Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben und Lösungen zur ALGEBRA

Aufgabe 01:

Gegeben sei A(x,y): $(x-y)^2 = x^2-y^2$,

$x,y \in N=\{0,1,2,3,...\}$.

a) Worum handelt es sich bei A(x,y) ?

b) Geben Sie jeweils den Wahrheitswert an von

$\forall x \forall y$: A(x,y) $\forall x \exists y$: A(x,y)

$\exists x \forall y$: A(x,y) $\exists y \forall x$: A(x,y).

c) Was ändert sich bei b), falls

$x,y \in N^+=N^*=\{1,2,3,...\}$ gilt?

(Bem.: DIN 5473:1992-07 u.a. Symbolik

Logik und Mengenlehre; Zeichen und Begriffe)

vgl. auch:

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft:

www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathe1infowirt2018w

/media/skript_aussagenlogikmengen.pdf

Lösung:

a) $A(x,y)$ ist eine **Aussageform** (Gleichung), die wahr oder falsch sein kann, d.h. $A(x,y)$ besitzt noch keinen Wahrheitswert.

b) $\forall x \forall y$: $A(x,y)$ ist **falsch,** da $A(x,y)$ nicht für für alle $(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ gilt (z.B. $x=0$ und $y=1$)

$\forall x \exists y$: $A(x,y)$ ist **wahr,** da für alle $x \in \mathbf{N}$ ein $y \in \mathbf{N}$ existiert, um $A(x,y)$ zu erfüllen (z.B. $y=0$ oder $y=x$)

denn $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 = x^2-y^2$ ergibt $2y^2=2xy$ oder $y(y-x)=0$

$\exists x \forall y$: $A(x,y)$ ist **falsch,** da es kein gemeinsames x für alle y gibt mit $2y^2=2xy$, d.h. $y^2=xy$ oder $y(y-x)=0$

$\exists y \forall x$: $A(x,y)$ ist **wahr** ($y=0$, dann $x^2=x^2$)

c) $\forall x \forall y$: $A(x,y)$ ist **falsch,** vgl. a) (es fehlt auf der rechten Seite der Term $-2xy$ und $+y^2$ statt $-y^2$)

$\forall x \exists y$: A(x,y) ist **wahr** (y=x wählen)

$\exists x \forall y$: A(x,y) ist **falsch**, vgl. a)

$\exists y \forall x$: A(x,y) ist **falsch**, da y=0 nicht mehr zum Definitionsbereich von A(x,y) gehört.

Aufgabe 02:

Vereinfachen Sie die Terme $A\setminus(A\setminus B)$ und $(A\setminus A)\setminus B$ mittels Veranschaulichung in einem VENN-Diagramm!

Welchen Schluß ziehen Sie daraus für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Operation \ (Mengendifferenz)?

Lösung:

Assoziativgesetzes der Operation \ wäre hier

$A\setminus B\setminus C=(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$ und speziell

$A\setminus A\setminus B=(A\setminus A)\setminus B=A\setminus(A\setminus B)$

Nun gilt $A\setminus A=\emptyset$ ($\emptyset$ - leere Menge, DIN 5473)

und daraus $(A\setminus A)\setminus B=\emptyset\setminus B=\emptyset$

andererseits ist $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

Im allgemeinen gilt nicht $A\cap\bar{B}=\emptyset$, d.h. das

Assoziativgesetz gilt hier nicht.

rechnerische Umformung:

$A\setminus(A\setminus B)=A\setminus(A\cap\bar{B})=A\cap(\text{nicht}(A\cap\bar{B}))=$

$A\cap(\bar{A}\cup B)=(A\cap\bar{A})\cup(A\cap B)=\emptyset\cup(A\cap B)=A\cap B$

Aufgabe 03:

In der Menge $M=\{1,2,3,4\}$ werde die Relation

$\mathbf{R}=\{(x,y)\,|\,ggt(x,y)=1\}$ ggt: größter gemeinsamter Teiler

betrachtet.

a) Geben Sie **R** als Menge (von Zahlenpaaren) vollständig an!

b) Welche Eigenschaften hat diese Relation, welche nicht?

Bem.: s. **Einführung in die Mathematik für Informatiker** (Dörfler, Peschek 1988, Hanser-Verl.) Kapitel 3: Relationen und Abbildungen (S. 40ff)

Lösung: R ist eine binäre Relation in M×M (kartesisches Produkt)

a)

R={(x,y)|(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(3,1),(

in Tabellenform oder als Matrix (oder als Pfeildiagramm, gerichteter Graph)

$$\begin{bmatrix} R & | & 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & + & - & - & - & - \\ 1 & | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Matrix:} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Die Relation ist **symmetrisch** (x,y)∈**R** und (y,x)∈**R**, d.h. **R**=R^{-1}

R^{-1} bezeichnet die inverse Relation zu **R** (**R** enthält die Paare (x,y) und R^{-1} die Paare (y,x))

Die Relation ist **transitiv**, d.h. aus (x,y)∈**R** und (y,z)∈**R** folgt (x,z)∈**R**, d.h. **R∘R⊂R**

R∘R bezeichnet das Produkt (oder die Komposition) zweier Relationen,

vgl. Def.3.1.3 in Dörfler, Peschek:

$R\circ R=\{(x,z)\mid x\in R\wedge z\in R\wedge\exists y\in M:(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\}$,

man schreibt auch:

$x(R\circ R)z \Leftrightarrow \exists y\in M: xRy\wedge yRz$

Die Relation ist **nicht reflexiv**, d.h. es gilt nicht

$(x,x)\in R\ \forall x\in M$

Damit ist **R keine Äquivalenzrelation**!

Aufgabe 04*:

Bezüglich der beiden zweistelligen mengentheoretischen Operationen $\times$ und $\cap$ lassen sich zwei verschiedene Distributivgesetze formulieren.

a) Wie lauten diese Formulierungen?

b) Das eine dieser beiden Gesetze gilt tatsächlich, das andere nicht. Welches der beiden gilt?

Verdeutlichen Sie sich dabei die Beziehung in einem kartesischen Koordinatensystem

anhand der drei Mengen A=[2;4], B=[1;4], C=[3;6]!

Lösung:

a) $(A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$ bzw. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

b) Die erste Beziehung gilt nicht, da $(A\times B)\cap C$ nicht definiert ist.

$A\cap B=A$, $A\times C=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in C\}$, $B\times C=\{(x,y)\mid x\in B\wedge y\in C\}$

Aufgabe 05:

Betrachtet werde die Relation **R**$=\{(x,y)\mid x+y$ gerade$\}$ in **Z**. Zeigen Sie, dass **R** eine **Äquivalenzrelation** ist!

In welche Mengen wird **Z** durch diese Relation zerlegt?

Ist auch die Relation **R**$=\{(x,y)\mid x+y$ ungerade$\}$ eine Äquivalenzrelation?

Lösung:

Z$=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

a) Relation **R**$=\{(x,y)\mid x+y$ gerade$\}$ in **Z**

symmetrische Relation: $x+y$ gerade <=> $y+x$ gerade

reflexive Relation: $x+x$ gerade

transitive Relation: $x+y$ gerade $\wedge$ $y+z$ gerade => $x+z$ gerade damit ist **R** eine **Äquivalenzrelation,** da sie gleichzeitig symmetrisch, reflexiv und transitiv ist.

