot(x+k)+9$

simplify(ans|k=3)

x^2

Define y1(x)=f(x)

done

2D−Grafik Y1:… Y2:…

ja, f(x) ist symmetrisch bzgl. k=3

b)

$k^2-2k\cdot x+4k+x^2-4x+4 = k^2+2k\cdot x+4k+x^2+4x+4$ ergibt

$k^2-2k\cdot x+4k+x^2-4x+4 - \left(k^2+2k\cdot x+4k+x^2+4x+4\right)=0$

$-4\cdot k\cdot x-8\cdot x=0$

solve(ans, k)

$\{k=-2\}$

der gesuchte Wert lautet $k=-2$.

Aufgabe 04: (Ehemalige Klausuraufgabe)
Für Polynome 2. Grades der Form
$p_2(x)=x^2+ax+b=(x-r_1)(x-r_2)$ trifft der sogenannte "Satz von Vieta" die folgende Aussage:
$a=-(r_1+r_2)$, $b=r_1r_2$.
a) Welche (graphische) Bedeutung haben r_1 und r_2? Wie lauten a, b und r_1 und r_2 für das Polynom
$p_2(x)=(\pi+x)(x-2\pi)$?
b) Zeigen Sie, dass der Satz von Vieta für beliebige Polynome $p_2(x)$ stimmt, indem Sie $p_2(x)=(x-r_1)(x-r_2)$ ausmultiplizieren und einen Koeffizientenvergleich durchführen!
Lösung:
a) $(\pi+x)(x-2\pi)=(x-(-\pi))(x-2\pi)$, d.h. $r_1=-\pi$, $r_2=2\pi$
Define $p_2(x)=(\pi+x)(x-2\pi)$

done

expand$(p_2(x))$

$$x^2-x\cdot\pi-2\cdot\pi^2$$

somit $a=-\pi$, $b=-2\pi^2$
(graphische) Bedeutung von r_1 und r_2: Nullstellen von $p_2(x)$.
b)
Define $p_2(x)=(x-r_1)(x-r_2)$

done

expand$(p_2(x))$

$$x^2-r_1\cdot x-r_2\cdot x+r_1\cdot r_2$$

collect(ans, x)

$$x^2-(r_2+r_1)\cdot x+r_1\cdot r_2$$

d.h. $a=-(r_1+r_2)$, $b=r_1r_2$.

Aufgabe 05:

Zeigen Sie anhand des ε-Kriteriums, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=1$ gilt!

Das **ε-Kriterium** lautet:

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** mit dem Grenzwert α, wenn der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert beliebig klein wird und klein bleibt: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0$: $|a_n-\alpha|<\varepsilon$. Andernfalls heißt sie **divergent.**

Man schreibt dann: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\alpha$.

Lösung:

$a_n=\frac{n-1}{n+1}$ und $\alpha=1$ ergeben:

$a_n-\alpha=\frac{n-1}{n+1}-1=\frac{n-1-(n+1)}{n+1}=\frac{-2}{n+1}$, d.h. $|a_n-\alpha|=\frac{2}{n+1}<\varepsilon$ für $n>\frac{2}{\varepsilon}-1$ => $n_0(\varepsilon)$ ist die kleinste ganze Zahl $\geq\frac{2}{\varepsilon}-1$, damit ist das ε-Kriterium mit $\alpha=1$ erfüllt und 1 ist der Grenzwert.

einfacher: $a_n=\frac{n-1}{n+1}=\frac{n+1-2}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}$ => $1-0=1$ für $n\to\infty$.

Aufgabe 06:

Gegeben sei die Vorzeichen-Funktion sgn(x). Diese ist defniert durch $\mathrm{sgn}(x)=-1$ für $x<0$, $\mathrm{sgn}(x)=+1$ für $x>0$

und sgn(0)=0. Zeigen Sie anhand des ε−δ−Kriteriums, dass diese Funktion an der Stelle $x_0=0$ keinen Grenzwert hat!

Das **ε−δ−Kriterium** lautet:

Sei f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine Funktion, welche n−dimensionale Punkte auf reelle Zahlen abbildet, und sei $x_0 \in \mathbf{R}^n$ eine Stelle des Definitionsbereichs. Die Zahl $\alpha \in \mathbf{R}$ heißt Grenzwert von f gegen x_0, wenn es für jede noch so kleine Epsilon−Kugel um α eine Delta−Kugel um x_0 gibt, sodass die Funktionswerte der Delta−Kugel **S**_δ in der Epsilon−Kugel **S**_ε liegen.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: $f(\mathbf{S}\_\delta(x_0)) \subset \mathbf{S}\_\varepsilon(\alpha)$.

Man schreibt dann $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))=\alpha$.

Lösung:

Define $f(x)=\begin{cases} \text{signum}(x), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \text{signum}(x), & x>0 \end{cases}$

done

f(0)

0

f(−5)

−1

f(8.3)

1

Bem.: f(x)=2·heaviside(x)−1=2·H(x)−1

Grafikformat einstellen: **Zeichne pixelweise**

2D−Grafik Y1:··· Y2:···

Es ist $y_0=f(x_0)=f(0)=0=\alpha$

sei $\varepsilon=0.5$: $\mathbf{S}\_\varepsilon(\alpha)=\{y|-\varepsilon<y<\varepsilon\}=\{y|-0.5<y<0.5\}$

$\mathbf{S}\_\delta(x_0)=\{x|-\delta<x<\delta\}$ => $f(\delta/2)=1\notin\mathbf{S}\_\varepsilon(\alpha)\ \forall\delta>0$,

d.h. es gibt kein passendes $\delta>0$ mit $f(\mathbf{S}\_\delta(x_0))\subset\mathbf{S}\_\varepsilon(\alpha)$.

Bem.: einseitige Grenzwerte sind ungleich:

$$\lim_{x\to0^-}(f(x))$$

-1

$$\lim_{x\to0^+}(f(x))$$

1

$$\lim_{x\to0}(f(x))$$

Undefined

$x_0=0$ ist eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

Aufgabe 07:

Ermitteln Sie den Wert folgender Grenzübergänge:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}+4\cdot\sqrt[n]{9}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\cdot4\cdot\sqrt[n]{9}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-e^{-n}\right)\right)$

e) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x^2+x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to3}\left(e^{x^2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x^2-6x+9}{x^3-3x^2-9x+27}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{x}{e\cdot(\ln(x^2)-1)}\right)$

Lösung:

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$0$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}+4\cdot n\sqrt{9}\right)$$

$$6$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\cdot 4\cdot n\sqrt{9}\right)$$

$$8$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-e^{-n}\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2+x}\right)$$

$$1$$

f)

$$\lim_{x\to 3}\left(e^{x^2}\right)$$

$$e^9$$

g)

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6x+9}{x^3-3x^2-9x+27}\right)$$

$$\frac{1}{6}$$

h)

$$\lim_{x \to e} \left(\frac{x}{e \cdot (\ln(x^2) - 1)} \right)$$

$$1$$

Aufgabe 08:

Achilles und die Schildkröte veranstalten ein Wettrennen. Die Schildkröte bewegtsich fort mit 5km/h, Achilles mit 25km/h. Die Schildkröte hat einen Vorsprung von Δx_0=100km. Zum Überwinden dieses Vorsprungs benötigt Achilles die Zeit Δt_0.

Die Schildkröte aber ist weitergelaufen und hat nach Ablauf dieser Zeit einen neuen Vorsprung Δx_1. Zum Aufholen dieses Vorsprungs benötigt Achilles nun die Zeit Δt_1.

a) Geben Sie tabellenförmig die Werte Δx_n und Δt_n für n=0,1,2,3,4 an!

b) Finden Sie eine allgemeine Formel für Δx_n und Δt_n!

c) Lösen Sie Zenons Paradoxon durch Ermitteln der Grenzwerte $x=\Delta x_0+\Delta x_1+\Delta x_2+...$ und $t=\Delta t_0+\Delta t_1+\Delta t_2+...$!

d) Bestätigen Sie das Ergebnis, indem Sie die Bewegungsgleichungen x_A(t) und x_S(t) für beide Läufer aufstellen und den Überholungspunkt durch Gleichsetzen ermitteln!

Lösung:

a) Δx_n in km, Δt_n in h, Δs_n in km, wobei s_n den Weg beschreibt, den die Schildkröte im n-ten Abschnitt zurückgelegt hat.

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \Delta x_n & 100 & 20 & 4 & 0.8 & 0.16 \\ \Delta t_n & 4 & 0.8 & 0.16 & 0.032 & 0.0064 \\ \Delta s_n & 20 & 4 & 0.8 & 0.16 & 0.032 \end{bmatrix}$$

Es gilt: $\Delta x_{n+1}=\Delta s_n$, $\Delta t_{n+1}=\Delta x_{n+1}/25$, $\Delta s_{n+1}=5\cdot\Delta t_{n+1}$

d.h. $\Delta x_{n+1}=5\cdot\Delta t_n=\Delta x_n/5$, $\Delta x_n=\Delta x_{n-1}/5$ usw.

sowie $\Delta t_{n+1}=\Delta x_{n+1}/25=5\cdot\Delta t_n/25=\Delta t_n/5$

b) Man erkennt aus der Tabelle, dass in jedem Schritt durch 5 geteilt wird:

$$\Delta x_n=\Delta x_0/5^n \text{ und } \Delta t_n=\Delta t_0/5^n$$

c) $x=\Delta x_0+\Delta x_1+\Delta x_2+...=\Delta x_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$

$$=\Delta x_0\frac{1}{1-1/5}=\frac{5}{4}\Delta x_0=125[\mathrm{km}]$$

analog $t=\Delta t_0+\Delta t_1+\Delta t_2+...=\frac{5}{4}\Delta t_0=\frac{5}{4}\cdot 4=5[\mathrm{h}]$

(geometrische Reihe)

d) Startpunkt (Nullpunkt) für Archilles, dann

x_A(t)=25t,

für Schildkröte dann x_S(t)=100+5t

Gleichsetzen: 25t=100+5t ergibt t=5, was das Ergebnis in c) bestätigt.

Aufgabe 09:

Eine Folge sei wie folgt rekursiv definiert:

$a_1=100$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+1$, $n=1,2,...$

Wir nehmen an, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(a_n)=a$ existiere.

Welchen Wert hat dann dieser Grenzwert?

(Hinweis: Grenzwert a in die Rekursionsvorschrift einsetzen.)

Lösung: angenommen, der Grenzwert a existiert, dann

$a=\frac{a}{3}+1$ ergibt $2a=3$, d.h. $a=\frac{3}{2}$

Berechnung der rekursionsfreien Darstellung mit rSolve:

$\mathrm{rSolve}(a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+1, a_1=100)$

$$\left\{a_n=\frac{197\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2}+\frac{3}{2}\right\}$$

Folgen−Editor an:… bn:…

sei $\varphi(x)=\frac{x}{3}+1$, dann ist $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ eine kontrahierende Abbildung,

da gilt $|\varphi(x)-\varphi(y)|=\left|\frac{x}{3}+1-(\frac{y}{3}+1)\right|=\frac{1}{3}|x-y|\leq L\cdot|x-y|$ mit

$0<L<1$ (Kontraktionszahl L, Banachscher Fixpunktsatz)

Damit existiert der Grenzwert für $n\to\infty$.

Aufgabe 10:

Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot e^{-n^2}\right)$ mittels des Wurzelkriteriums auf Konvergenz!

