Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben zur ANALYSIS

Aufgabe 01: (Einstiegsaufgabe)

Zeigen Sie durch indirekten Beweis, dass $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen) gilt!

Nehmen Sie an, $\sqrt{3}$ ließe sich darstellen als vollständig gekürzter Bruch p/q mit $p, q \in \mathbf{Z}$ und leiten Sie daraus einen Widerspruch ab.

Aufgabe 02: (Einstiegsaufgabe)

(Abi 2020/Bayern) Betrachtet werde die Funktion h: $x \to x \cdot \ln(x^2)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich **D** von h an!

b) Ermitteln Sie die Ableitung h'!

c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte (Maxima / Minima) von h!

d) Lassen Sie sich den Graphen von h mit einem elektronischen Hilfswerkzeug zeichnen.

Skizzieren Sie grafsch die Bedeutung des Ausdrucks $\int_1^5 -h(x)dx$!

Aufgabe 03: (Ehemalige Klausuraufgabe)

Eine Funktion $f(x)$ heißt achsensymmetrisch bzgl. der vertikalen Achse $x=k$, $k \in \mathbf{R}$, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: $\forall x \in D$: $f(k-x)=f(k+x)$

a) Untersuchen Sie anhand dieser Bedingung, ob $f(x)=x^2+9-6x$ symmetrisch ist bzgl. der Achse $x=3$!

b) Es soll untersucht werden, zu welcher Achse $x=k$ die Funktion $f(x)=x^2+4x+4$ achsensymmetrisch ist.

Die Auswertung der Bedingung ergab:

$k^2-2kx+4k+x^2-4x+4 = k^2+2kx+4k+x^2+4x+4$

Welchen Wert hat k? (Hinweis: Zusammenfassen nach

Potenzen von x, Koeffizientenvergleich)

Aufgabe 04: (Ehemalige Klausuraufgabe)

Für Polynome 2. Grades der Form

$p_2(x)=x^2+ax+b=(x-r_1)(x-r_2)$ trifft der sogenannte "Satz von Vieta" die folgende Aussage:

$a=-(r_1+r_2)$, $b= r_1r_2$.

a) Welche (graphische) Bedeutung haben r_1 und r_2? Wie lauten a, b und r_1 und r_2 für das Polynom

$p_2(x)=(\pi+x)(x-2\pi)$?

b) Zeigen Sie, dass der Satz von Vieta für beliebige Polynome $p_2(x)$ stimmt, indem Sie $p_2(x)=(x-r_1)(x-r_2)$ ausmultiplizieren und einen Koeffizientenvergleich durchführen!

Aufgabe 05:

Zeigen Sie anhand des ε-Kriteriums, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=1$

gilt!

Das ε-Kriterium lautet:

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** mit dem Grenzwert α, wenn der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert beliebig klein wird und klein bleibt: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in \mathbf{N}$ $\forall n>n_0: |a_n-\alpha|<\varepsilon$

Andernfalls heißt sie **divergent.**

Man schreibt dann: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\alpha$.

Aufgabe 06:

Gegeben sei die Vorzeichen-Funktion sgn(x). Diese ist defniert durch $\mathrm{sgn}(x)=-1$ für $x<0$, $\mathrm{sgn}(x)=+1$ für $x>0$ und $\mathrm{sgn}(0)=0$. Zeigen Sie anhand des ε-δ-Kriteriums, dass diese Funktion an der Stelle $x_0=0$ keinen Grenzwert hat!

Das **ε-δ-Kriterium** lautet:

Sei f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ eine Funktion, welche n-dimensionale Punkte auf reelle Zahlen abbildet, und sei $x_0\in\mathbf{R}^n$ eine

Stelle des Definitionsbereichs. Die Zahl $\alpha\in\mathbf{R}$ heißt Grenzwert von f gegen x_0, wenn es für jede noch so kleine Epsilon-Kugel um α eine Delta-Kugel um x_0 gibt, sodass die Funktionswerte der Delta-Kugel $\mathbf{S}$_δ in der Epsilon-Kugel $\mathbf{S}$_ε liegen.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon f(\mathbf{S}\_\delta(x_0))\subset\mathbf{S}\_\varepsilon(\alpha)$.