Z wird durch **R** in die **Menge der geraden** und die **Menge der ungeraden** Zahlen zerlegt.

(die geraden Zahlen sind bezüglich **R** "äquivalent", ebenso die ungeraden Zahlen bezüglich **R** "äquivalent")

b) Relation **R**={(x,y)|x+y ungerade} in **Z**

symmetrische Relation: x+y ungerade <=> y+x ungerade

keine reflexive Relation: x+x ist nicht ungerade

keine transitive Relation: x+y ungerade $\wedge$ y+z ungerade => x+z nicht ungerade

damit ist **R** keine **Äquivalenzrelation,** da sie weder reflexiv noch transitiv ist.

Aufgabe 06:

Die Operation ggt(x,y) in $\mathbf{N}^+$ ist offenbar kommutativ und idempotent, außerdem ist sie assoziativ.

a) Um welche algebraische Struktur handelt es sich mithin bei $[N^+; ggt]$?

b) Besitzt diese Struktur ein neutrales Element?

Lösung:

a) Die binäre Operation ist

kommutativ: $ggt(x,y)=ggt(y,x)$, d.h. Reihenfolge der Operanden kann vertauscht werden

idempotent: $ggt(x,x)=x$, d.h. $\forall x \in N^+$ ist x der ggt des Paares (x,x)

assoziativ: $ggt(ggt(x,y),z)=ggt(x,ggt(y,z))$ (z.B. $ggt(60,24)=12, ggt(12,39)=3$, $ggt(12,3)=ggt(60,39)$ usw.)

Es handelt sich bei $[N^+; ggt]$ um eine **Halbgruppe H**, da die binäre Operation assoziativ ist.

Kurz: **H=**$[N^+; ggt]$, vgl. Dörfler, Peschek (1988), S. 106 Def. 6.1.2 Halbgruppe (engl. semigroup)

Darüber hinaus ist diese **Halbgruppe kommutativ und idempotent.**

(vgl. Def. 6.1.4: kommutative Halbgruppe)

b) neutrales Element würde bedeuten $\forall x,y \in N^+ \ \exists e \in N^+$:

ggt(e,y)=y bzw. ggT(x,e)=x

Ein solches Element e existiert nicht.

Bem.: https://de.wikipedia.org/wiki/Idempotenz

In der Informatik wird Idempotenz von Recovery-Maßnahmen bei Datenbanken und Diensten gefordert, um Fehlertoleranz bei einem Absturz während einer Wiederanlaufphase zu gewährleisten. Undo- und Redo-Operationen müssen hier auch bei mehrfacher Hintereinanderausführung dasselbe Resultat zur Folge haben.

Rein lesende Services sind von Natur aus idempotent, da der Zustand der Daten nicht geändert wird.

Beispiel:

Bei einem Service zum Verbuchen von Geldbeträgen ist der Aufruf **einzahlen(100)** nicht idempotent, da bei mehrmaligem Service-Aufruf der Betrag 100 mehrmals eingezahlt wird. Würde man hingegen **neuerKontostand(600)** aufrufen, so würde bei mehrmaligem Service-Aufruf der Kontostand gleich bleiben. Dieser Aufruf wäre idempotent.

Dörfler, Peschek (1988), S. 126u. **Körper:**

Ein Körper ist ein Ring, wobei die von Null verschiedenen Elemente eine kommutative Gruppe bilden.

Aufgabe 07:

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbf{N}$ den Wert des Terms

$15^{4k}(17)$!

(vgl. auch Dörfler, Peschek (1988):

Kap. 1.6 Stellenwertsysteme,

Kap. 1.7 Zahlendarstellung am Computer,

Kap. 1.8 Elementare Begriffe der Zahlentheorie)

Lösung: $15^{4k}(17)$ bedeutet $15^{4k}(\mathrm{mod}17)$, gesucht ist der ganzzahlige Rest bei Division durch 17:

liste:=seq($(15^{4k}$, k, 0, 5, 1)

{1, 50625, 2562890625, 129746337890625, 6568408355

liste/17

$\left\{\frac{1}{17}, \frac{50625}{17}, \frac{2562890625}{17}, \frac{129746337890625}{17}, \frac{6568408}{}\right.$

approx(ans)

{0.05882352941, 2977.941176, 150758272.1, 7.63213

fRound(ans, 0)

{0, 2978, 150758272, 7632137522978, 38637696210075

17*ans

{0, 50626, 2562890624, 129746337890626, 6568408355

liste−ans

{1, −1, 1, −1, 46819, 1325095531}

Vermutung:

Das **kleinste nichtnegative Restsystem** ist {1;16}

das **absolut kleinste Restsystem** ist {−1;1}

vgl. Dörfler, Peschek (1988) S. 22

k=0: 15^{4k}(mod17)≡1(mod17)

k=1:

15^{4k}(mod17)=50625(mod17)=2977*17+16(mod17)≡16(

denn

15^{4*1}−2977*17

16

k=2:

15^{4k}(mod17)=2562890625(mod17)=150758272*17+1(m

denn

$15^{4*2}-150758272*17$

1

k=3:

15^{4k}(mod17)=129746337890625(mod17)=76321375229

denn

$15^{4*3}-7632137522977*17$

16

k=4:

15^{4k}(mod17)=6568408355712890625(mod17)≡1(mod17

denn

$(15^{4*4}-1)/17$

386376962100758272

$(15^{4*5}-16)/17$

1956033370635088752297

$(15^{4*5}+1)/17$

1956033370635088752298

usw.

$(15^{4*8}-1)/17$

2537881666317583500241503996007582 72

$(15^{4*9}+1)/17$

128480259357327664688722613979788387522978

allgemein:

k=2n gerade: $15^{4*2n}-1$ ist durch 17 teilbar (ohne Rest)

k=2n+1 ungerade: $15^{4*(2n+1)}+1$ ist durch 17 teilbar

(ohne Rest)

Beweis:

seq($(15^{4*2n}-1)$/17, n, 0, 10, 1)

{0, 150758272, 386376962100758272, 99024189388401▸

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 150758272 \\ 386376962100758272 \\ 990241893884013680850758272 \\ 2537881666317583500024150399600758272 \\ 6504313129964713024866582332726787118350758272 \\ 166698431428509695922459557363361133919919238 \\ 427229847110332857401272326508207968612730516 \\ 109494336987925542086318270867982518830786129 \\ 280622009756945110011068037173763010175307733 \\ 719203517974733151086959918709788714750075795 \end{bmatrix}$$

frac(matToList(ans, 1))

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

seq($(15^{4*(2n+1)}+1)$/17, n, 0, 10, 1)

{2978, 7632137522978, 19560333706350887522978, 50▸

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix} 2978 \\ 7632137522978 \\ 19560333706350887522978 \\ 5013099587787819259306963752 2978 \\ 128480259357327664688722613979788387522978 \\ 329280852204463596883870730594293597866507137\ldots \\ 843910809106830335607451509152015740469591144\ldots \\ 216285110099606009059394115294780284110194824\ldots \\ 554315081001373056811986246269161501580854781\ldots \\ 142064892439453461943103193819217523901249539\ldots \\ 364096780974708657737773458846830536842225871\ldots \end{bmatrix}$$

frac(matToList(ans,1))