Lösung: sei $a_n=n\cdot e^{-n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n\cdot e^{-n^2}}\right)$$

$$0$$

$$\sqrt[n]{n\cdot e^{-n^2}}=n^{\frac{1}{n}}\cdot e^{-n^2/n}=\sqrt[n]{n}\cdot e^{-n}\to 1\cdot 0$$

damit ist die Reihe konvergent.

$$\sum_{n=0}^{100}\left(\mathrm{approx}\left(n\cdot e^{-n^2}\right)\right)$$

0.4048813986

$$\sum_{n=0}^{1000}\left(\mathrm{approx}\left(n\cdot e^{-n^2}\right)\right)$$

0.4048813986

$$\sum_{n=0}^{10}\left(n\cdot e^{-n^2}\right)$$

$$e^{-1}+2\cdot e^{-4}+3\cdot e^{-9}+4\cdot e^{-16}+5\cdot e^{-25}+6\cdot e^{-36}+7\cdot e^{-49}+8\cdot e^{-}$$

approx(ans)

0.4048813986

Aufgabe 11:

Zeigen Sie, dass das **notwendige Kriterium** für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)$ erfüllt ist (Hinweis: Sandwich-Kriterium) und prüfen Sie, welche Aussage das Quotientenkriterium zur Konvergenz dieser Reihe liefert!

Lösung: notwendige Kriterium

$a_n=\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\to 0$ für $n\to\infty$ offensichtlich.

Bem.: $\cos(n\pi)=(-1)^n$

"Sandwich-Kriterium" (Einschließungskriterium): Oberfolge und Unterfolge bilden

$$\frac{-1}{n+1}<\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}=\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}<\frac{1}{n-1} \quad \text{für } n>2$$

Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\cdot\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1}}\right|$

$=\left|\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n}\right|=\left|\frac{1+\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right|\to 1$ für $n\to\infty$, keine

Aussage möglich!

Vermutung: alternierende Reihe, (streng) monoton fallend Nullfolge, d.h. Konvergenz (**Leibniz-Kriterium**)

$$\mathrm{approx}\left(\sum_{n=2}^{10}\left(\mathrm{approx}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)\right)\right)$$

-0.1634559885

$$\mathrm{approx}\left(\sum_{n=2}^{100}\left(\mathrm{approx}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)\right)\right)$$

-0.2919268306

$$\mathrm{approx}\left(\sum_{n=2}^{500}\left(\mathrm{approx}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)\right)\right)$$

-0.3038558115

$$\mathrm{approx}\left(\sum_{n=2}^{1000}\left(\mathrm{approx}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)\right)\right)$$

-0.3053535684

$$\mathrm{approx}\left(\sum_{n=2}^{2000}\left(\mathrm{approx}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)\right)\right)$$

-0.3061030068

Aufgabe 12:

Ein Quadrat der Seitenlänge a wird in 4 gleiche

Unterquadrate unterteilt. 2 Unterquadrate werden verworfen, eines wird ausgemalt. Das verbleibende Unterquadrat wird wieder in 4 Quadrate unterteilt, von denen 1 ausgemalt und 2 verworfen werden etc. Berechnen Sie die ausgemalte Fläche, wenn dieses Verfahren endlos fortgeführt wird!

Lösung:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{8}\right)^2+...=a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$\frac{a^2}{3}$$

Aufgabe 13:

Wie müssen die Konstanten A und B gewählt werden, damit f überall stetig wird?

$$f(x)=\begin{cases}-2\cdot\sin(x), & -\infty<x\le-\frac{\pi}{2}\\ A\cdot\sin(x)+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos(x), & \frac{\pi}{2}\le x<\infty\end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-}(-2\sin(x))$$

$$2$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}(A\cdot\sin(x)+B)$$

$$-A+B$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (A\cdot\sin(x)+B)$$

$$A+B$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\cos(x))$$

$$0$$

$$\begin{cases}-A+B=2\\ A+B=0\end{cases}\Bigg|_{A,B}$$

$$\{A=-1, B=1\}$$

$$\text{Define } y1(x)=\begin{cases}-2\sin(x), & -\infty<x\le-\frac{\pi}{2}\\ -1\cdot\sin(x)+1, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos(x), & \frac{\pi}{2}\le x<\infty\end{cases}$$

done

2D-Grafik	Y1:… Y2:…

Aufgabe 14:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{3x^3+10x^2-x}{x^4-2x^2+1}.$$

Der Nenner hat die doppelte Nullstelle 1. Ermitteln Sie die restlichen beiden Nullstellen, indem Sie mittels Polynomdivision den dazugehörigen Linearfaktor abspalten und die entstehende quadratische Gleichung lösen! Führen Sie nun eine Partialbruchzerlegung von f durch! Geben Sie anschließend die Nullstellen und Polstellen von f an!

Lösung:

$$\text{rFactor}(3x^3+10x^2-x)$$

$$3\cdot x\cdot\left(x+\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}+\frac{5}{3}\right)$$

rFactor(x^4-2x^2+1)

$$(x+1)^2\cdot(x-1)^2$$

Define $y1(x)=\dfrac{3\cdot x\cdot\left(x+\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}+\frac{5}{3}\right)}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}$

done

2D-Grafik Y1:… Y2:…

Polstellen: $x=1$, $x=-1$ (jeweils 2. Ordnung)

Nullstellen: $x=0$, $x=-\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}-\frac{5}{3}$, $x=\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}-\frac{5}{3}$

approx$\left(-\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}-\frac{5}{3}\right)$

-3.430500874

approx$\left(\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}-\frac{5}{3}\right)$

0.09716754071

PBZ: Ansatz $f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}$

expand(y1(x), x)

$$\frac{-1}{x+1}+\frac{4}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x-1)^2}$$

fMin(y1(x))

{MinValue=−0.2320680041, x=−6.517948534}

fMin(y1(x), x, 0, 0.1)

{MinValue=−0.02475604001, x=0.04915547364}

Ein sehr interessanter Kurvenverlauf!

Aufgabe 15:

In der Skizze (s. Anlage) ist die Funktion f(x) dargestellt. Es handelt sich um eine skalierte Sinusfunktion. Lesen Sie deren Amplitude sowie Periode ab und geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an!

Lösung:

Amplitude=2, Periode=2.

Define $f(x)=2\sin(\pi x)$

done

2D–Grafik	Y1:… Y2:…

Aufgabe 16:

Auf welchem der folgenden Intervall hat die Funktion $f(x) = \sin(x)$ (lokale oder globale) Extremwerte? Geben Sie diese gegebenenfalls an!

$[-45°,45°]$, $(-45°,45°)$, $(-45°,45°]$, $[0°,135°)$, $[0°,180°)$, $[0,180°]$, $(225°,315°)$.

Lösung:

$[-45°,45°]$ – globales Min. bei $x=-45°$, globales Max. bei $x=45°$

$(-45°,45°)$ – keine Extremwerte

$(-45°,45°]$ – globales Max. bei $x=45°$

$[0°,135°)$ – globales Min. bei $x=0°$, globales Max. bei $x=90°$

$[0°,180°)$ – globales Min. bei $x=0°$, globales Max. bei $x=90°$

$[0,180°]$ – globales Min. bei $x=0°$ und $x=180°$, globales Max. bei $x=90°$

$(225°,315°)$ – globales Min. bei $x=270°$

Aufgabe 17:

Der Hyperbelkosinus ist definiert als der symmetrische Anteil der Exponentialfunktion: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ist diese Funktion umkehrbar und warum? Wenn nein, gibt es eine Einschränkung des Definitionsbereichs oder Wertebereichs, in der sie umkehrbar ist? Geben Sie gegebenenfalls eine entsprechende Funktionsgleichung an!

(Hinweis: Multiplizieren beider Seiten mit e^x, Substitution $z = e^x$).

Lösung:

die Funktion ist nicht eineindeutig: z.B. cosh(−1)=cosh(1)

die Funktion ist über $x\in\mathbf{R}$ nicht umkehrbar,

jedoch über $x\in[0,\infty)$ (Hauptast) oder über $x\in(-\infty,0]$ (Nebenast)

Define f(x)=cosh(x)

done

solve(y=cosh(x),x)

$\{x=-\cosh^{-1}(y), x=\cosh^{-1}(y)\}$

trigToExp(cosh(x))

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

solve($y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,x)

$$\left\{x=\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right), x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right\}$$

Hauptast: y=cosh(x)

Definitionsbereich $x\geq 0$ (y streng mon. wachsend)

Wertebereich $y \geq 1$

Umkehrfunktion:

$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\cosh^{-1}(x)$

Definitionsbereich $x \geq 1$

Wertebereich $y \geq 0$

Nebenast: $y=\cosh(x)$

Definitionsbereich $x \leq 0$ (y streng mon. fallend)

Wertebereich $y \geq 1$

Umkehrfunktion:

$y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\cosh^{-1}(x)$

Definitionsbereich $x \geq 1$

Wertebereich $y \leq 0$

Es gilt:

$$\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\ln\left(\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Die Umkehrfunktionen werden auch als **Areafunktionen** bezeichnet.

Aufgabe 18:

Ordnen Sie folgende 12 Funktionen nach Ihrer Wachstumsrate für $x \to \infty$, sodass also für zwei aufeinanderfolgende Funktion f und g in der geordneten Liste gilt $f \in O(g)$. Entscheiden Sie weiterhin, ob auch $g \in O(f)$, die Funktionen also gleich stark anwachsen. (Hinweis: Regel von L'Hospital).

x^2, 3^x, $\ln(x)$, $\sqrt{x}$, x^{100}, $10^{100}x$, 2^x, $\ln(\sqrt{x})$,
$\ln(x^2)$, $(\ln(x))^2$, $x\cdot\ln(x)$, x

vgl. auch

de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_de_L'Hospital

de.wikipedia.org/wiki/Landau-Symbole

Lösung:

Landau-Symbolik: $f\in O(g)$ (oder $f=O(g)$, groß O) bedeutet, dass f und g für $x\to\infty$ "gleiches" Wachstum haben im Sinne von

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=A, \text{ wobei A endlich ist.}$$

falls $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=0$, wächst $f(x)$ "langsamer" als $g(x)$,

Notation $f\in o(g)$ (oder $f=o(g)$, klein o)

Regel von L'Hospital: Untersuchung von unbestimmten Formen bei $x\to\infty$

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

z.B. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\infty}{\infty}$, dann existiert der Gernzwert A,

wenn $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=A$ gilt.

Es gilt:

Logarithmusfunktionen wachsen sehr langsam:

$\ln(x)$ und $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$ und $\ln(x^2)=2\ln(x)$ haben im Wesentlichen gleiches Wachstum

Potenzen von ln-Funktionen wachsen etwas schneller als ln-Funktionen:

$(\ln(x))^2$ wächs schneller als $\ln(x)$ aber langsamner als jede Potenzfunktion (einschließlich $\sqrt{x}$)

Wurzelfunktionen wachsen schneller aber langsamer als **lineare Funktionen:**

$\sqrt{x}$ wächst schneller als $\ln(x)$, x und $10^{100}x$ haben im Wesentlichen gleiches Wachstum (lineare Funktionen),

$x \cdot \ln(x)$ wächst schneller als x,

Potenzfunktionen wachsen schneller als lineare Funktionen

x^{100} wächst schneller als x^2 und x^2 wächst schneller als x,

Exponentialfunktionen wachsen am schnellsten

3^x wächst noch schneller als 2^x und 2^x wächst schneller als x^{100}

Ordnung nach Wachstumsrate:

$\ln(\sqrt{x})$, $\ln(x)$, $\ln(x^2)$, $(\ln(x))^2$, $\sqrt{x}$, x, $10^{100}x$, $x \cdot \ln(x)$, x^2, x^{100}, 2^x, 3^x

Aufgabe 19:

Zeigen Sie anhand der Definition des Hyperbelkosinus (Hyperbelsinus) über die Exponentialfunktion, dass diese Funktion gerade (ungerade) ist!