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=\alpha$.

Aufgabe 07:

Ermitteln Sie den Wert folgender Grenzübergänge:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}+4\cdot\sqrt[n]{9}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\cdot 4\cdot\sqrt[n]{9}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-e^{-n}\right)\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2+x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 3}\left(e^{x^2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6x+9}{x^3-3x^2-9x+27}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{x}{e\cdot(\ln(x^2)-1)}\right)$

Aufgabe 08:

Achilles und die Schildkröte veranstalten ein Wettrennen. Die Schildkröte bewegtsich fort mit 5km/h, Achilles mit 25km/h. Die Schildkröte hat einen Vorsprung von Δx_0=100km. Zum Überwinden dieses Vorsprungs benötigt Achilles die Zeit Δt_0.

Die Schildkröte aber ist weitergelaufen und hat nach Ablauf dieser Zeit einen neuen Vorsprung Δx_1. Zum Aufholen dieses Vorsprungs benötigt Achilles nun die Zeit Δt_1.

a) Geben Sie tabellenförmig die Werte Δx_n und Δt_n für n=0,1,2,3,4 an!

b) Finden Sie eine allgemeine Formel für Δx_n und Δt_n!

c) Lösen Sie Zenons Paradoxon durch Ermitteln der Grenzwerte $x=\Delta x_0+\Delta x_1+\Delta x_2+...$ und $t=\Delta t_0+\Delta t_1+\Delta t_2+...$!

d) Bestätigen Sie das Ergebnis, indem Sie die Bewegungsgleichungen x_A(t) und x_S(t) für beide Läufer aufstellen und den Überholungspunkt durch

Gleichsetzen ermitteln!

Aufgabe 09:

Eine Folge sei wie folgt rekursiv definiert:

$a_1=100,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+1,\ n=1,2,...$

Wir nehmen an, der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$ existiere.

Welchen Wert hat dann dieser Grenzwert?

(Hinweis: Grenzwert a in die Rekursionsvorschrift

einsetzen.)

Aufgabe 10:

Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot e^{-n^2}\right)$ mittels des

Wurzelkriteriums auf Konvergenz!

Aufgabe 11:

Zeigen Sie, dass das **notwendige Kriterium** für die

Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+\cos(n\pi)}\right)$ erfüllt ist

(Hinweis: Sandwich-Kriterium) und prüfen Sie, welche Aussage das Quotientenkriterium zur Konvergenz dieser Reihe liefert!

Aufgabe 12:

Ein Quadrat der Seitenlänge a wird in 4 gleiche Unterquadrate unterteilt. 2 Unterquadrate werden verworfen, eines wird ausgemalt. Das verbleibende Unterquadrat wird wieder in 4 Quadrate unterteilt, von denen 1 ausgemalt und 2 verworfen werden etc.

Berechnen Sie die ausgemalte Fläche, wenn dieses Verfahren endlos fortgeführt wird!

Aufgabe 13:

Wie müssen die Konstanten A und B gewählt werden, damit f überall stetig wird?

$$f(x)=\begin{cases} -2\cdot\sin(x), & -\infty<x\leq-\frac{\pi}{2} \\ A\cdot\sin(x)+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos(x), & \frac{\pi}{2}\leq x<\infty \end{cases}$$

Aufgabe 14:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{3x^3+10x^2-x}{x^4-2x^2+1}.$$

Der Nenner hat die doppelte Nullstelle 1. Ermitteln Sie die restlichen beiden Nullstellen, indem Sie mittels Polynomdivision den dazugehörigen Linearfaktor abspalten und die entstehende quadratische Gleichung lösen! Führen Sie nun eine Partialbruchzerlegung von f durch! Geben Sie anschließend die Nullstellen und Polstellen von f an!

Aufgabe 15:

In der Skizze (s. Anhang) ist die Funktion f(x) dargestellt. Es handelt sich um eine skalierte

Sinusfunktion. Lesen Sie deren Amplitude sowie Periode ab und geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an!