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

□

$15^{4*2n}=17q_0+1$ und $15^{4*(2n+1)}=17q_1-1$

vollständiger Beweis: (vollständige Induktion)

$15^{4*(2n+2)}\equiv 15^{4*2n}$ (mod 17) ergibt

$15^{4*(2n+2)}-15^{4*2n}\equiv 0$ (mod 17), denn

$15^{4*(2n+2)}-15^{4*2n}=15^{4*2n+8}-15^{4*2n}=15^{4*2n}*(15^8-$

und 15^8-1 ist durch 17 teilbar:

$(15^8-1)/17$

150758272

$15^{4*(2n+1)}\equiv 15^{4*(2n-1)}$ (mod 17) ergibt

$15^{4*(2n+1)}-15^{4*(2n-1)}\equiv 0$ (mod 17), denn

$15^{4*(2n+1)}-15^{4*(2n-1)}=15^{4*(2n-1+2)}-15^{4*(2n-1)}=$

und 15^8-1 ist durch 17 teilbar, s.o.

Zusammenfassung: 15^{4k} (mod17) $\equiv(-1)^k$ (mod 17)

Aufgabe 08:

Lösen Sie die (linearen) Kongruenzen $2x \equiv 1(7)$, $2x \equiv 1(8)$ und $2x \equiv 2(8)$!

Lösung:

$2x \equiv 1(7)$, $2x \equiv 1(8)$ und $2x \equiv 2(8)$ bedeutet $2x \equiv 1 \pmod 7$, $2x \equiv 1 \pmod 8$ und $2x \equiv 2 \pmod 8$

(vgl. Dörfler, Peschek (1988) S. 22 Satz 1.8.6)

vgl. auch

lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-7.pdf

zu: $2x \equiv 1 \pmod 7$

eine Lösung ist z.B. $x=4$

allgemeine Lösung dann

$x=4+7k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Lösung als Restklasse: $x \equiv 4 \pmod 7$

zu: $2x \equiv 1(8)$ hat keine Lösung!

$2x=1+8k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist nicht möglich.

zu: $2x \equiv 2 \pmod 8$ bedeutet $x \equiv 1 \pmod 4$ (Kürzungsregel)

$x=1+4k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

$x \equiv 1 \pmod 4$

Aufgabe 09:

Für die folgende Aufgabe wird jeweils das **Repräsentantensystem** $\{0, ..., m-1\}$ bzgl. der Restklassen modulo m zugrundegelegt.

Berechnen Sie alle Produkte $3x$ (also $3 \cdot 0$, $3 \cdot 1$ usw.), jeweils für den Modul $m=6$ und den Modul $m=8$!

Welchen qualitativen Unterschied stellen Sie fest? Worin ist er begründet?

Dörfler, Peschek (1988) S. 21 u. Def. 1.8.5:
vollständiges Restsystem R aller Restklassen
$r \in \mathbf{R} = \{0, ..., m-1\}$
vgl. auch:
lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-4.pdf
lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-7.pdf

Lösung:

a) m=6 ergibt
$3x \equiv 0 \pmod 6$ entspricht $x \equiv 0 \pmod 2$, d.h. $x=2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$3x \equiv 1 \pmod 6$ entspricht $3x=1+6k$, $k \in \mathbb{Z}$
x muss ungerade sein:
seq((3x-1)/6,x,1,25,2)

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{16}{3}, \frac{19}{3}, \frac{22}{3}, \frac{25}{3}, \frac{28}{3}, \frac{31}{3}, \frac{34}{3}, \frac{37}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 1 tritt nicht auf.

$3x \equiv 2 \pmod 6$ entspricht $3x=2+6k$, $k \in \mathbb{Z}$
x muss gerade sein:
seq((3x-2)/6,x,2,26,2)

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}, \frac{20}{3}, \frac{23}{3}, \frac{26}{3}, \frac{29}{3}, \frac{32}{3}, \frac{35}{3}, \frac{38}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 2 tritt nicht auf.

$3x \equiv 3 \pmod 6$ entspricht $x \equiv 1 \pmod 2$, d.h. $x=2k+1$,

$k \in \mathbb{Z}$

$3x \equiv 4 \pmod{6}$ entspricht $3x = 4 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$

x muss gerade sein:

seq((3x−4)/6,x,2,26,2)

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{16}{3}, \frac{19}{3}, \frac{22}{3}, \frac{25}{3}, \frac{28}{3}, \frac{31}{3}, \frac{34}{3}, \frac{37}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 4 tritt nicht auf.

$3x \equiv 5 \pmod{6}$ entspricht $3x = 5 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$

x muss ungerade sein:

seq((3x−1)/6,x,1,25,2)

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{16}{3}, \frac{19}{3}, \frac{22}{3}, \frac{25}{3}, \frac{28}{3}, \frac{31}{3}, \frac{34}{3}, \frac{37}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 5 tritt nicht auf.

Ergebnis: Es treten nur die Restklassen {0,3} auf bei $x \in \mathbb{Z}$

b) m=8 ergibt

$3x \equiv 0 \pmod{8}$ bedeutet $x \equiv 0 \pmod{8}$, d.h. $x = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$, und $x \in \{\ldots, 0, 8, 16, 24, 32, \ldots\}$

seq((8k+0)/3,k,0,10,1)

$$\left\{0, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, 8, \frac{32}{3}, \frac{40}{3}, 16, \frac{56}{3}, \frac{64}{3}, 24, \frac{80}{3}\right\}$$

$3x \equiv 1 \pmod{8}$ bedeutet $3x - 1 \equiv 0 \pmod{8}$, d.h. $3x - 1 = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$,

und x ungerade: x=(8k+1)/3

seq((8k+1)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{1}{3}, 3, \frac{17}{3}, \frac{25}{3}, 11, \frac{41}{3}, \frac{49}{3}, 19, \frac{65}{3}, \frac{73}{3}, 27\right\}$$

x=3+8k, k∈**Z**

3x≡2(mod 8) bedeutet 3x−2≡0(mod 8), d.h. 3x−2=8k, k∈**Z**,

und x gerade: x=(8k+2)/3

seq((8k+2)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 6, \frac{26}{3}, \frac{34}{3}, 14, \frac{50}{3}, \frac{58}{3}, 22, \frac{74}{3}, \frac{82}{3}\right\}$$

x=6+8k, k∈**Z**

3x≡3(mod 8) bedeutet 3x−3≡0(mod 8), d.h. 3x−3=8k, k∈**Z**,

3x−3=3(x−1) und x ungerade: x=x=(8k+3)/3=1+8k/3

seq((8k+3)/3,k,0,10,1)

$$\left\{1, \frac{11}{3}, \frac{19}{3}, 9, \frac{35}{3}, \frac{43}{3}, 17, \frac{59}{3}, \frac{67}{3}, 25, \frac{83}{3}\right\}$$

x=9+8k, k∈**Z**

3x≡4(mod 8) bedeutet 3x−4≡0(mod 8), d.h. 3x−4=8k, k∈**Z**,

und x gerade: x=(8k+4)/3

seq((8k+4)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{4}{3}, 4, \frac{20}{3}, \frac{28}{3}, 12, \frac{44}{3}, \frac{52}{3}, 20, \frac{68}{3}, \frac{76}{3}, 28\right\}$$

x=12+8k, k∈Z

Vermutung: x=3j+8k, j,k∈**Z**

seq((8k+5)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{5}{3},\frac{13}{3},7,\frac{29}{3},\frac{37}{3},15,\frac{53}{3},\frac{61}{3},23,\frac{77}{3},\frac{85}{3}\right\}$$

seq((8k+6)/3,k,0,10,1)

$$\left\{2,\frac{14}{3},\frac{22}{3},10,\frac{38}{3},\frac{46}{3},18,\frac{62}{3},\frac{70}{3},26,\frac{86}{3}\right\}$$

seq((8k+7)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{7}{3},5,\frac{23}{3},\frac{31}{3},13,\frac{47}{3},\frac{55}{3},21,\frac{71}{3},\frac{79}{3},29\right\}$$