Lösung:

trigToExp(cosh(x))

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Define $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

done

f(x)=f(−x)

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

trigToExp(sinh(x))

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Define $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

done

g(x)=−g(−x)

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Aufgabe 20:

Geben Sie irgendeine periodische Funktion an, deren Bildbereich gleich [8,12] ist.

Lösung:

f(x)=10+2sin(x) oder g(x)=10+2cos(x)

Aufgabe 21:

Gegeben ist die Funktion $f(x,y)=e^{x^2/y}$. Betrachten Sie deren Höhenlinie, die durch die Stelle $(x_0|y_0)=(1|2)$ läuft. Skizzieren Sie diese auf dem Bereich $[-2,2]\times[-2,2]$. Wie sieht die Funktion zu den beiden Seiten der Höhenline hin aus, d.h. in welche Richtung zeigt der Gradient?

Lösung:

Define $z1(x,y)=e^{x^2/y}$

done

z1(1,2)

$\sqrt{e}$

solve($e^{x^2/y}=\sqrt{e}$, y)

$\{y=2\cdot x^2\}$

Die Höhenlinie ist eine Parabel

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(z1(x,y)) \\ \frac{d}{dy}(z1(x,y)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot x\cdot e^{x^2\cdot y^{-1}}}{y} \\ \frac{-x^2\cdot e^{x^2\cdot y^{-1}}}{y^2} \end{bmatrix}$$

ans|x=1 and y=2

$$\begin{bmatrix} \sqrt{e} \\ \frac{-\sqrt{e}}{4} \end{bmatrix}$$

Der Gradient $\begin{bmatrix} \sqrt{e} \\ \frac{-\sqrt{e}}{4} \end{bmatrix}$ zeigt an der Stelle (1|2) in Richtung des IV. Quadranten

3D−Grafik	Z1:… Z2:…

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(z1(x,y)) \\ \frac{d}{dy}(z1(x,y)) \end{bmatrix}|y=2x^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{e}}{x} \\ \frac{-\sqrt{e}}{4 \cdot x^2} \end{bmatrix}$$

für $x>0$ zeigt der Gradient nach unten in Richtung des IV. Quadranten

für $x<0$ zeigt der Gradient nach unten in Richtung des III. Quadranten

Aufgabe 22:

Der Definitionsbereich und der Wertebereich einer einstelligen Funktion sind jeweils Mengen, die aus reellen Zahlen bestehen. Aus welchen mathematischen Objekte bestehen der Definitionsbereich und Wertebereich einer dreistelligen Funktion? Geben Sie den Definitionsbereich für

$f(x,y,z)=\frac{y^z}{\ln(|x-2|)\sqrt{x+4}}$ an!

Lösung:

Definitionsbereich als Teilmenge des $\mathbf{R}^3$

Wertebereich als Teilmenge des $\mathbf{R}$

Definitionsbereich:

im Nenner:

$x-2\neq0$, $\ln(|x-2|)\neq0$, $x+4>0$, d.h.

$x\neq1$, $x\neq2$, $x\neq3$, $x>-4$,

im Zähler:

allgemeine Potenz nur für positive Basen definiert: $y>0$

denn $y^z=e^{z\cdot\ln(y)}$, $y>0$, $z\in\mathbf{R}$

Ergebnis:

$D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x\in(-4,\infty)\setminus\{1,2,3\}\wedge y>0\wedge z\in\mathbf{R}\}$

$$y^z\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\ln(|x-2|)\sqrt{x+4}}\right)$$

0

$$y^z\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(|x-2|)\sqrt{x+4}}\right)$$

Undefined

$$y^z\cdot\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\ln(|x-2|)\sqrt{x+4}}\right)$$

$\infty\cdot y^z$

$$y^z\cdot\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln(|x-2|)\sqrt{x+4}}\right)$$

$-\infty\cdot y^z$

Wertebereich damit offensichtlich $W=\mathbf{R}$

stop

vgl. auch

de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion

www.wikiwand.com/de/Potenz_(Mathematik) (Diskussion der Potenz $z=x^y$)

Weiter mit $w=y^z$:

Grenzwerte für $(y|z)\to(0|0)$ und $w(y,z)=y^z$ sind auf allen Wegen in der y-z-Ebene zu betrachten und existieren nur, wenn auf jedem Weg das gleiche Ergebnis entsteht:

z.B. folgender Weg: $y(t)=0.5^t$ und $z(t)=\frac{1}{t}$ für $t\to\infty$

ergibt $(y|z)\to(0|0)$ und

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(0.5^{t}\right)^{\frac{1}{t}}\right)$$

$$\frac{1}{2}$$

nun folgender Weg: $y(t)=0.25^{t}$ und $z(t)=\frac{1}{t}$ für $t\to\infty$

ergibt $(y|z)\to(0|0)$ und

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(0.25^{t}\right)^{\frac{1}{t}}\right)$$

$$\frac{1}{4}$$

Damit existiert der Grenzwert nicht!

Define $z1(x,y)=x^{y}$

done

$z1(-2,0.5)$

Fehler:nichtreelle Berechnung

3D-Grafik korrekt im komplexen Modus

Sei $y=\frac{1}{3}$ dann gibt es bei negativen x numerische

Probleme mit den bekannten Rechengesetzen (deshalb $x>0$)

$$-2=\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^{2}}=\sqrt[6]{64}=2$$

wäre $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$, was wäre dann

$(-7.999999999999)^{0.33333333333}$?

$$(-8)^{\frac{1}{3}}$$

$$-2$$

$$(-7.999999999999)^{0.33333333333}$$

Fehler:nichtreelle Berechnung

Der Wert im Komplexen (komplexe Hauptwurzel):

$$(-8)^{\frac{1}{3}}$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot \boldsymbol{j}}{2}\right)$$

compToPol(ans)

$$2\cdot \boldsymbol{e}^{\frac{\pi\cdot \boldsymbol{j}}{3}}$$

Aufgabe 23:

Leiten Sie folgende Funktion nach x ab:

a) $f(x)=\sin((x+3)^2)$ b) $g(x)=\sin(\sqrt{x})$

c) $h(x)=(\boldsymbol{e}^{x}\ln(x))^3$

Lösung:

a)

$$\frac{d}{dx}\left(\sin((x+3)^2)\right)$$

$$2\cdot\cos\left((x+3)^2\right)\cdot(x+3)$$

b)

$$\frac{d}{dx}(\sin(\sqrt{x}))$$

$$\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\cdot\sqrt{x}}$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left((\boldsymbol{e}^{x}\ln(x))^3\right)$$

$$\frac{3\cdot x\cdot(\ln(x))^3\cdot \boldsymbol{e}^{3\cdot x}+3\cdot(\ln(x))^2\cdot \boldsymbol{e}^{3\cdot x}}{x}$$

simplify(ans)

$$\frac{3\cdot(x\cdot\ln(x)+1)\cdot(\ln(x))^2\cdot e^{3\cdot x}}{x}$$

$=3\cdot\left(\ln(x)+\frac{1}{x}\right)\cdot(\ln(x))^2\cdot e^{3\cdot x}$

Aufgabe 24:

Ermitteln Sie von $y(x)=x^x$ die Ableitung! (**Hinweis:** Auf beide Seiten Logarithmus anwenden, per Kettenregel beide Seiten ableiten, nach y' umstellen.)

Lösung: Definitionsbereich $x>0$, vgl. Aufg. 22

$\frac{d}{dx}(x^x)$

$$x^x\cdot\ln(x)+x^x$$

simplify(ans)

$$x^x\cdot(\ln(x)+1)$$

Bem.: logarithmisches Differenzieren

$\ln(y(x))=\ln(x^x)=x\cdot\ln(x)$

$\frac{d}{dx}(\ln(y(x)))=\frac{1}{y(x)}y'(x)$ und

$\frac{d}{dx}(x\cdot\ln(x))=\ln(x)+1$

hieraus $y'(x)=y(x)\cdot(\ln(x)+1)$

allgemein:

$\frac{d}{dx}\left(y(x)=f(x)^{g(x)}\right)$ analog ableiten:

$\ln(y(x))=g(x)\ln(f(x))$ usw.

Aufgabe 25:

An eine zunächst unbekannte Stelle x_0 des Graphen von $y=\frac{1}{x}$ wird die zugehörige Tangentengerade gelegt. Man stellt fest, dass sie die x-Achse bei x=7 schneidet. Bestimmen Sie x_0!

Lösung:

Tangentenanstieg$=y'(x_0)=\frac{-1}{x_0^2}$

Tangente: $y(x)=\frac{-1}{x_0^2}x+n$ ergibt

$0=\frac{-1}{x_0^2}7+n$, hieraus

$\text{solve}(0=\frac{-1}{x_0^2}7+n,n)$

$$\left\{n=\frac{7}{x_0^2}\right\}$$

somit $y(x)=\frac{-1}{x_0^2}x+\frac{7}{x_0^2}$

genau ein Berührpunkt mit $y=\frac{1}{x}$ ergibt

$\frac{-1}{x_0^2}x+\frac{7}{x_0^2}=\frac{1}{x}$

$\text{solve}(\frac{-1}{x_0^2}x+\frac{7}{x_0^2}=\frac{1}{x},x)$

$$\left\{x=\frac{-\left(\sqrt{-4\cdot x_0^2+49}-7\right)}{2},x=\frac{\sqrt{-4\cdot x_0^2+49}+7}{2}\right\}$$

$\text{solve}\left(\frac{-\left(\sqrt{-4\cdot x_0^2+49}-7\right)}{2}=\frac{\sqrt{-4\cdot x_0^2+49}+7}{2},x_0\right)$

$$\left\{x_0=-\frac{7}{2},x_0=\frac{7}{2}\right\}$$

Lösung: $x_0=\frac{7}{2}$ (neg. Lösung entfällt, Scheinlösung)

Aufgabe 26*:

Zeigen Sie anhand der Definition der Ableitung über den Differenzenquotienten, dass $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$ gilt!

Lösung:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{x+\varepsilon}-e^x}{\varepsilon}\right)=e^x\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)=\frac{0}{0}$$

Regel von l'Hospital

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{\varepsilon}}{1}\right)=1$$

also

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)=e^x$$

Aufgabe 27:

Bestimmen Sie für $f(x,y)=x^2+4xy-2y^2$ die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(2|1)$!

[Zusatz Vektorrechnung]: Geben Sie weiterhin die Tangentialebene in Hessescher Normalform und parametrischer Form an!

Lösung:

Define $f(x,y)=x^2+4x\cdot y-2y^2$

done

$f(2,1)$

10

$z=z_0+f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)$ ergibt

$$\frac{d}{dx}(f(x,y))$$

$$2\cdot x+4\cdot y$$

$ans|x=2$ and $y=1$

$$8$$

$$\frac{d}{dy}(f(x,y))$$

$$4\cdot x-4\cdot y$$

$ans|x=2$ and $y=1$

$$4$$

ergibt die TE:

$z=10+8(x-2)+4(y-1)$

simplify$(z=10+8(x-2)+4(y-1))$

$$z=8\cdot x+4\cdot y-10$$

$-z+8\cdot x+4\cdot y=10$ ergibt

$\sqrt{(-1)^2+8^2+4^2}$

$$9$$

$$\frac{-z+8\cdot x+4\cdot y}{9}=\frac{10}{9}$$

Hessesche Normalform $Ax+By+Cz=D$ mit $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=1$:

$$\frac{8}{9}x+\frac{4}{9}y-\frac{1}{9}z=\frac{10}{9}$$

vektoriell: $\circ$ bedeutet Skalarprodukt

$$\begin{bmatrix}\frac{8}{9}\\ \frac{4}{9}\\ -\frac{1}{9}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{10}{9}$$

Parameterdarstellung:

$x=s$, $y=t$, $z=z(s,t)=8\cdot s+4\cdot t-10$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbf{R}$$

Aufgabe 28:

$f(u,v,w)=\frac{u^2\sin(3v)+4}{w}$. Leiten Sie f partiell nach u, nach v und nach w ab, d.h. bestimmen Sie $\frac{d}{du}\left(\frac{d}{dv}(f(u,v,w))\right)$, $\frac{d}{dv}\left(\frac{d}{du}(f(u,v,w))\right)$, $\frac{d^2}{dw^2}(f(u,v,w))$!