Aufgabe 16:

Auf welchem der folgenden Intervall hat die Funktion $f(x)=\sin(x)$ (lokale oder globale) Extremwerte? Geben Sie diese gegebenenfalls an!

$[-45°,45°]$, $(-45°,45°)$, $(-45°,45°]$, $[0°,135°)$, $[0°,180°)$, $[0,180°]$, $(225°,315°)$.

Aufgabe 17:

Der Hyperbelkosinus ist definiert als der symmetrische Anteil der Exponentialfunktion: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ist diese Funktion umkehrbar und warum? Wenn nein, gibt es eine Einschränkung des Definitionsbereichs oder Wertebereichs, in der sie umkehrbar ist? Geben Sie gegebenenfalls eine entsprechende Funktionsgleichung an!

(**Hinweis:** Multiplizieren beider Seiten mit e^x, Substitution $z = e^x$).

Aufgabe 18:

Ordnen Sie folgende 12 Funktionen nach Ihrer Wachstumsrate für $x \to \infty$, sodass also für zwei aufeinanderfolgende Funktion f und g in der geordneten Liste gilt $f \in O(g)$. Entscheiden Sie weiterhin, ob auch $g \in O(f)$, die Funktionen also gleich stark anwachsen.

(Hinweis: Regel von L'Hospital).

x^2, 3^x, $\ln(x)$, $\sqrt{x}$, x^{100}, $10^{100}x$, 2^x, $\ln(\sqrt{x})$, $\ln(x^2)$, $(\ln(x))^2$, $x \cdot \ln(x)$, x

siehe auch:

de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_de_L'Hospital

de.wikipedia.org/wiki/Landau-Symbole

Aufgabe 19:

Zeigen Sie anhand der Definition des Hyperbelkosinus (Hyperbelsinus) über die Exponentialfunktion, dass diese Funktion gerade (ungerade) ist!

Aufgabe 20:

Geben Sie irgendeine periodische Funktion an, deren Bildbereich gleich $[8,12]$ ist.

Aufgabe 21:

Gegeben ist die Funktion $f(x,y)=e^{x^2/y}$. Betrachten Sie deren Höhenlinie, die durch die Stelle $(x_0|y_0)=(1|2)$ läuft. Skizzieren Sie diese auf dem Bereich $[-2,2]\times[-2,2]$. Wie sieht die Funktion zu den beiden Seiten der Höhenline hin aus, d.h. in welche Richtung zeigt der Gradient?

Aufgabe 22:

Der Definitionsbereich und der Wertebereich einer einstelligen Funktion sind jeweils Mengen, die aus reellen Zahlen bestehen. Aus welchen mathematischen Objekte bestehen der Definitionsbereich und Wertebereich einer dreistelligen Funktion? Geben Sie den Definitionsbereich für $f(x,y,z)=\frac{y^z}{\ln(|x-2|)\sqrt{x+4}}$ an!

Aufgabe 23:

Leiten Sie folgende Funktion nach x ab:

a) $f(x)=\sin((x+3)^2)$

b) $g(x)=\sin(\sqrt{x})$

c) $h(x)=(e^x\ln(x))^3$

Aufgabe 24:

Ermitteln Sie von $y(x)=x^x$ die Ableitung!

(Hinweis: Auf beide Seiten Logarithmus anwenden, per Kettenregel beide Seiten ableiten, nach y' umstellen.)

Aufgabe 25:

An eine zunächst unbekannte Stelle x_0 des Graphen von

$y=\frac{1}{x}$ wird die zugehörige Tangentengerade gelegt. Man

stellt fest, dass sie die x-Achse bei $x=7$ schneidet.

Bestimmen Sie x_0!

Aufgabe 26*:

Zeigen Sie anhand der Definition der Ableitung über den

Differenzenquotienten, dass $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$ gilt!

Aufgabe 27:

Bestimmen Sie für $f(x,y)=x^2+4xy-2y^2$ die Gleichung

der Tangentialebene an der Stelle (2|1)!

[Zusatz Vektorrechnung]: Geben Sie weiterhin die

Tangentialebene in Hessescher Normalform und

parametrischer Form an!