Ergebnis: Es treten alle Restklassen {0,1,2,...,7} auf bei x∈Z

Beweis zu b)

3x≡j(mod 8) bedeutet

3x≡j(mod 8)≡8j+j(mod 8)≡9j+3*8k(mod 8)

≡3*(3j+8k)(mod 8), d.h. x=3j+8k, j,k∈Z, d.h. x∈Z

c) Unterschiede:

in b) ist das **Repräsentantensystem** vollständig {0,1,2,...,7}, in a) unvollständig auf {0,3} begrenzt, da der Rest die Form j=3i, i∈Z, hat.

Beweis zu a)

3x≡j(mod 6) bedeutet

3x≡j(mod 6)≡6j+j(mod 6)≡7j+3*6k(mod 6)

≡7*3i+3*6k(mod 6)≡3*(7i+6k)(mod 6),

d.h. der Rest hat die Form j=3i, i∈Z,

Repräsentantensystem reduziert sich auf {0,3}

x=i+6k, i,k∈Z, d.h. x∈Z

Aufgabe 10*:

Zeigen Sie, dass die Zahlen der Form $x+\sqrt{2}y$ mit $x,y\in\mathbb{Z}$ bzgl. der "normalen" Multiplikation eine Halbgruppe mit neutralem Element bilden! Bilden sie auch eine Gruppe?

Lösung:

multiplikative Halbgruppe **H** mit dem Assoziativgesetz:

$a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

denn

$a:=x_1+\sqrt{2}y_1$

$$x_1+\sqrt{2}\cdot y_1$$

$b:=x_2+\sqrt{2}y_2$

$$x_2+\sqrt{2}\cdot y_2$$

$c:=x_3+\sqrt{2}y_3$

$$x_3+\sqrt{2}\cdot y_3$$

$a\cdot b\cdot c$

$$(x_1+\sqrt{2}\cdot y_1)\cdot(x_2+\sqrt{2}\cdot y_2)\cdot(x_3+\sqrt{2}\cdot y_3)$$

expand(ans)

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3+\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_3+\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_3\cdot y_2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot y_3+\sqrt{2}\cdot x_2\cdot x_3\cdot y_1+2\cdot$$

$\text{ans}-(x_1\cdot x_2\cdot x_3+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot y_3+2\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_3+2\cdot x_3\cdot y_1\cdot y_2)$

$$\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_3+\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_3\cdot y_2+\sqrt{2}\cdot x_2\cdot x_3\cdot y_1+2\cdot\sqrt{2}\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3$$

factorOut(ans, $\sqrt{2}$)

$$\sqrt{2}\cdot(x_1\cdot x_2\cdot y_3+x_1\cdot x_3\cdot y_2+x_2\cdot x_3\cdot y_1+2\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)$$

somit

$a\cdot b\cdot c=(x_1\cdot x_2\cdot x_3+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot y_3+2\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_3+2\cdot x_3\cdot y_1\cdot y_2)+\sqrt{2}\cdot(x_1\cdot x$

neutrales Element: $e=1+\sqrt{2}\cdot 0$

Gruppe:

vgl. Dörfler, Peschek (1988), S. 114, Def. 6.2.1

sei $M=\{x+\sqrt{2}y \mid x, y\in Z\}$ und $H=(M, \cdot)$

H ist assoziativ und es gibt ein neutrales Element,

ges. **inverses Element** $z^{-1}=x_1+\sqrt{2}y_1\in M$ zu $z=x_0+\sqrt{2}y_0$

mit $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=e=1+\sqrt{2}\cdot 0$

$(x_1+\sqrt{2}y_1)\cdot(x_0+\sqrt{2}y_0)=1+\sqrt{2}\cdot 0$ ergibt

$(x_1+\sqrt{2}y_1)\cdot(x_0+\sqrt{2}y_0)$

$$(x_0+\sqrt{2}\cdot y_0)\cdot(x_1+\sqrt{2}\cdot y_1)$$

simplify(ans)

$$\sqrt{2}\cdot(x_0\cdot y_1+x_1\cdot y_0)+x_0\cdot x_1+2\cdot y_0\cdot y_1$$

hieraus:

$x_0\cdot x_1+2\cdot y_0\cdot y_1=1$ und $x_0\cdot y_1+x_1\cdot y_0=0$

$$\left.\begin{cases} x_0\cdot x_1+2\cdot y_0\cdot y_1=1 \\ x_0\cdot y_1+x_1\cdot y_0=0 \end{cases}\right|_{x_1, y_1}$$

$$\left\{x_1=\frac{x_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}, y_1=\frac{-y_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}\right\}$$

im Allgemeinen sind $\frac{x_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}\notin Z$, $\frac{-y_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}\notin Z$,

damit ist H keine Gruppe.

Aufgabe 11:

Gegeben seien $z_1=-\sqrt{3}+3\boldsymbol{j}$, $z_2=1-\boldsymbol{j}$.

a) Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$ in arithmetischer Form!

b) Stellen Sie z_1 und z_2 in Exponentialform dar, berechnen Sie damit wiederum den Quotienten und leiten Sie daraus die arithmetische Form ab!

Lösung:

$z_1 := -\sqrt{3} + 3\boldsymbol{j}$

$$-\sqrt{3}+3\cdot\boldsymbol{j}$$

$z_2 := 1 - \boldsymbol{j}$

$$1-\boldsymbol{j}$$

a)

$\frac{z_1}{z_2}$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\boldsymbol{j}}{2}\right)\cdot(\sqrt{3}-3\cdot\boldsymbol{j})$$

cExpand(ans)

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\boldsymbol{j}$$

b)

w_1:=compToPol(z_1)

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot\boldsymbol{e}^{\frac{\pi\cdot 2\cdot\boldsymbol{j}}{3}}$$

w_2:=compToPol(z_2)

$$\sqrt{2}\cdot\boldsymbol{e}^{\pi\cdot\frac{-\boldsymbol{j}}{4}}$$

q:=compToPol$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$

$$\sqrt{6}\cdot\boldsymbol{e}^{\frac{\pi\cdot 11\cdot\boldsymbol{j}}{12}}$$

re(q)

$$\frac{-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}{2}$$

a:=simplify(ans)

$$\frac{-(\sqrt{3}+3)}{2}$$

im(q)

$$\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}$$

b:=simplify(ans)

$$\frac{-\sqrt{3}+3}{2}$$

a+b$\boldsymbol{j}$

$$\frac{-(\sqrt{3}+3)}{2}+\frac{(-\sqrt{3}+3)\cdot \boldsymbol{j}}{2}$$

Aufgabe 12:

Berechnen Sie $\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}$ für a∈**R** bzw. a∈**C**!