Stimmt bei diesem Beispiel der **Satz von Schwarz**?

Lösung:

Define $f(u,v,w)=\frac{u^2\sin(3v)+4}{w}$

done

$$\frac{d}{du}\left(\frac{d}{dv}(f(u,v,w))\right)$$

$$\frac{6\cdot u\cdot\cos(3\cdot v)}{w}$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{d}{du}(f(u,v,w))\right)$$

$$\frac{6\cdot u\cdot\cos(3\cdot v)}{w}$$

Satz von Schwarz gilt!

Weiter

$$\frac{d^2}{dw^2}(f(u,v,w))$$

$$\frac{2\cdot\left(u^2\cdot\sin(3\cdot v)+4\right)}{w^3}$$

Aufgabe 29:

Ein Körper ruht auf einer Gummimatte an der Stelle $s=0$. Zur Zeit $t=0$ wird er nach oben geworfen. Kurze Zeit später landet er wieder auf der Gummimatte, wobei der Körper leicht nach unten in die Gummimatte sinkt, welche sich anschließend wieder ausdehnt und den Gegenstand zurück in die Höhe $s=0$ der Gummimatte bringt. Dabei ist s die Höhe über der Gummimatte. Die Orts-Zeit-Kurve für diesen Vorgang laute $s(t)=t^3-15t^2+54t$. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem der Körper landet und den Zeitpunkt t_2, an dem der Körper wieder in Höhe $s=0$ zurückgekehrt ist! Ermitteln Sie ferner eine Formel für die Geschwindigkeit $v(t)=\frac{d}{dt}(s(t))$ und die Beschleunigung $a(t)=\frac{d^2}{dt^2}(s(t))$! Wie groß sind die Minimal- und Maximalgeschwindigkeit des Körpers im Zeitraum $[0,t_2]$? Berechnen Sie schließlich die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers im Zeitraum $[0;t_1]$.

Hinweis: Die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitraum $[t',t'']$ ist gegeben durch $\bar{x}=\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}|v(t)|dt$.

Lösung:

Define $s(t)=t^3-15t^2+54t$

done

$s(t_1)=s(t_2)=0$ ergibt

solve$(s(t)=0,t)$

$\{t=0,t=6,t=9\}$

$v(t)=\frac{d}{dt}(s(t))$

$$v(t)=3\cdot t^2-30\cdot t+54$$

$a(t)=\frac{d^2}{dt^2}(s(t))$

$$a(t)=6\cdot t-30$$

$\mathrm{fMin}(3\cdot t^2-30\cdot t+54,t)$

$$\{\mathrm{MinValue}=-21,t=5\}$$

$\mathrm{fMax}(3\cdot t^2-30\cdot t+54,t)$

$$\{\mathrm{MaxValue}=\infty,t=-\infty,t=\infty\}$$

nach oben geöffnete Parabel!

$\mathrm{fMax}(3\cdot t^2-30\cdot t+54,t,0,9)$

$$\{\mathrm{MaxValue}=54,t=0\}$$

Randmaximum!

Schließlich:

$\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}|v(t)|dt=$

$\frac{1}{6-0}\int_0^6\left|3\cdot t^2-30\cdot t+54\right|dt$

$$\frac{2\cdot(-\sqrt{7}+5)^3-30\cdot(-\sqrt{7}+5)^2+108\cdot(-\sqrt{7}+5)}{6}$$

simplify(ans)

$$\frac{14\cdot\sqrt{7}}{3}+\frac{20}{3}$$

approx(ans)

$$19.01350612$$

Betragsauflösung:

$\mathrm{solve}(3\cdot t^2-30\cdot t+54=0,t)$

$$\{t=-\sqrt{7}+5, t=\sqrt{7}+5\}$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{-\sqrt{7}+5} 3\cdot t^2-30\cdot t+54\,dt-\frac{1}{6}\int_{-\sqrt{7}+5}^{6} 3\cdot t^2-30\cdot t+54\,dt$$

$$\frac{(-\sqrt{7}+5)^3-15\cdot(-\sqrt{7}+5)^2+54\cdot(-\sqrt{7}+5)}{3}$$

simplify(ans)

$$\frac{14\cdot\sqrt{7}}{3}+\frac{20}{3}$$

approx(ans)

$$19.01350612$$

Aufgabe 30:

Beweisen Sie, dass $\frac{d}{dx}(\ln(x))=\frac{1}{x}$ gilt, in dem Sie von $f(x)=e^x$ ausgehen und die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion anwenden! $\left(\frac{d}{dx}(y(x))\cdot\frac{d}{dy}(x(y))= 1\right)$

Lösung:

$y(x)=e^x \Leftrightarrow x(y)=\ln(y)$

$\frac{d}{dx}(y(x))=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$, d.h.

$\frac{d}{dy}(x(y))=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$, d.h.

$\frac{d}{dy}(\ln(y))=\frac{1}{y}$.

Aufgabe 31:

Zeigen Sie anhand der Definition von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ über die Exponentialfunktion, dass die Beziehung $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ gilt! Berechnen Sie damit die

Ableitung von $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$!

Lösung:

trigToExp(sinh(x))

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

trigToExp(cosh(x))

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^{2}$$

$$\frac{(e^{x}+e^{-x})^{2}}{4}-\frac{(e^{x}-e^{-x})^{2}}{4}$$

simplify(ans)

$$1$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x))$$

$$\frac{1}{(\cosh(x))^{2}}$$

trigToExp(tanh(x))

$$\frac{e^{2\cdot x}-1}{e^{2\cdot x}+1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2\cdot x}-1}{e^{2\cdot x}+1}\right)$$

$$\frac{4\cdot e^{2\cdot x}}{(e^{2\cdot x}+1)^{2}}$$

$$\mathrm{trigToExp}\left(\frac{1}{(\cosh(x))^{2}}\right)$$

$$\frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

Bem.:

$$\frac{1}{(\cosh(x))^2}=\frac{(\cosh(x))^2-(\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2}=1-(\tanh(x))^2$$

Aufgabe 32:

Ermitteln Sie eine Stammfunktion durch Lösen folgender unbestimmter Integrale:

a) $\int \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}dx$ b) $\int \cos(10x)dx$

c) $\int x\cdot\sin(x^2)dx$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx$

e) $\int x\cdot e^{x}dx$ f) $\int x^2\cdot\ln(x)dx$

Lösung: Integrationskonstante +C anfügen!

a)

$$\int \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}dx$$

$$\ln(|x|)-\frac{1}{x}$$

$$\text{dSolve}\left(y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2},x,y\right)$$

$$\left\{y=\ln(|x|)-\frac{1}{x}+\text{const}(1)\right\}$$

b)

$$\int \cos(10x)dx$$

$$\frac{\sin(10\cdot x)}{10}$$

dSolve(y'=cos(10x), x, y)

$$\left\{y=\frac{\sin(10\cdot x)}{10}+\mathrm{const}(1)\right\}$$

c) Substitution $u=x^2$

$$\int x\cdot\sin(x^2)\,dx$$

$$\frac{-\cos\left(x^2\right)}{2}$$

dSolve(y'=x·sin(x²), x, y)

$$\left\{y=\frac{-\cos\left(x^2\right)}{2}+\mathrm{const}(1)\right\}$$

d) Substitution $u=x^2$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$$

$$\sqrt{x^2+2}$$

$$\mathrm{dSolve}\left(y'=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}, x, y\right)$$

$$\left\{y=\sqrt{x^2+2}+\mathrm{const}(1)\right\}$$

e) partielle Integration

$$\int x\cdot e^x\,dx$$

$$x\cdot e^x-e^x$$

dSolve(y'=x·e^x, x, y)

$$\left\{y=x\cdot e^x-e^x+\mathrm{const}(1)\right\}$$

f) partielle Integration

$$\int x^2\cdot\ln(x)\,dx$$

$$\frac{3\cdot x^3\cdot \ln(x)-x^3}{9}$$

simplify(ans)

$$\frac{x^3\cdot(3\cdot\ln(x)-1)}{9}$$

dSolve($y'=x^2\cdot\ln(x)$, x, y)

$$\left\{y=\frac{x^3\cdot\ln(x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\text{const}(1)\right\}$$

Aufgabe 33:

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Funktion $y=x^2-5x+6$ und der x-Achse im Intervall [1,5], wobei die Flächen unterhalb der x-Achse positiv gezählt werden.

Lösung:

Define $y1(x)=x^2-5x+6$

done

2D-Grafik

solve(y1(x)=0, x)

{x=2, x=3}

$$\int_1^5 |y1(x)|dx$$

$$\frac{17}{3}$$

$$\int_1^2 y1(x)dx+\int_3^5 y1(x)dx-\int_2^3 y1(x)dx$$

$$\frac{17}{3}$$

Aufgabe 34:

Es soll das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3-4x}$

ermittelt werden. Führen Sie zuerst eine Partialbruchzerlegung durch und geben Sie dann das Integral an!

Lösung:

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-4x}dx$$

$$\frac{3\cdot\ln(|x+2|)+3\cdot\ln(|x-2|)-2\cdot\ln(|x|)}{4}$$

expand(ans)

$$\frac{3\cdot\ln(|x+2|)}{4}+\frac{3\cdot\ln(|x-2|)}{4}-\frac{\ln(|x|)}{2}$$

simplify(ans)

$$\frac{-\ln\left(\frac{x^2}{(|x+2|\cdot|x-2|)^3}\right)}{4}$$

expand$\left(\frac{x^2+2}{x^3-4x},x\right)$

$$\frac{3}{4\cdot(x+2)}+\frac{3}{4\cdot(x-2)}-\frac{1}{2\cdot x}$$

Ansatz: $f(x)=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x}$

Aufgabe 35:

Berechnen Sie die Integrale $\int \sin^2(x)dx$ und

$\int \cos^2(x)dx$ mittels einmaliger partieller Integration!

(Hinweis: Trigonometrischer Pythagoras, nach dem gesuchten Integral umstellen.)