Aufgabe 28:

$f(u,v,w)=\frac{u^2\sin(3v)+4}{w}$. Leiten Sie f partiell nach u,

nach v und nach w ab, d.h. bestimmen Sie

$\frac{d}{du}\left(\frac{d}{dv}(f(u,v,w))\right)$, $\frac{d}{dv}\left(\frac{d}{du}(f(u,v,w))\right)$,

$\frac{d^2}{dw^2}(f(u,v,w))$!

Stimmt bei diesem Beispiel der **Satz von Schwarz**?

Aufgabe 29:

Ein Körper ruht auf einer Gummimatte an der Stelle $s=0$. Zur Zeit $t=0$ wird er nach oben geworfen. Kurze Zeit später landet er wieder auf der Gummimatte, wobei der Körper leicht nach unten in die Gummimatte sinkt, welche sich anschließend wieder ausdehnt und den Gegenstand zurück in die Höhe $s=0$ der Gummimatte bringt. Dabei ist s die Höhe über der Gummimatte. Die Orts-Zeit-Kurve für diesen Vorgang laute $s(t)=t^3-15t^2+54t$. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem der Körper landet und den Zeitpunkt t_2, an dem der Körper wieder in Höhe $s=0$ zurückgekehrt ist!

Ermitteln Sie ferner eine Formel für die Geschwindigkeit $v(t)=\frac{d}{dt}(s(t))$ und die Beschleunigung $a(t)=\frac{d^2}{dt^2}(s(t))$! Wie groß sind die Minimal- und Maximalgeschwindigkeit des Körpers im Zeitraum $[0, t_2]$?

Berechnen Sie schließlich die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers im Zeitraum $[0;t_1]$.

Hinweis: Die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitraum $[t', t'']$ ist gegeben durch $\bar{x}=\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}|v(t)|dt$.

Aufgabe 30:

Beweisen Sie, dass $\frac{d}{dx}(\ln(x))=\frac{1}{x}$ gilt, in dem Sie von $f(x)=e^x$ ausgehen und die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion anwenden!

$\left(\frac{d}{dx}(y(x))\cdot\frac{d}{dy}(x(y))=1\right)$

Aufgabe 31:

Zeigen Sie anhand der Definition von sinh(x) und cosh(x) über die Exponentialfunktion, dass die Beziehung $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ gilt! Berechnen Sie damit die Ableitung von $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$!

Aufgabe 32:

Ermitteln Sie eine Stammfunktion durch Lösen folgender unbestimmter Integrale:

a) $\int \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}dx$ b) $\int \cos(10x)dx$

c) $\int x\cdot\sin(x^2)dx$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx$

e) $\int x\cdot e^x dx$ f) $\int x^2\cdot\ln(x)dx$

Aufgabe 33:

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Funktion $y=x^2-5x+6$ und der x-Achse im Intervall [1,5], wobei die Flächen unterhalb der x-Achse positiv gezählt werden.

Aufgabe 34:

Es soll das unbestimmte Integral der Funktion

$f(x)=\frac{x^2+2}{x^3-4x}$ ermittelt werden. Führen Sie zuerst eine

Partialbruchzerlegung durch und geben Sie dann das

Integral an!

Aufgabe 35:

Berechnen Sie die Integrale $\int_{\square}^{\square}\sin^2(x)dx$ und

$\int_{\square}^{\square}\cos^2(x)dx$ mittels einmaliger partieller Integration!

(Hinweis: Trigonometrischer Pythagoras, nach dem

gesuchten Integral umstellen.)

Aufgabe 36:

Die Fakultät $a_n=(n-1)!$ einer natürlichen Zahl n ist charakterisiert durch die rekursive Eigenschaft

$a_{n+1}=n\cdot a_n$. Für nichtganzzahlige Werte z wird sie

erweitert zu der sogenannten Gamma-Funktion, diese ist

definiert als $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$.

Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass auch die

Gammafunktion diese rekursive Eigenschaft erfüllt, d.h.

dass $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$ gilt!