Lösung:

für a∈**R** ergibt sich

cExpand$\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\right)$

$$-\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\right)\cdot \boldsymbol{j}$$

simplify(ans)

$$-\boldsymbol{j}$$

für a∈**C** ergibt sich

cExpand$\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,|\,a=a_1+a_2\boldsymbol{j}\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

z.B.

cExpand$\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,|\,a=-2\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

cExpand$\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,|\,a=5\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

$\mathrm{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,\middle|\, a=-2+3\boldsymbol{j}\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

$\mathrm{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,\middle|\, a=0\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

Aufgabe 13:

Geben Sie für die folgenden Terme jeweils die Zerlegung in Linearfaktoren über **C** an!

$T_1=3x^2+12x+39 \quad T_2=x^2-6x+a,\ a\in\mathbf{R}.$

Lösung:

TR–Grundeinstellungen: Algeb Standard Kplx 2π

$\mathrm{rFactor}(3x^2+12x+39)$

$$3\cdot(x+2+3\cdot\boldsymbol{j})\cdot(x+2-3\cdot\boldsymbol{j})$$

$\mathrm{solve}(x^2-6x+a=0)$

$$\{x=-\sqrt{-a+9}+3,\ x=\sqrt{-a+9}+3\}$$

$\mathrm{rFactor}(x^2-6x+a \mid a=9)$

$$(x-3)^2$$

Fallunterscheidung:

$a<9$ ergibt die **reelle** Faktorisierung

$(x-(\sqrt{-a+9}+3))(x-(-\sqrt{-a+9}+3))$

$$(x+\sqrt{-a+9}-3)\cdot(x-\sqrt{-a+9}-3)$$

simplify(ans)

$$x^2-6\cdot x+a$$

$a>9$ ergibt die **komplexe** Faktorisierung

$\sqrt{-a+9}+3=3+\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}$ und $-\sqrt{-a+9}+3=3-\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}$

$(x-(3+\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}))(x-(3-\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}))$

$$(x+\sqrt{a-9}\cdot j-3)\cdot(x-\sqrt{a-9}\cdot j-3)$$

simplify(ans)

$$x^2-6\cdot x+a$$

Aufgabe 14:

Gegeben seien folgende Vektoren aus $\mathbf{R}^3$:

$x_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_3 := \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sind die Vektoren x_1, ..., x_4 linear unabhängig? Bildet

$\{x_1, x_3, x_4\}$ eine Basis von $\mathbf{R}^3$?

Lösung:

vier Vektoren im $\mathbf{R}^3$ sind stets linear abhängig.

M:=augment(augment(x_1, x_3), x_4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

det(M)

$$0$$

$\{x_1, x_3, x_4\}$ bilden keine Basis von R^3, da sie linear abhängig sind.

Man erkennt unschwer: $x_1=$

$-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}x_4$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 15:

Gegeben seien folgende Vektoren:

$x_1:=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2:=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_3:=\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a) Begründen Sie sowohl rechnerisch als auch graphisch, dass die Vektoren x_1 und x_2 eine Basis von $\mathbf{R}^2$ bilden!

b) Stellen Sie unter Verwendung des Basisaustauschverfahrens x_3 als Linearkombination von x_1 und x_2 dar!

Lösung:

a)

M:=augment(x_1, x_2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

det(M)

$$6$$

det(M)$\neq$0 bedeutet lineare Unabhängigkeit.

alternativ:

Die Abhängigkeitsbeziehung $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hat nur die triviale Lösung a=b=0.

graphisch:

angle(x_1, x_2)

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

approx(ans)

$$71.56505118$$

Die Vektoren schliessen einen Winkel von ca. 71,6° ein.

b) Ansatz $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = x_3$

solve($a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = x_3$, {a, b})

$\{a=3, b=2\}$

$a \cdot x_1 + b \cdot x_2$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a+b \\ 3 \cdot b \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ergibt:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie die Produkte **AB** bzw. **ABCD** für

a)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$A \cdot B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -19 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -1 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -1 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$A \cdot B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & 1 \\ 17 & -12 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

c)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B := \mathrm{trn}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$A \cdot B \cdot C \cdot D$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 17:

Gegeben seien

$$x:=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$y:=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $x^T y$, xy^T und xy!

Lösung:

trn(x)•y

[7]

x•trn(y)

$$\begin{bmatrix}6 & -3 & 3\\2 & -1 & 1\\4 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

Skalarprodukt:

dotP(x,y)

7

Aufgabe 18:

Berechnen Sie

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}!$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -12 \\ -7 & 9 & 32 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 19:

Lösen Sie die Matrizengleichung **X=AX+B**

a) allgemein

b) für $A=\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$!

Lösung:

a) **X=AX+B** ergibt

EX−AX=B, (E−A)X=B

und somit

$\mathbf{X=(E-A)^{-1}B}$ mit $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b)

$$A:=\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B:=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$X := (E-A)^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} 2 & -9 & 4 \\ 2 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 20:

a) Welcher Schluß läßt sich über den Rang einer Matrix (ungleich **N**) des Typs (17,4) ziehen, wenn offensichtlich die 3. Spalte Vielfaches der 1. Spalte, nicht aber der 4. Spalte ist?

b) Was ändert sich, wenn bei gleichem Typ dieser Sachverhalt nicht für die Spalten, sondern für die Zeilen gilt?

Lösung:

a) Es liegt keine Nullmatrix N vor, d.h. Rang≥1.
Der maximal mögliche Rang ist 4
(Rang=Zeilenrang=Spaltenrang≤min(17,4)), d.h. Rang≤4.
1. und 3. Spalte sind linear abhängig, d.h. Rang≤3
(Rang verkleinert sich)
3. Spalte kein Vielfaches der 4. Spalte, d.h. Rang≥2
(mindestens 2 unabhängige Spalten)

b) Wegen Zeilenrang=Spaltenrang das gleiche Ergebnis wie vorher.

Aufgabe 21:

Untersuchen (nicht: berechnen!) Sie mittels des Basisaustauschverfahrens, ob die Matrix

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ regulär ist! Welche (wichtige) Frage ist damit gleichbedeutend?

Bem.: **Basisaustauschverfahren = Pivotverfahren**

Austauschverfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung!

Anzahl der möglichen Austauschschritte = Rang

Lösung:

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

rank(A)

3

Die Matrix ist singulär, da sie nicht den vollen Rang 4 erreicht.

det(A)

0

Die quadratische Matrix hat die Determinante 0, d.h. sie ist singulär.