Lösung:

Trigonometrischer Pythagoras $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

Satz: $\sin(2\cdot x)=2\sin(x)\cos(x)$

$$\int_{\square}^{\square}(\sin(x))^2 dx$$

$$\frac{2\cdot x-\sin(2\cdot x)}{4}$$

tExpand(ans)

$$\frac{-(2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)-2\cdot x)}{4}$$

dSolve(y'=$(\sin(x))^2$, x, y)

$$\left\{y=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2\cdot x)}{4}+\mathrm{const}(1)\right\}$$

$$\int_{\square}^{\square}(\cos(x))^2 dx$$

$$\frac{2\cdot x+\sin(2\cdot x)}{4}$$

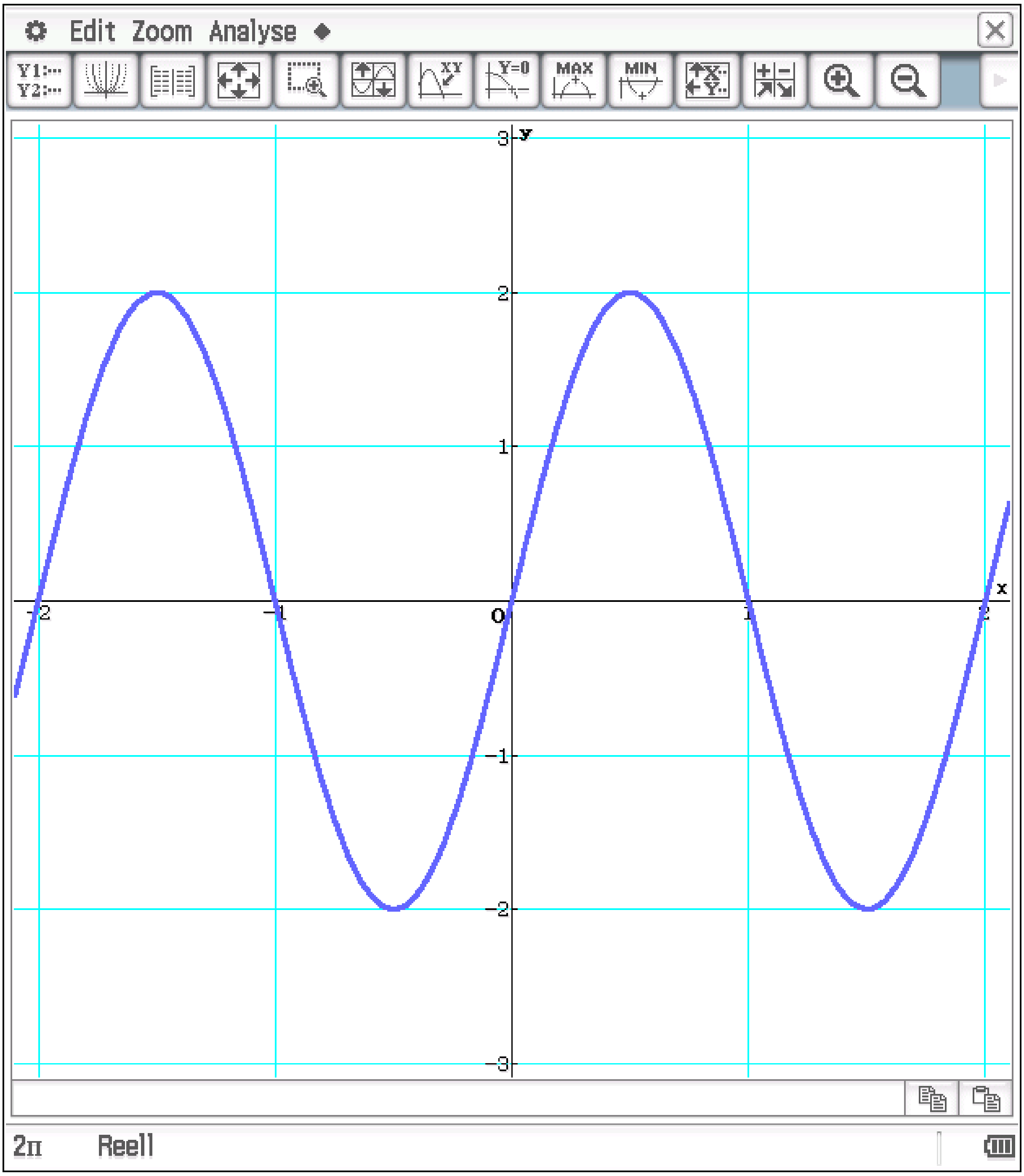
tExpand(ans)

$$\frac{2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)+2\cdot x}{4}$$

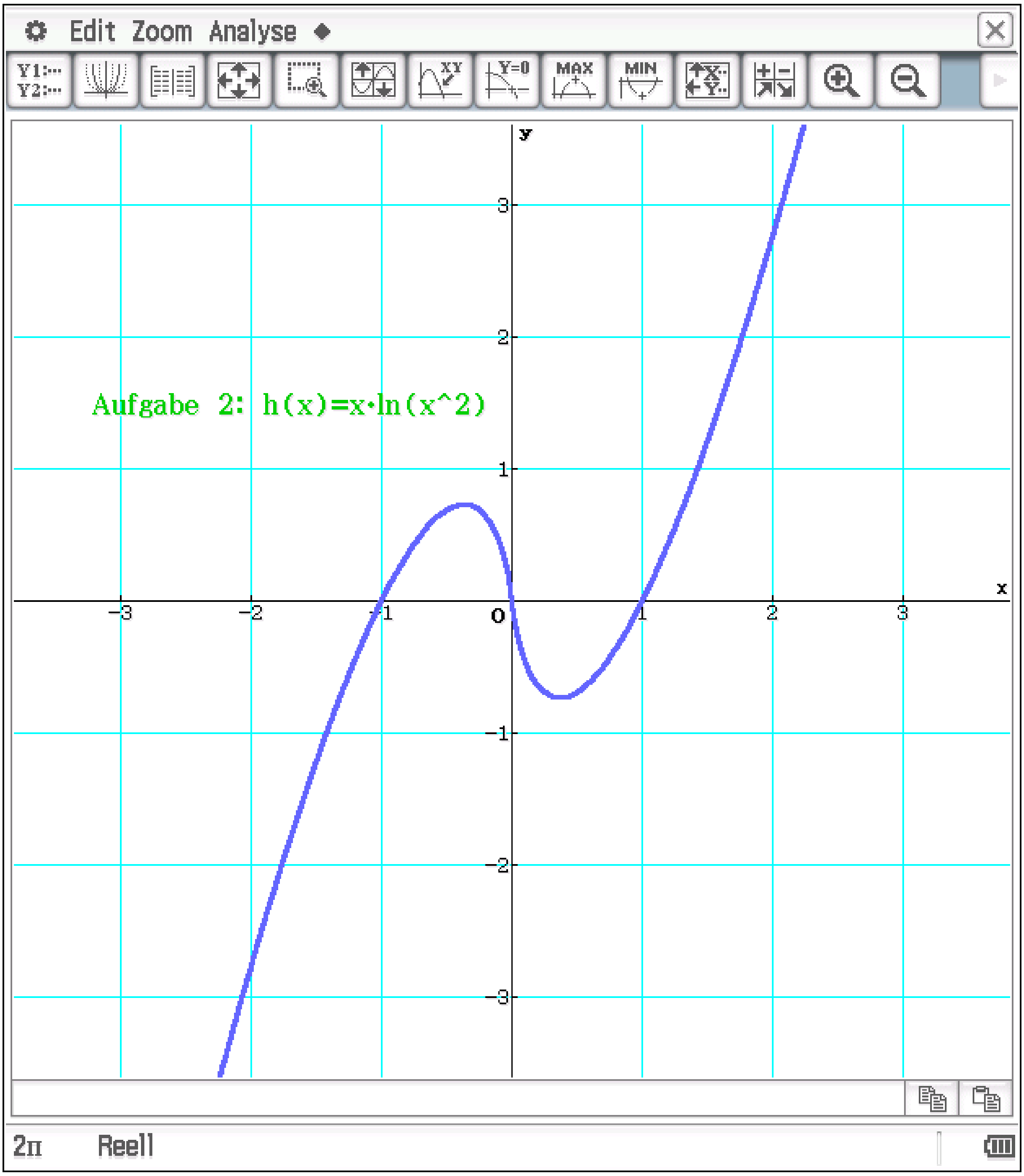
dSolve(y'=$(\cos(x))^2$, x, y)