Aufgabe 37:

Sei f eine integrierbare Funktion und F deren

Stammfunktion. Zeigen Sie durch Substitution, dass

$\int f(m\cdot x+n)dx=\frac{1}{m}F(m\cdot x+n)+C$ gilt $(m,n\in\mathbf{R})$! Was ergibt

sich also für $\int (3x-5)^{100}dx$?

Aufgabe 38:

Gebietsintegral in kartesischen Koordinaten: Der Bereich

$0\le x\le\pi$ und $0\le y\le\sin(x)$ ist mit der Masse der Dichte

$\rho(x,y)=1+x+4y$ belegt. Skizzieren Sie diesen Bereich und berechnen Sie seine Gesamtmasse! (Hinweis: Die Masse ergibt sich durch Integration der Dichte über den Bereich.)

Aufgabe 39:

Gebietsintegral in Polarkoordinaten. Durch $0 \le a \le r \le b$ und $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ ist ein Gebiet gegeben (Radius r, Winkel $\varphi, a, b \in R$). Skizzieren Sie es für $a=1$, $b=2$! Berechnen Sie anschließend das Gebietsintegral von $f(x,y)=x \cdot y$ über diesen Bereich! (Hinweis: x und y zuerst durch Polarkoordinaten r, φ ausdrücken.)

Aufgabe 40:

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion $f(x,y)=4(x-2)(y^2+10y)+3x^3$. Finden Sie anhand der notwendigen Bedingung Kandidaten für Extremstellen.

Prüfen Sie anhand des Kriteriums $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yx} > 0$, ob es sich wirklich um Extremstellen handelt. Falls ja, handelt es sich um Minima oder Maxima?

Aufgabe 41:

Ermitteln Sie für folgende Potenzreihen die Folge a_i der Koeffizienten und bestimmen Sie den Konvergenzradius!

a) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(i \cdot (3 \cdot x)^i\right)$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(i \cdot x)^i}{2^i}\right)$

c) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{i}\right)\right)^i\right)$

vgl. auch:

de.wikipedia.org/wiki/Konvergenzradius

Aufgabe 42:

Nähern Sie die Funktion $f(x)=\ln(x)$ durch ein

Taylor-Polynom 3. Grades an für die Entwicklungsstelle

$x_0=3$!

vgl. auch:

de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe

de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Taylorpolynom

Aufgabe 43:

Ermitteln Sie für folgende Funktionen die Taylor-Reihe

2. Grades an der Entwicklungsstelle $x_0=1$!

a) $f(x)=x^2+x$ b) $f(x)=\frac{1}{1+x}$

Aufgabe 44:

Berechnen Sie $\sqrt[3]{11}$ mittels einer Schmiegeparabel

(=Taylor-Polynom 2. Grads).

Schätzen Sie den Fehler mittels dem Restglied $R_2(x)$ ab!

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie eine Näherungslösung der Gleichung

$x\cdot(2+\sin(x))=\frac{1}{10}$. Dabei soll die linke Seite der Gleichung durch eine Schmiegeparabel angenähert werden. Überlegen Sie sich dazu zuerst eine geeignete Entwicklungsstelle.

Aufgabe 46:

Zeigen Sie, dass die Ableitung von $f(x)=\sin(x)$ gleich $f'(x)=\cos(x)$ ist! Nutzen Sie dazu die Potenzreihendarstellung der Sinusfunktion und bilden Sie gliedweise die Ableitung. Vergleichen Sie anschließend mit der Potenzreihe der Kosinusfunktion.

vgl. auch

de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe#Trigonometrische_Funk▶

Aufgabe 47:

Gesucht ist ein Näherungswert für $\Gamma(2.8)$. Hierzu soll die Taylorentwicklung 2. Grades der **Gammafunktion**

$\Gamma(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0=3$ betrachtet werden. Ermitteln Sie mit der Taylor-Reihe einen Näherungswert für $\Gamma(2.8)$ auf 2 Kommastellen genau! Schätzen Sie den Fehler auf den so ermittelten Wert auf 3 Kommstellen genau ab! Hinweis: Für $x>2$ ist $\Gamma'''(x)$ streng monoton steigend. Folgende Werte der Gammafunktion benötigen Sie möglicherweise:

$\Gamma(n)=(n-1)!$ für $n \in N^{+}$

$$\begin{bmatrix} \Gamma'(3) & \Gamma''(3) & \Gamma'''(3) & \Gamma''''(3) & \Gamma''''(3) \\ 1.85 & 2.49 & 3.45 & 5.52 & 8.85 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 48:

Bestimmmen Sie das unbestimmte Integral

$\int_{\square}^{\square} \sin(n\cdot x)\cdot\cos(m\cdot x)dx$ für $(n, m \in N^{+},\ n \neq m)$ durch

zweimalige partielle Integration und anschließendem Umstellen nach dem gesuchten Integral! Was erhalten Sie damit für das bestimmte Integral von 0 bis 2π?

Aufgabe 49:

Betrachtet werde ein Sägezahnimpuls, der für $x \in (0,3]$ definiert ist als $f(x)=\frac{1}{3}x$ und für weitere x-Werte periodisch fortgesetzt wird. Berechnen Sie die dessen Fourier-Reihe, d.h. ermitteln Sie alle Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n! Welchen Wert hat die Grenzfunktion an der Stelle x=0? Lassen Sie sich mithilfe eines Computerprogramms einige der ersten Terme der Fourier-Reihe zeichnen!

[Zusatz] Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(n)\right)$, indem Sie die Fourier-Reihe an der Stelle $x = \frac{3}{2\pi}$ auswerten!

Aufgabe 50:

Formen Sie die DGL yy'+x−2y'=3 in explizite Form um, d.h. stellen Sie um nach y'. Lassen Sie sich das Richtungsfeld etwa mit dem Online-Tool (java) der

Bluffton University (Homepage von Prof. Darryl K. Nester)

homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html

skizzieren. FindenSie grafsch die partikuläre Lösung für das Anfangswertproblem $y(2)=3$!

[Zusatz] Warum zeigt das Online-Tool eine Kurve mit vielen Zacken an?

Aufgabe 51:

Prüfen Sie durch Einsetzen, ob die Funktion $y(x)=\frac{e^x}{3+e^x}$ eine Lösung der DGL $y'=y\cdot(1-y)$ ist!

Aufgabe 52:

Finden Sie durch Einsetzen Werte für a, b und c, sodass die Funktion $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ eine Lösung der DGL $y''+3y=x^2+x$ ist!

Aufgabe 53:

Zeigen Sie, dass $y(x,t)=A\cdot\sin(x\pm v\cdot t)$ Lösungen der partiellen DGL

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x,t))=\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}(y(x,t))$$ ("Wellengleichung") sind!

Dabei ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Aufgabe 54:

Klassifizieren Sie die folgenden DGL bezüglich der im Unterricht besprochenen Merkmale.

[Zusatz] Überlegen Sie sich durch geschicktes Nachdenken eine Funktion, welche die DGL erfüllt.

a) $y'(x)=x$ b) $y'(x)=e^x$

c) $y'(x)=2\cdot y(x)$ d) $y''(x)=42$

e) $y''(x)=y(x)$ f) $y'(x)=\frac{1}{y(x)}$

Aufgabe 55:

Klassifizieren Sie die DGL! Vorgegeben ist die allgemeine Lösung der DGL. Finden Sie eine partikuläre Lösung, welche die gegebene Anfangsbedingung erfüllt!

a) $y'=x$ mit Lösung $y=\frac{1}{2}x^2+C$ für $y(0)=4$

b) $y'=y$ mit Lösung $y=C\cdot e^x$ für $y(0)=4$

c) $y'=3y$ mit Lösung $y= C\cdot e^{3x}$ für $y(0)=4$

d) $y''=3y$ mit Lösung $y=C_1\cdot e^{\sqrt{3}x}+C_2\cdot e^{-\sqrt{3}x}$ für $y(0)=4$ und $y'(0)=5$

e) $y''=-3y$ mit Lösung $y=C_1\cdot\cos(\sqrt{3}x)+C_2\cdot\sin(\sqrt{3}x)$ für $y(0)=4$, $y'(0)=5$

Aufgabe 56:

Prüfen Sie, ob die folgende DGL homogen und linear sind! Falls nichts, geben Sie den homogenen und den inhomogenen Anteil an!