Die Matrix hat 3 lin. unabhängige Spalten (bzw. Zeilen):

Abhängigkeitsbeziehung:

$a\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ untersuchen auf nichttriviale Lösungen.

$$a\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}+d\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a+2\cdot c-d\\-2\cdot a-b+d\\b+2\cdot c\\4\cdot a+2\cdot c-3\cdot d\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a+2\cdot c-d=0\\-2\cdot a-b+d=0\\b+2\cdot c=0\\4\cdot a+2\cdot c-3\cdot d=0\end{cases}\Bigg|_{a,b,c,d}$$

$$\left\{a=\frac{2\cdot d}{3},\ b=\frac{-d}{3},\ c=\frac{d}{6},\ d=d\right\}$$

ans | d=1

$$\left\{a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{1}{6},\ 1=1\right\}$$

$$a\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}\ \Big|\ \left\{a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{1}{6}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

d. h. $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}=$

$$-a\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}-b\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}-c\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix} \mid \left\{a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{6}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

andere Untersuchung: (reduced) row echelon form – (normierte) Zeilenstufenform

ref(A)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & -4 & 1\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

rref(A)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nutzung des bereits programmierten Austauschverfahrens in Einzelschritten mit Vorauswahl des Pivots:

Programmstart: **AVRank(Matrix, Pivotrow, Pivotcol)**

A

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\-2 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & 0\\4 & 0 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

AVRank(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

AVRank(A1,1,1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

AVRank(A2,1,1)

done

A3:=matnew

[0]

Es konnten 3 Austauschschritte durchgeführt werden:

Rg(A)=3

Aufgabe 22:

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sowie das Spatprodukt von $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$!

Lösung:

$$\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$$

$$-323$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}\right)$$

$$-323$$

Aufgabe 23:

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

a) Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise an!

b) Welche Aussagen über die Lösbarkeit des Gleichungssystems lassen sich allein aufgrund seiner Form (d.h. Anzahl Variablen und Gleichungen) treffen?

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels des Basisaustauschverfahrens! Beginnen Sie den Algorithmus an der Position (1,1) der Koeffizientenmatrix! Geben Sie die Lösung in vektorieller Form an!

d) Gibt es eine Lösung, bei der $x_2 = -2x_3$ gilt? Wenn ja, geben Sie sie an, wenn nein, begründen Sie dies!

Lösung:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ sind lin. abhängig (1. und 4. Spalte)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ sind lin. abhängig (2. und 3. Spalte)

1. und 2. Spalte sind lin. unabhängig, d.h.

$\mathrm{Rg}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$

rechte Seite $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ lin. abhängig von 2. Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,

d.h. LGS ist lösbar!

z.B. $x_1=x_3=x_4=0$ und $x_1=3$ ist eine Lösung des LGS

Wegen Rang=2 gibt es 2 Austauschschritte und damit sind noch zwei nicht ausgetauschte Variablen frei wählbar.

Das LGS hat damit eine mehrdeutige Lösung mit 2 frei wählbaren Parametern.

c) Nutzung des Programms **LinEqSys(Matrix, PZeile, PSpalte)** im Einzelschrittverfahren:

$$M:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Starttabelle mit negativer rechter Seite (1-Spalte)

$$A:=\text{augment}\left(M,-\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1, 2, 1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Endtabelle} \begin{bmatrix} \text{ET} & x_3 & x_4 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & -2 & 0 & 3 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sei $x_3=s$ und $x_4=t$, dann $x_1=t$ und $x_2=-2s+3$.

Probe:

$$M\cdot\begin{bmatrix} t \\ -2s+3 \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2\cdot(2\cdot s-3)-4\cdot s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Alternativ:

$$\left.\begin{cases} x_1+\ x_2+2x_3-\ x_4=\ 3 \\ -2x_1+\ x_2+2x_3+2x_4=\ 3 \\ -2x_1-2x_2-4x_3+2x_4=-6 \\ 0=0 \end{cases}\right|_{x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4}$$

$$\{x_1=x_4,\ x_2=-2\cdot x_3+3,\ x_3=x_3,\ x_4=x_4\}$$

Lösung in vektorieller Form:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad s,t\in\mathbf{R}.$$

d) $x_2=-2\cdot x_3$ ist nicht möglich, da $x_2=-2\cdot x_3+3$ für die Lösung erforderlich ist.

Aufgabe 24:

Lösen Sie mittels des Basisaustauschverfahrens das Gleichungssystem

$x+\quad 2z\ =\ -1$

$-2x-y \quad = \quad 0$

$3x+y+2z = -1$

Geben Sie die Lösung vektoriell an! Ermitteln Sie (daraus) alle Lösungen, für die $|z| = 2$ gilt!

Lösung:

Matrixform $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Das LGS ist lösbar, da rechte Seite $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ lin. abhängig von 3.Spalte ist (z.B. x=y=0 und z=-0.5)

Starttabelle für Austauschverfahren:

$$A:=\text{augment}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A,1,1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1,2,1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: Endtabelle $\begin{bmatrix} ET & z & 1 \\ x & -2 & -1 \\ y & 4 & 2 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$z=s$, $x=-2s-1$, $y=4s+2$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2\cdot(2\cdot s+1)-4\cdot s-2 \\ -3\cdot(2\cdot s+1)+6\cdot s+2 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid s=2$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$s\cdot\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\,|\,s=-2$$

$$\begin{bmatrix}3\\-6\\-2\end{bmatrix}$$

Aufgabe 25:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+2y \quad &= 3 \\ y+3z &= 4 \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems anhand des Lösbarkeitskriteriums!

b) Fügen Sie (auf möglichst einfache Weise) eine dritte Gleichung hinzu, so dass das dann entstehende System **nicht** lösbar ist! (Begründung!)

c) Was ergäbe sich für a) und b), wenn es sich um homogene Gleichungssysteme (bei gleicher linker Seite) handeln würde?

Lösung:

a) Matrixform $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

Das LGS ist lösbar, da rechte Seite $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ lin. abhängig von den Spalten der Matrix ist (z.B. $x=y=z=1$)

oder: Rang der Matrix =2 sofort erkennbar, Rang der erweiterten Matrix ebenso =2

b) z.B. $y+3z=5$ als dritte Gleichung, dann 2. und 3. Gleichung widerspruchsvoll!

Matrixform $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$

c) ein hom. LGS ist stets lösbar (z.B. triviale Lösung)

Rechnung:

A:=augment$\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix},-\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\0 & 1 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

LinEqSys(A,1,1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\1 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1,2,1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix}6 & -5\\-3 & 4\end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix}\mathrm{ET} & z & 1\\x & 6 & -5\\y & -3 & 4\end{bmatrix}$

Rechnung:

A:=augment$\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 1 & 3\end{bmatrix},-\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\0 & 1 & 3 & -4\\0 & 1 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

LinEqSys(A,1,1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1,2,1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & z & 1 \\ x & 6 & -5 \\ y & -3 & 4 \\ y_3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Widerspruch in letzter Zeile:

$y_3=-1$ statt $y_3=0$

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) < \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}\right)$$

$2<3$

rechte Seite bewirkt Rangerhöhung!

Aufgabe 26:

Gegeben sei das Gleichungssystem mit $a,b,c\in\mathbb{R}$

$x+ay=1$

$bx+y=c$

Geben Sie anhand des Basisaustauschverfahrens und des Lösbarkeitskriteriums jeweils ein Beispiel und die allgemeinen Bedingungen dafür an, dass das Gleichungssystem

a) eindeutig lösbar

b) mehrdeutig lösbar

c) unlösbar ist (oder begründen Sie, dass der betrachtete Fall nicht auftreten kann)!