$$\left\{y=\frac{x}{2}+\frac{\sin(2\cdot x)}{4}+\mathrm{const}(1)\right\}$$

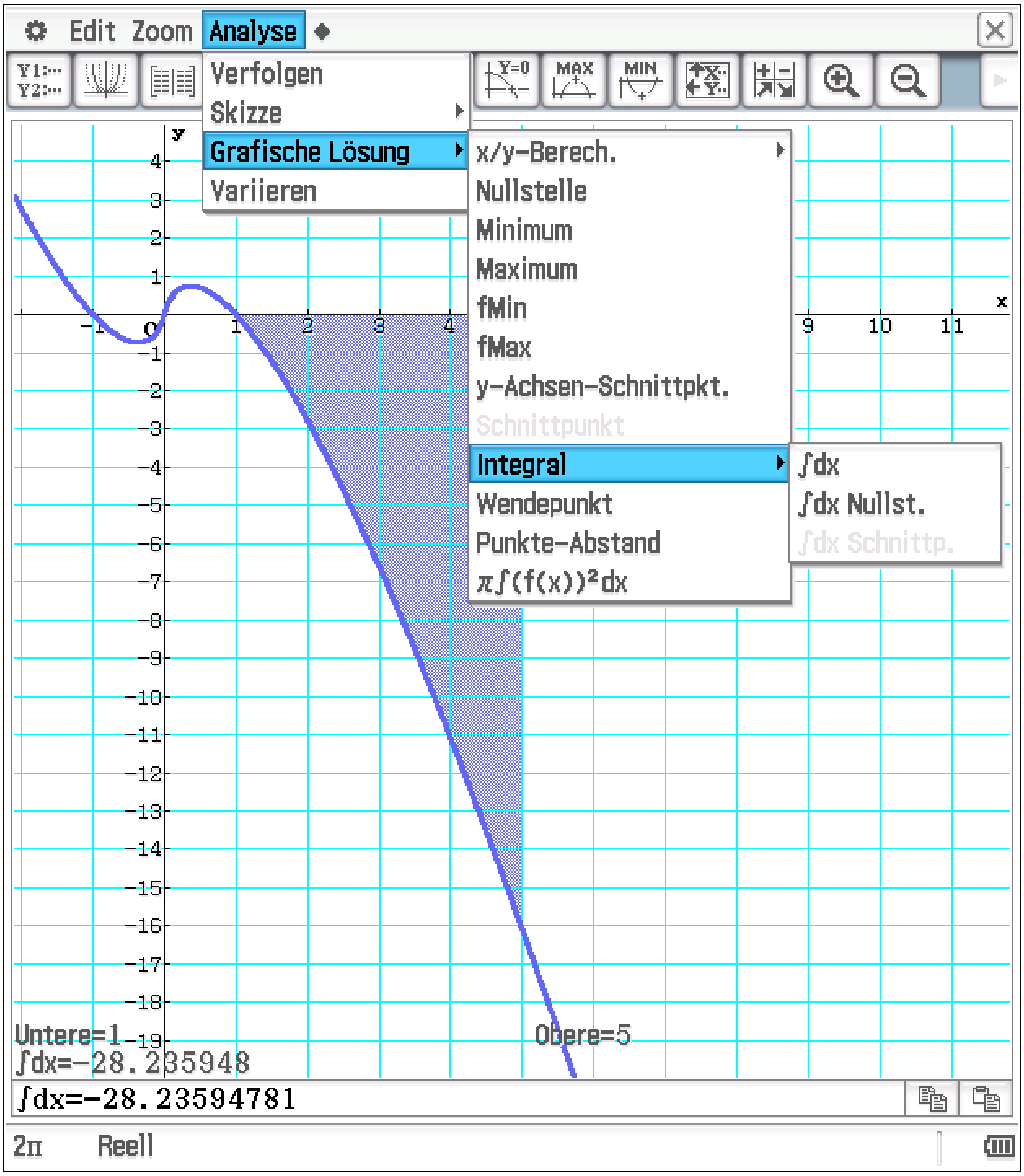
Anlage: Skizze zu Aufgabe 15



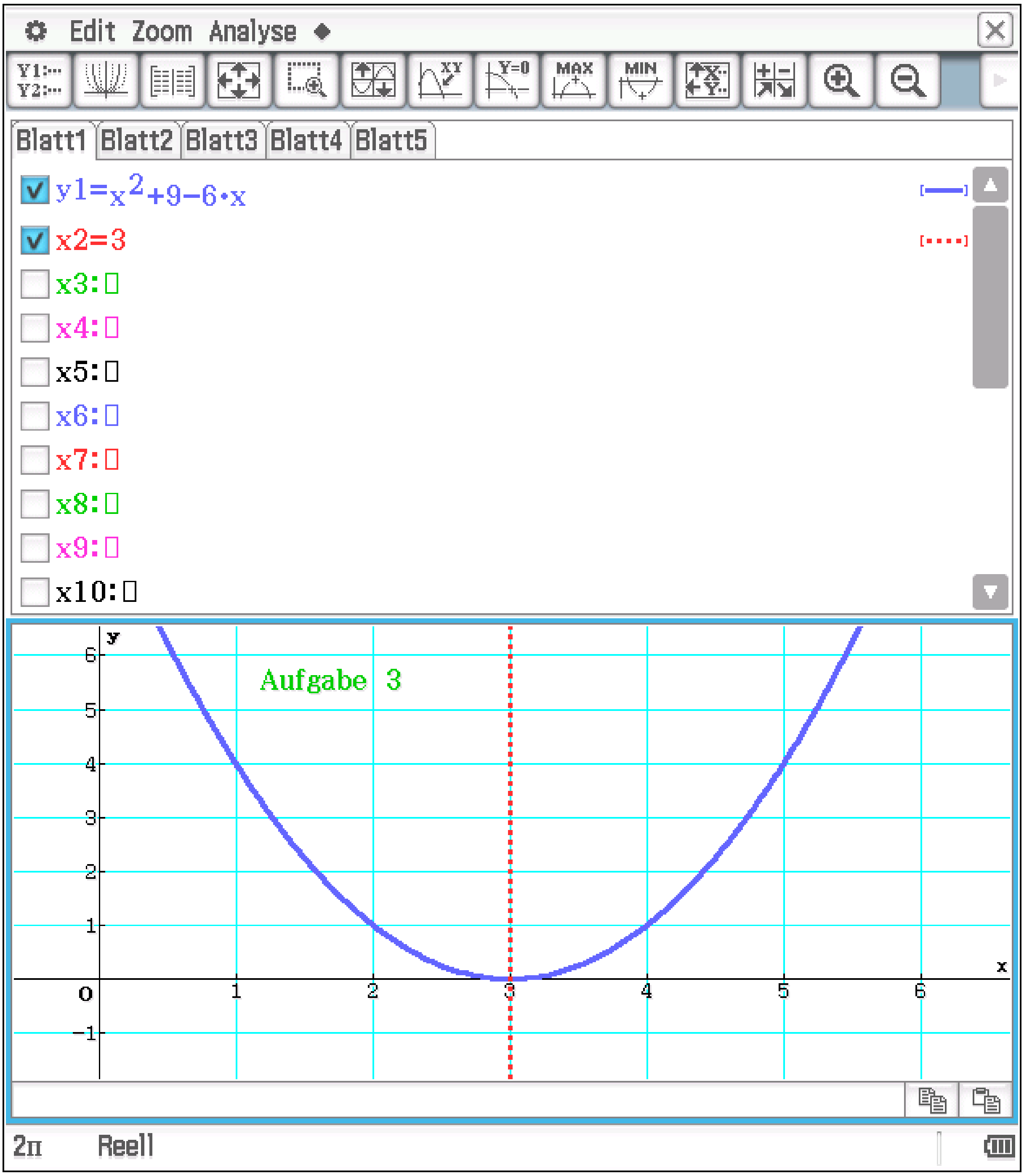
Lösungen: Skizze zu Aufgabe 2



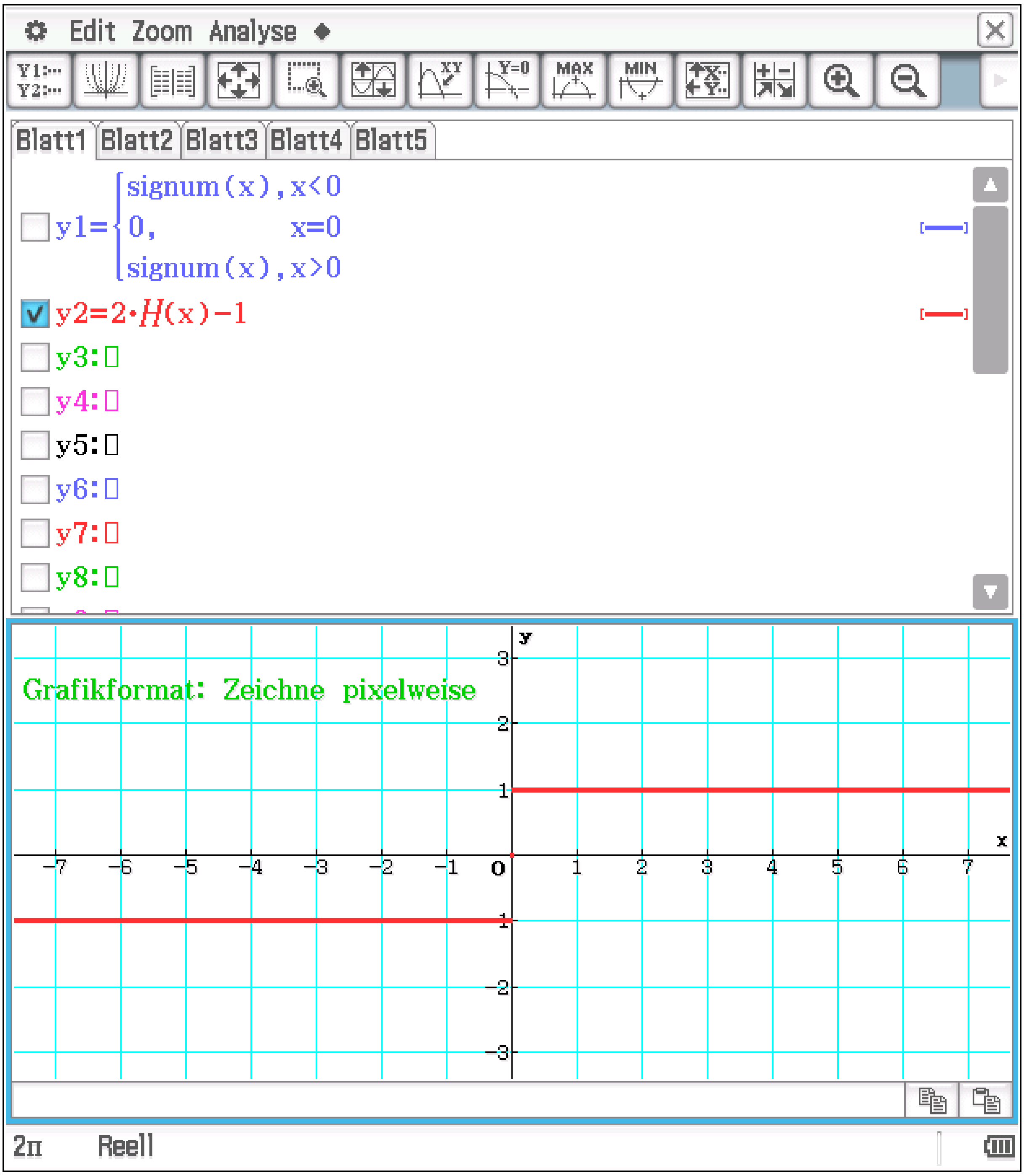
Skizze zu Aufgabe 2



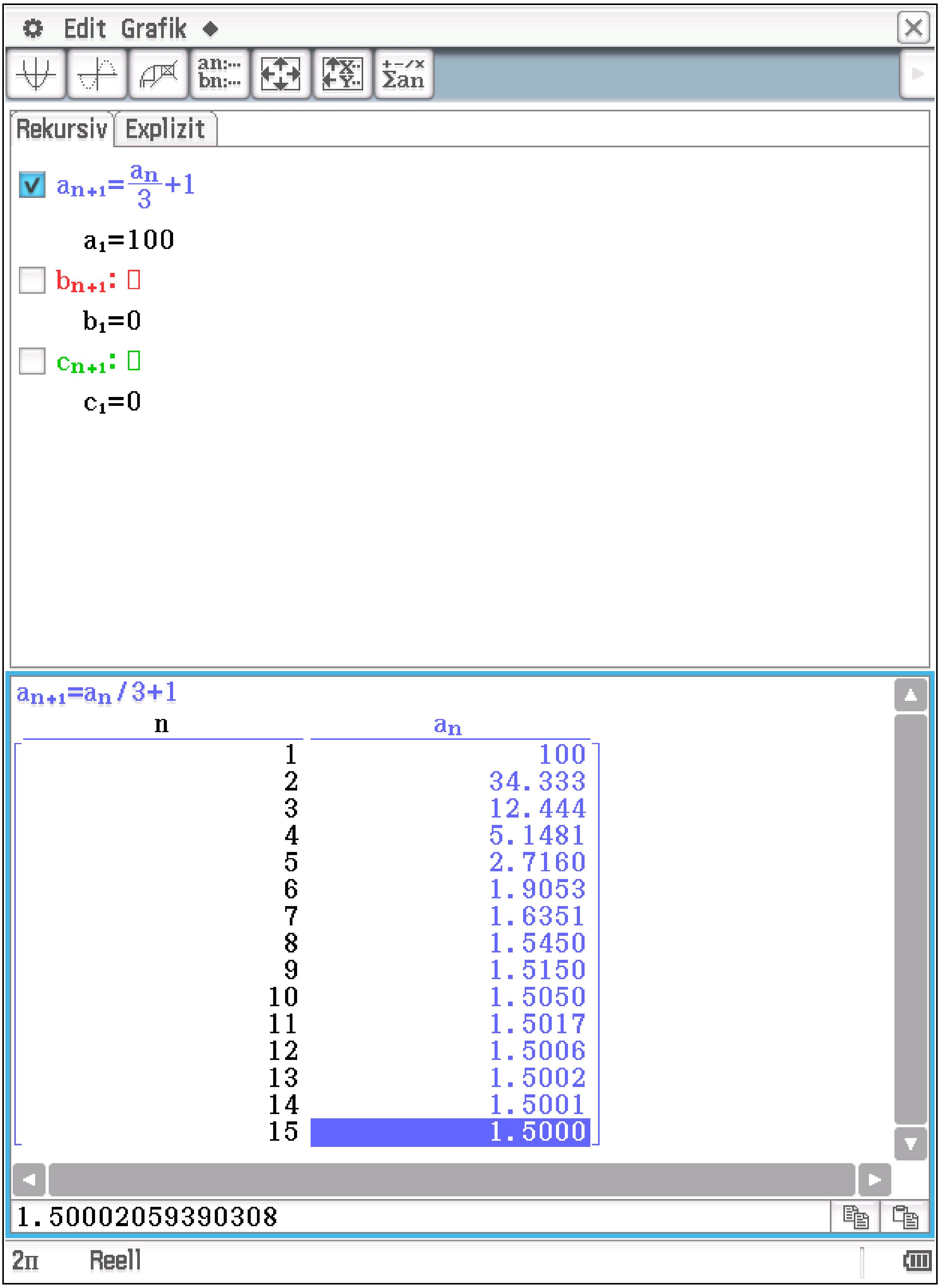
Skizze zu Aufgabe 3



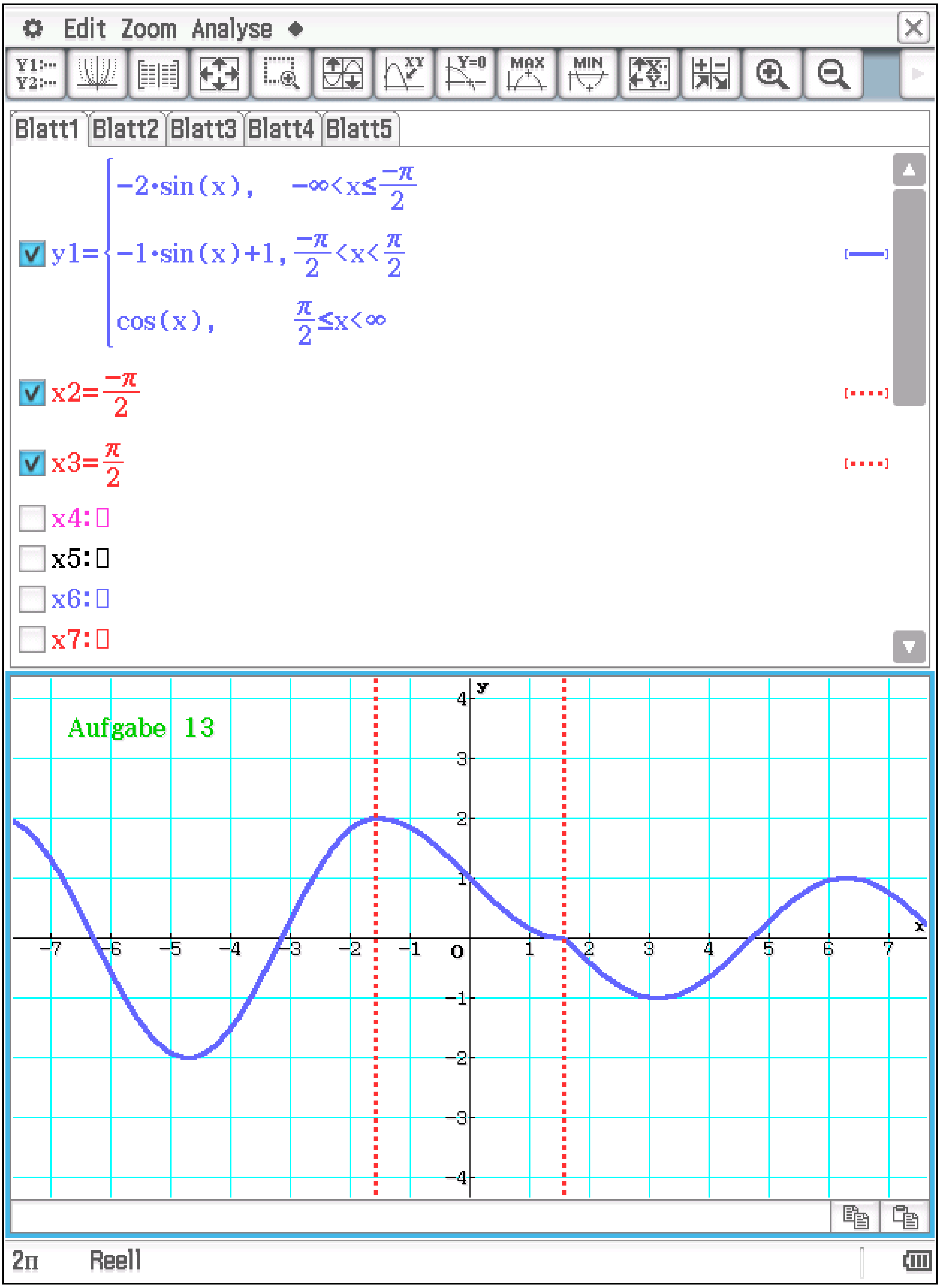