a) $y'=y$ b) $y'=y+\sin(x)$

c) $x^2y''=2y'-y$ d) $0=\frac{y''+2y}{y''-3y}$

e) $\frac{y'}{y}=x+\frac{1}{y}$ f) $(y'')^2=\ln(x)\cdot(y\cdot y')$

g) $\sqrt{y'+y}=0$ h) $y''-2y'+y=\sin(x)$

i) $\ln(x)y''+\frac{y'}{x}=0$

Aufgabe 57:

In einen undichten Tank fließen pro Sekunde 10[l] Wasser. Außerdem sickert jede Sekunde ein Promille der aktuellen Wassermenge aus dem Tank. Zum Zeitpunkt t=7[s] enthält der Tank 98[l]. Der Tank sei so groß, dass er nie voll wird. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Wassermenge im Tank auf und geben Sie die Anfangsbedingung an. Schreiben Sie alle Zahlenwerte mit ihren physikalischen Einheiten auf! Klassifizieren Sie diese DGL!

Aufgabe 58:

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL durch direkte Integration!

a) $y'''=\sin(2x)$

b) $\frac{y'}{x}-\ln(x)=0$

c) $(y''-x)\cdot(y'+x^2)=0$

d) $(y')^2-y'-6=0$

Aufgabe 59:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung für die DGL

$y'=(1+y^2)x^3$ mit der Methode TdV: "Trennung der Variablen".

b) Ermitteln Sie die partikuläre Lösung für das Anfangswertproblem $y(3)=2$!

Aufgabe 60:

Wir betrachten noch einmal die DGL aus dem vorangegangenen Aufgabenblatt. Diese lautete:

$V'+\frac{1}{1000}V=10$ mit $V(7)=98$.

Lösen Sie zuerst die homogene DGL mit dem Verfahren der Trennung der Variablen!

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die homogene

DGL noch einmal mit dem Verfahren der charakteristischen Gleichung lösen!

Um eine partikuläre Lösung zu finden, wählen Sie den Ansatz $y_p(x)=A$ und bestimmen Sie A durch Einsetzen in die DGL! Geben Sie nun die allgemeine Lösung der DGL an und ermitteln Sie die Lösung für die gegebene Anfangsbedingung!

Aufgabe 61:

Betrachtet werden soll die DGL $x \cdot y' = y \cdot \sin(x)$

a) Klassifizieren Sie diese DGL bzgl. Ordnung, Homogenität, Linearität. (Begründung!)

b) Sie kann mittels der Methode "Trennung der Variablen" gelöst werden. Geben Sie die beiden Integrale an, die dabei zu lösen wären!

c) Eines der beiden Integrale ist schwer zu lösen. Daher soll die Lösung genähert werden für kleine Werte $|x|$, indem der Term $\sin(x)$ in der DGL ersetzt wird durch seine Taylorentwicklung 3. Grades um die Stelle $x_0=0$.

Geben Sie die dadurch entstehenden Integrale an!

d) Finden Sie die allgemeine Lösung der genäherten DGL!

Aufgabe 62:

Lösen Sie die DGL $y'+y=x^2$, indem Sie

a) einmal die homogene DGL mittels Trennung der Variablen (TdV) lösen und anschließend eine Variation der Konstanten (VdK) durchführen;

b) und einmal die Lösungsformel direkt anwenden:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL 1. Ordnung $y'+P(x)y=Q(x)$ lautet

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot\left(e^{\int P(x)dx}\right)dx+C\right)$$

http://statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/

MOK/HTML/node182.html

https://www.massmatics.de/merkzettel/

#!505:Lineare_Differentialgleichungen_1._Ordnung

Hinweis: Partielle Integration für das Integral verwenden.

Aufgabe 63:

Ermitteln Sie, ob folgende Mengen von Funktionen linear abhängig oder unabhängig sind! Wie lautet jeweils deren **lineare Hülle**?

a) $\{x\}$ b) $\{0, x\}$ c) $\{1, x\}$

d) $\{x^{1/2}, x^{-1/2}\}$ e) $\{x, x^2, 2x^3\}$

f) $\{x, x^2, (3x)^2\}$ g) $\{\sqrt{x}, \sqrt{2x}\}$

h) $\{\ln(x), \ln(2x)\}$ i) $\{\ln(x), \ln(2x), 4\}$

https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Hülle

Aufgabe 64:

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mittels der charakteristischen Gleichung!