Lösung:

Matrixform $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$

a)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

$$-a \cdot b + 1 \neq 0$$

Matrix von vollen Rang =2.

$$A := \mathrm{augment}\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ b & 1 & -c \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -a & 1 \\ -a \cdot b + 1 & b - c \end{bmatrix}$$

2. Austauschschritt nur für $-a \cdot b + 1 \neq 0$ möglich.

b) $-a \cdot b + 1 = 0$ und $b - c = 0$, d.h.

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \mid b = 1/a\right)$$

$$1$$

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ b & 1 & -c \end{bmatrix} \mid b = 1/a \text{ and } c = 1/a\right)$$

$$1$$

Rang(Matrix)=Rang(erweiterte Matrix)<Maximalrang

c) Rang(Matrix)=1<Rang(erweiterte Matrix)=2, d.h.

$-a\cdot b+1=0$ und $b-c\neq 0$, vgl. Endtabelle in a)

Beispiele:

a) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$ mit a=b=2 und c=1

b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$ mit a=b=1 und c=1

c) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$ mit a=b=1 und c=2

Kontrolle:

a)

$$\begin{cases} x+a\cdot y=1 \mid a=2 \text{ and } b=2 \text{ and } c=1 \\ b\cdot x+y=c \mid a=2 \text{ and } b=2 \text{ and } c=1 \end{cases}\Bigg|_{x,y}$$

$$\left\{x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}\right\}$$

b)

$$\begin{cases} x+a\cdot y=1 \mid a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=1 \\ b\cdot x+y=c \mid a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=1 \end{cases}\Bigg|_{x,y}$$

$$\{x=-y+1, y=y\}$$

c)

$$\begin{cases} x+a\cdot y=1 \mid a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=2 \\ b\cdot x+y=c \mid a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=2 \end{cases}\Bigg|_{x,y}$$

No Solution

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) Wie lautet die zugehörige quadratische Form $Q = x^T\mathbf{S}x$

mit $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ explizit?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von **S**!

c) Bestimmen Sie einen normierten Eigenvektor, der zum betragsgrößten Eigenwert von **S** gehört!

d) Berechnen Sie die restlichen Eigenvektoren, und geben Sie die Transformationsmatrix **C** an!

(**Hinweis:** Beachten Sie die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte und eine daraus resultierende
Eigenschaft der Eigenvektoren! Überprüfen Sie diese Eigenschaft!)

Lösung: **S** ist eine symmetrische Matrix

a)

$$[x_1\ x_2\ x_3]\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot \mathrm{trn}([x_1\ x_2\ x_3])$$

$$[x_2^2+x_1\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_3)+2\cdot x_1\cdot x_3]$$

$$Q=x_2^2+x_1\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_3)+2\cdot x_1\cdot x_3$$

$$Q=x_2^2+x_1\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_3)+2\cdot x_1\cdot x_3$$

b)

$$\mathrm{eigVl}\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\{4, 1, -1\}$$

c)

$$\mathrm{eigVc}\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0.894427191 & 0 & -0.4472135955 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472135955 & 0 & 0.894427191 \end{bmatrix}$$

Eigenwertgleichung: $Ax=\lambda x$ bzw. $(A-\lambda\cdot E)\cdot x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\cdot \mathrm{trn}([x_1\ x_2\ x_3])$$

$$\begin{bmatrix} -x_1+2\cdot x_3 \\ -3\cdot x_2 \\ 2\cdot x_1-4\cdot x_3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -x_1+2\cdot x_3 \\ -3\cdot x_2 \\ 2\cdot x_1-4\cdot x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ergibt $x_2=0$ und $x_1=2\cdot x_3$, d.h.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix} 2\cdot x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)^2=1$$

$$5\cdot x_3^2=1$$

solve(ans, x_3)

$$\left\{x_3=\frac{-\sqrt{5}}{5}, x_3=\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$$

$x_1=$

$$2\cdot\left\{\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$$

$$\left\{\frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5}, \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\right\}$$

$$\text{approx}\left(\left\{\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}\right)$$

$$\{0.894427191, 0, 0.4472135955\}$$

d) Transformationsmatrix C aus normierten Eigenvektoren:

$$C:=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

approx(ans)

$$\begin{bmatrix} 0.894427191 & 0 & 0.4472135955 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472135955 & 0 & -0.894427191 \end{bmatrix}$$

$$\text{trn}(C)\cdot\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot C$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 28:

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme

a) Start mit Pivot a_{11}, d.h. $y_1 \leftrightarrow x_1$

$$ST:=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_3 & 1 \\ x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ y_3 & 0 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ widerspruchsfrei!

$x_3=s$, $x_1=s-1$, $x_2=s+1$, d.h.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s\in\mathbf{R}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(s\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2\cdot(s-1)-2\cdot s-1 \\ -2\cdot(s+1)+3\cdot(s-1)-s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b) Start mit Pivot a_{21}, d.h. $y_2 \leftrightarrow x_1$

$$ST:=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 2, 1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

nächstes Pivot (3, 3), d.h. $y_3 \leftrightarrow x_4$

LinEqSys(T1, 3, 3)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

nächstes Pivot (1,1), d.h. $y_1 \leftrightarrow x_2$

LinEqSys(T2,1,1)

done

T3:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_3 & 1 \\ x_2 & 1 & -2 \\ x_1 & -2 & 1 \\ x_4 & 2 & -2 \\ y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d.h.

$x_3=s, x_1=-2s+1, x_2=s-2, x_4=2s-2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad s\in\mathbf{R}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \left(s\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot(2\cdot s-1)+3\cdot(s-2)-2\cdot(2\cdot s-2)-3\cdot s \\ -2\cdot(2\cdot s-2)+4\cdot s-1 \\ -3\cdot(2\cdot s-1)+2\cdot(2\cdot s-2)+2\cdot s \\ 5\cdot(s-2)-4\cdot(2\cdot s-2)+3\cdot s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

c) Start mit Pivot a_{12}, d.h. $y_1 \leftrightarrow x_2$

$$ST:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST,1,2)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

weiter mit Pivot (2,1), d.h. $y_2 \leftrightarrow x_1$

LinEqSys(T1,2,1)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_3 & x_4 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 3 & 4 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_3=s$, $x_4=t$, $x_2=s+t+1$,

$x_1=s2+3t+4$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s, t \in R.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

$$\left\{ \begin{array}{l} b-c-d=1 \\ a-2c-3d=4 \\ a-b-c-2d=3 \\ 0=0 \end{array} \right|_{a, b, c, d}$$

$$\{a=2 \cdot c+3 \cdot d+4, b=c+d+1, c=c, d=d\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s, t \in R.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Für welche λ ist das LGS nichttrivial lösbar? Wie lauten die Lösungen?

$$ST:=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$-\lambda+10=0$$

nichttriv. Lösungen für $\lambda=10$

LinEqSys(ST,1,1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -9 & -6 & \lambda-4 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,2,2)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & \lambda-16 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T2, 3, 1)

done

T3:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ \lambda-10 & 0 \end{bmatrix}$$

ans | λ=10

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_4 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_3 & -2 & 0 \\ x_2 & 2 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_4=s$, $x_1=s$, $x_2=2s$, $x_3=-2s$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, **$s \in \mathbb{R}$.**

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda \end{bmatrix} \cdot s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s\cdot(\lambda-10) \end{bmatrix}$$

ans | λ=10

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 29:

Modell der Teileverflechtung (Verflechtungsdiagramm, zweistufiger Prozeß)

M→Z→E

M – Ausgangsmaterialien

Z – Zwischenprodukte

E – Endprodukte

Ausgehend von dem gezeigten Diagramm wissen wir, dass zur Herstellung von zwei Endprodukten $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ zwei Zwischenprodukte $\mathbf{Z_1, Z_2}$ benötigt werden, welche wiederum aus den Ausgangsmaterialien (Rohstoffe) $\mathbf{M_1}$ bis $\mathbf{M_3}$ zusammengesetzt werden können.