Skizze zu Aufgabe 6



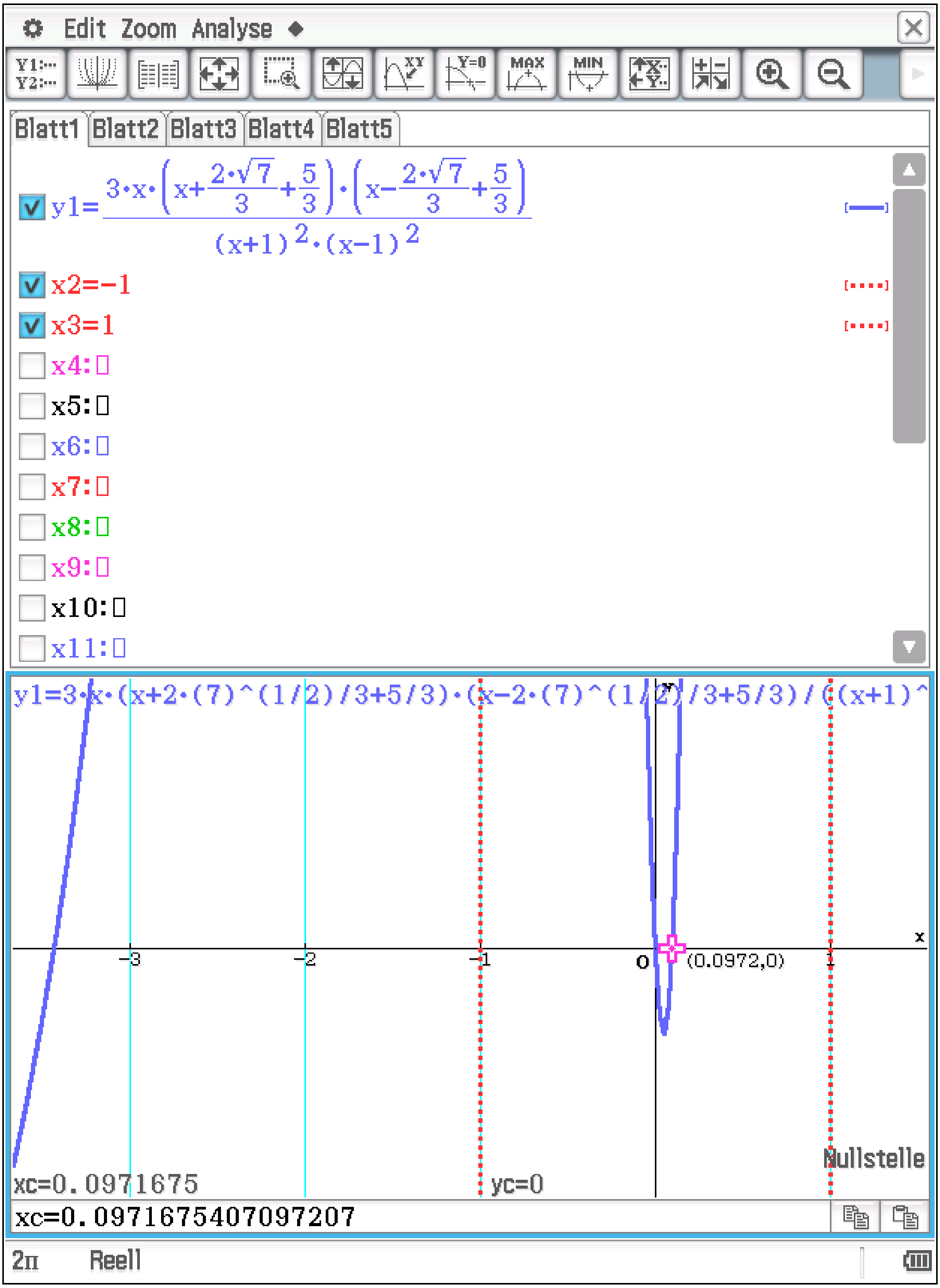
Skizze zu Aufgabe 9

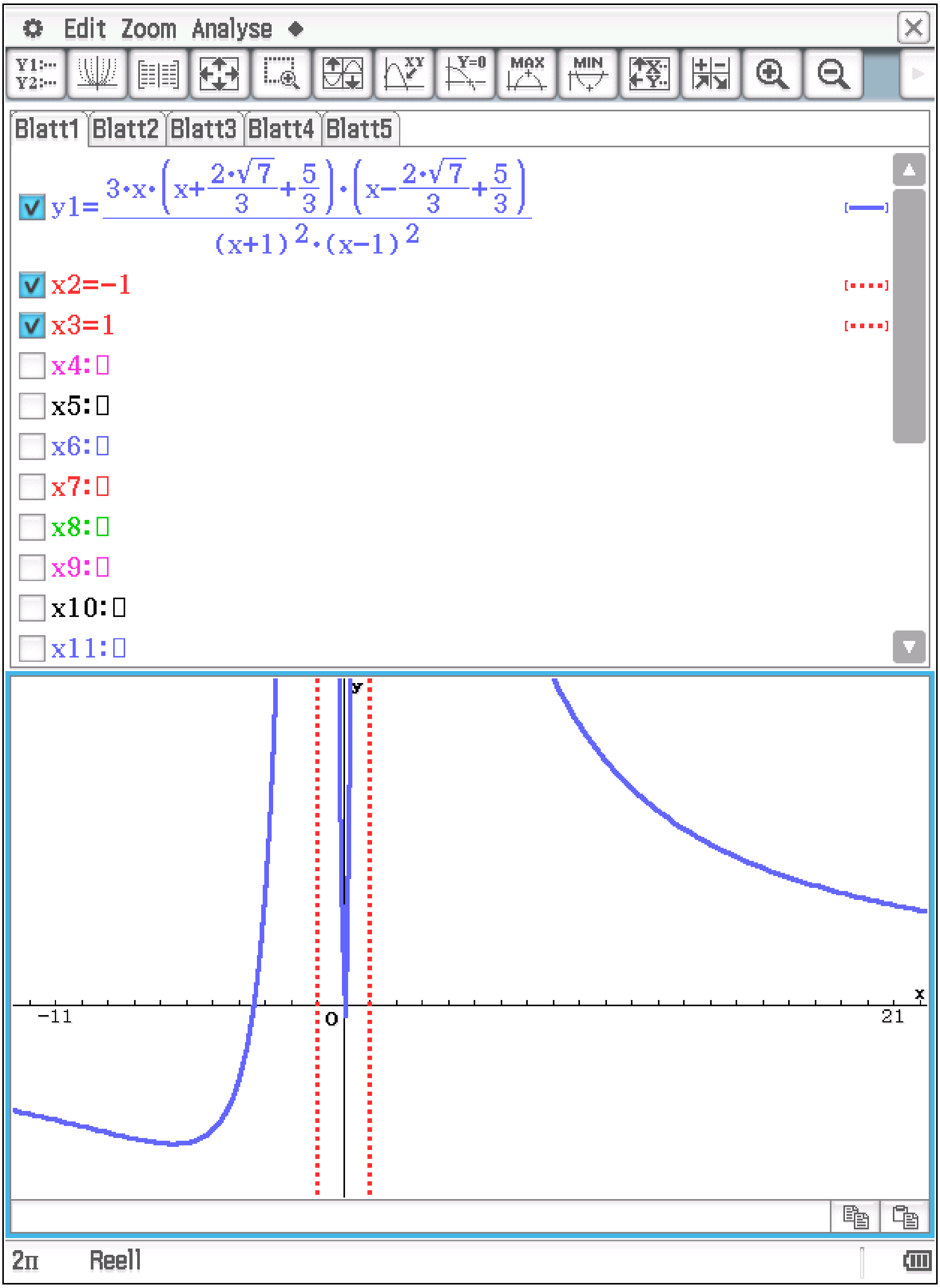


Skizze zu Aufgabe 13

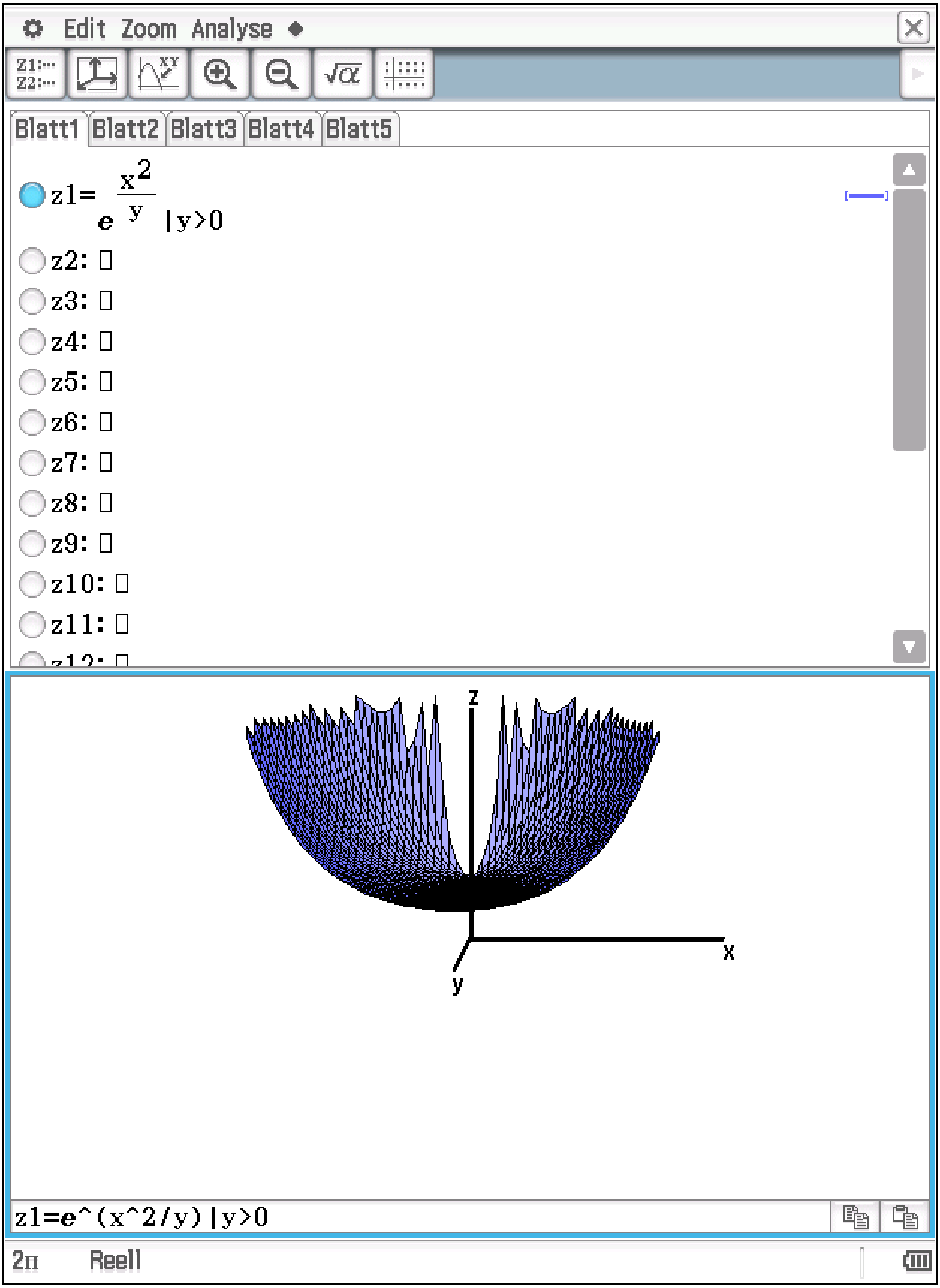


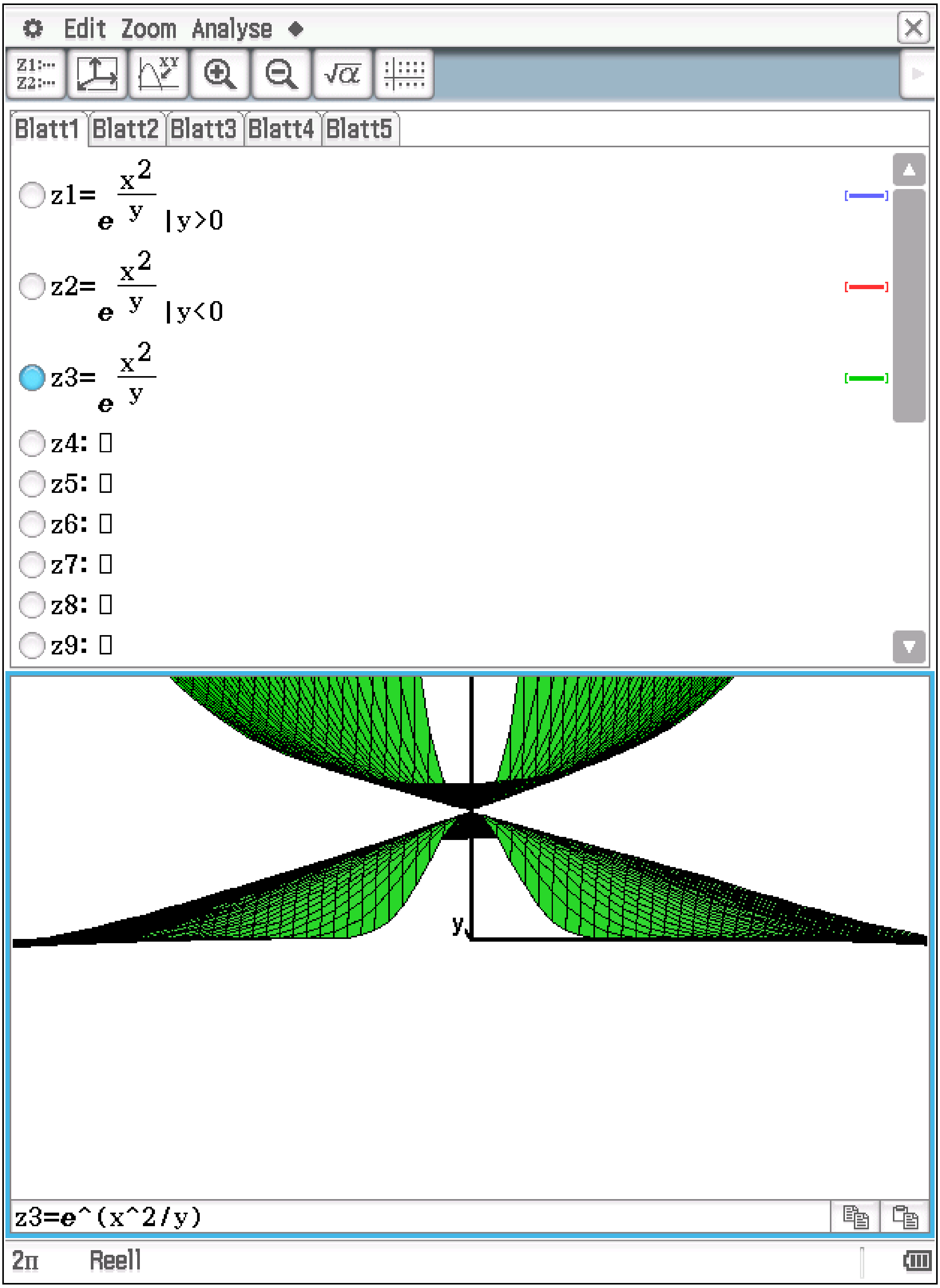
Skizze zu Aufgabe 14




Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=3·x·(x+2·√7/3+5/3)·(x−2·√7/3+5/3)/((x+1)^2·(x−1)^2)
x2=−1
x3=1