Hinweise: f) Eine Lösung lautet $\lambda=3$, Polynomdivision.

i) $D=\frac{d}{dx}$

a) $y'+2y=0$

b) $y''-3y'=0$

c) $2y''+\frac{10}{3}y'-\frac{4}{3}y=0$

d) $2y^{(4)}+2y''-12y=0$

e) $y(5)-y'=0$

f) $y'''-8y''+y'+42y=0$

g) $y''-4y'+4y=0$

h) $y^{(5)}=0$

i) $(D^2+6D+9)(D^2+2D+1)y=0$

Aufgabe 65:

Bestimmen Sie unter Nutzung der Hinweise die allgemeine Lösung folgender DGL!

a) $y''+y'-2y=-10\sin(x)$. Lösungen der charakteristischen Gleichung sind -2 sowie 1 und zudem löst $y=\cos(x)+3\sin(x)$ die DGL.

b) $y''-14y'+49y=49x^2-28x$. Es gilt $x^2-14x+49=(x-7)^2$ und x^2+C löst für ein bestimmtes C die DGL.

c) $x^2\cdot y''-4x\cdot y'+4y=x^8$. Sowohl die Fundamentallösungen als auch eine partikuläre Lösung sind Monome der Form $a\cdot x^n$.

Aufgabe 66:

Lösen Sie die sogenannte "logistische Differenzialgleichung", welche ein begrenztes Wachstum beschreibt, mittels Trennung der Variablen:

$$x'=\frac{d}{dt}(x(t))=k\cdot x\cdot\left(1-\frac{x}{M}\right) \text{ mit } k,M\in\mathbf{R}^+$$

Hinweis: Lösen Sie das dabei vorkommende Integral mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 67:

Geben Sie eine lineare DGL an, welche

$6e^{-4x}-33e^{-5x}+x$ als Lösung besitzt!

Aufgabe 68:

Die DGL $y''+\omega_0{}^2y=0$ $(\omega_0>0)$ hat die Lösung $C1e^{-\omega_0 jx}+C2e^{\omega_0 jx}$ (nachrechnen!).

Hierbei können die Konstanten C1,C2 und die Funktionswerte y komplexe Zahlen sein. Aus physikalischen Grunden sind wir nur an reellen Lösungen interessiert. Zeigen Sie, dass sich diese Löung dann als $K1\cdot\cos(\omega_0\cdot x)+K2\cdot\sin(\omega_0\cdot x)$ schreiben lässt!

Aufgabe 69:

Die DGL für eine gedämpfte Schwingung lautet

$x''+\frac{r}{m}x'+\frac{k}{m}x=0$ (z.B. Federpendel mit Reibung). Dabei ist m die Masse, k die Federkonstante und r der Reibungskoeffizient.

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_{1,2}=-\omega_0\cdot\gamma\pm\omega_0\cdot\sqrt{\gamma^2-1}$ Lösungen der charakteristischen Gleichung sind! Dabei ist $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\gamma=\frac{r}{2\sqrt{m\cdot k}}$

b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung auf! Wann kann man diese mittels Sinus-/Kosinusfunktionen ausdrücken? Begründen Sie, warum man die 3 Fälle $\gamma<1$, $\gamma=1$ und $\gamma>1$ unterscheidet! In welchen Fällen tritt eine Schwingung auf?

c) Zeigen Sie, dass das Pendel in jedem Fall asymptotisch in die Ruhelage zurückkehrt, also $\lim_{t\to\infty}(x(t))=0$ gilt!

d) In welchem Fall (für welches γ) klingt die Schwingung am schnellsten ab?

Aufgabe 70:

Lösen Sie $y''-y'-2y=(D^2-D-2)y=2e^{3x}$ durch schrittweise

Integration!

Anlage: Skizze zu Aufgabe 15