x4:
x5:
x6:
x7:
x8:
x9:
x10:
x11:
y
x
−11
0
21
2π Reell

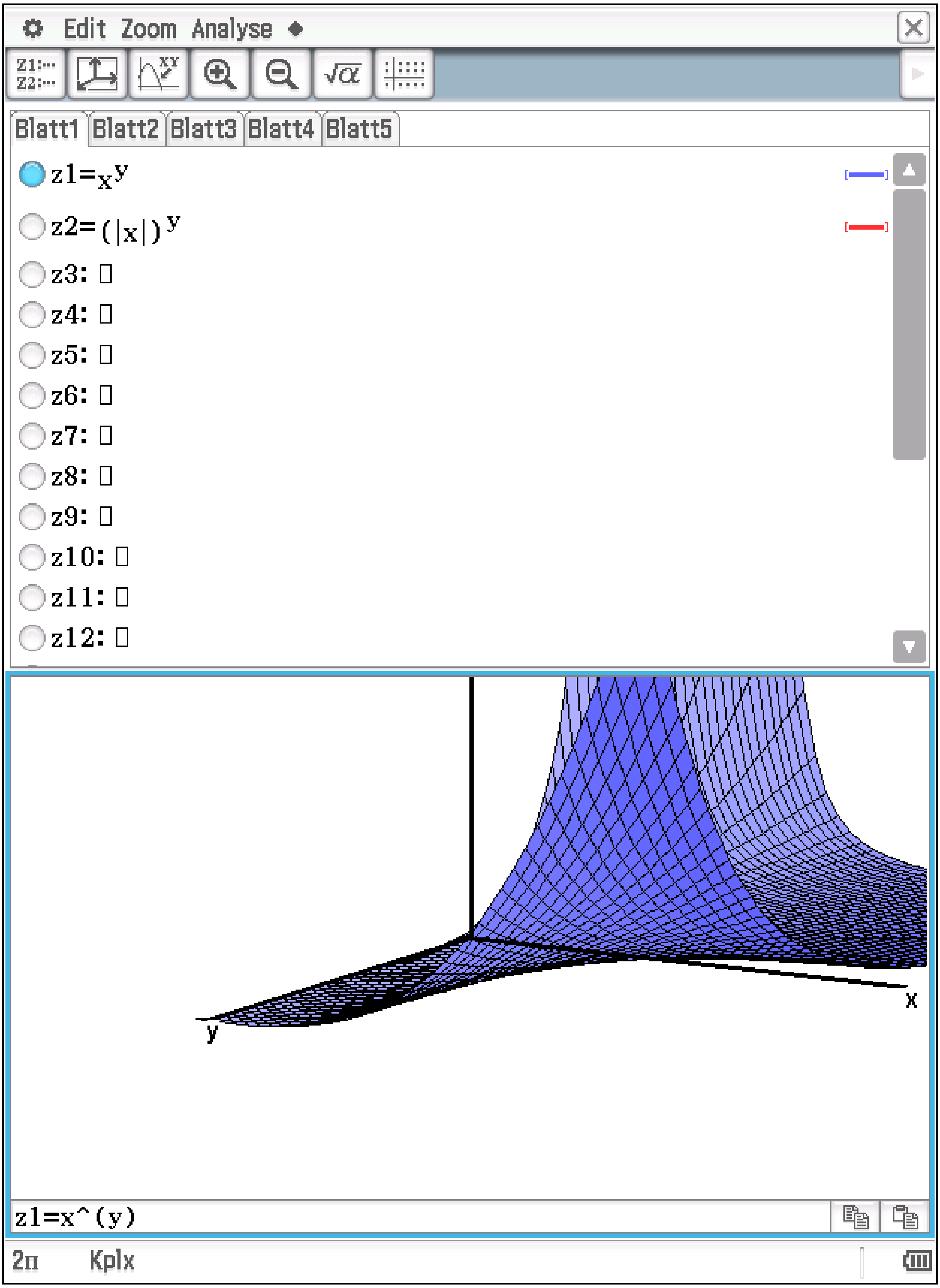
Skizze zu Aufgabe 14





Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1= $e^{\frac{x^2}{y}}$ |y>0
z2= $e^{\frac{x^2}{y}}$ |y<0
z3= $e^{\frac{x^2}{y}}$
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
y
z3=e^(x^2/y)
2π Reell

Skizze zu Aufgabe 22



Skizze zu Aufgabe 33