Materialfluss in Tabellenform:

$$\begin{bmatrix} \rightarrow & Z_1 & Z_2 \\ M_1 & 6 & 4 \\ M_2 & 3 & 0 \\ M_3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \rightarrow & E_1 & E_2 \\ Z_1 & 1 & 2 \\ Z_2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Wir stellen zuerst die **Bedarfsmatrix** $\mathbf{B_2}$ für die Herstellung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten auf:

$$B2:=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$$

Nehmen wir den Vektor $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}$ als Outputvektor (Warenproduktion) und $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$ als Inputvektor der Zwischenprodukte, so gilt ja $\mathbf{z}=\mathbf{B_2}\cdot\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\cdot\mathbf{w}$, d.h.

$z_1=1w_1+2w_2$, $z_2=1w_1+3w_2$,

Im nächsten Schritt bestimmen wir nun die **Bedarfsmatrix** $\mathbf{B_1}$ für die Produktion der Zwischenprodukte aus den Ausgangsmaterialien (Rohstoffen):

$$B1:=\begin{bmatrix}6 & 4\\3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$$

Für den Inputvektor **m** der Rohstoffe gilt in diesem Falle

$\mathbf{m}=\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{z}=\begin{bmatrix}6 & 4\\3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\cdot\mathbf{z}$, d.h. $m_1=6z_1+4z_2$, $m_2=3z_1+0z_2$,

$m_3=1z_1+2z_2$,

Natürlich kann man den Bedarf an Rohstoffen für einen bestimmten Auftrag auch direkt berechnen:

$\mathbf{m}=\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{B_2}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}$,

d.h.

$m_1=6(1w_1+2w_2)+4(1w_1+3w_2)=10w_1+24w_2$,

$m_2=3(1w_1+2w_2)+0(1w_1+3w_2)=\ 3w_1+\ 6w_2$,

$m_3=1(1w_1+2w_2)+2(1w_1+3w_2)=\ 3w_1+\ 8w_2$,

Symbolik:

m_i – Anzahl der Einheiten von M_i

z_j – Anzahl der Einheiten von Z_j

w_k – Anzahl der Einheiten von W_k

a) Wie viele Einheiten $\mathbf{M_i}$, i=1,2,3, werden für eine Einheit $\mathbf{E_j}$, j=1,2, benötigt?

$$\begin{array}{cc} \rightarrow & \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \end{array}$$

b) geg. sei die Warenproduktion $\mathbf{E_1}$=12 und $\mathbf{E_2}$=20, ges. der Materialbedarf.

Lösung:

a)

$$B1 := \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bedarfsmatrix B:

$B := B1 \cdot B2$

$$\begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \rightarrow & \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) geg. Warenproduktion **w**, ges. Materialbedarf **m**

$w:=\begin{bmatrix}12\\20\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}12\\20\end{bmatrix}$$

$m:=B\cdot w$

$$\begin{bmatrix}600\\156\\196\end{bmatrix}$$

im Einzelnen: $\mathbf{m=B_1\cdot z}$, $\mathbf{z=B_2\cdot w}$

$z:=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}12\\20\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}52\\72\end{bmatrix}$$

$m:=\begin{bmatrix}6 & 4\\3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}52\\72\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}600\\156\\196\end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 30:

Basiswechsel mittels Austauschverfahren

$$\begin{array}{ccc} b_1 \leftrightarrow e_1 & b_2 \leftrightarrow e_2 & \\ \begin{bmatrix}BV & b_1 & b_2 & d\\ e_1 & 1 & 2 & 7\\ e_2 & 0 & -1 & -2\\ K & * & -2 & -7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}BV & e_1 & b_2 & d\\ b_1 & 1 & -2 & -7\\ e_2 & 0 & -1 & -2\\ K & 0 & * & -2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}BV & e_1 & e_2 & d\\ b_1 & 1 & 2 & -3\\ b_2 & 0 & -1 & -2\\ K & & & \end{bmatrix}\end{array}$$

alte Basisdarstellung mit Basis $\{b_1, b_2\}$

$e_1=1b_1+2b_2+7$, $e_2=0b_1-1b_2-2$

ergibt neue Basisdarstellung mit Basis $\{e_1, e_2\}$

$b_1=1e_1+2e_2+4$, $b_2=0e_1-1e_2+2$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ergibt}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(- \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$ST := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 31:

Lösen Sie folgende LGS:

a) $x\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}-1\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\2.5\end{bmatrix}$

b) $x\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}-1\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}$

Lösung:

a)

$ST:=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\-1 & 0.5 & -2.5\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\-1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 2, 2)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & 5\end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix}ET & x & 1\\y_1 & 0 & 0\\y & 2 & 5\end{bmatrix}$, d.h. x=t, y=2t+5, $t\in\mathbf{R}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$

Probe:

$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 0.5\end{bmatrix}\cdot\left(t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix}-5\\\frac{2\cdot t+5}{2}-t\end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix}-5\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \mid t=-2.5$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \mid t=-5$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \mid t=0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \mid t=-2$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

$ST := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 2, 2)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix} ET & x & 1 \\ y_1 & 0 & 7 \\ y & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Widerspruch in 1.Zeile, d.h. keine Lösung.

Aufgabe Zusatz 32:

geg.: $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4$

mit $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_3+3\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_3+4\mathbf{a}_4$, $\mathbf{b}=5\mathbf{a}_3+6\mathbf{a}_4$

ges.: x_1, x_2, x_3, x_4

Lösung:

$\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4$ geht über in

$5\mathbf{a}_3+6\mathbf{a}_4=x_1(\mathbf{a}_3+3\mathbf{a}_4)+x_2(2\mathbf{a}_3+4\mathbf{a}_4)+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4$

d.h.

$5a_3+6a_4=x_1\cdot(a_3+3a_4)+x_2\cdot(2a_3+4a_4)+x_3\cdot a_3+x_4\cdot a_4$

$$5\cdot a_3+6\cdot a_4=x_2\cdot(2\cdot a_3+4\cdot a_4)+x_1\cdot(a_3+3\cdot a_4)+a_3\cdot x_3+a_4\cdot x_4$$

simplify(ans)⇒Equation

$$5\cdot a_3+6\cdot a_4=a_3\cdot x_1+2\cdot a_3\cdot x_2+a_3\cdot x_3+3\cdot a_4\cdot x_1+4\cdot a_4\cdot x_2+a_4\cdot x_4$$

simplify(Equation|a_4=0)

$$5\cdot a_3=a_3\cdot(x_1+2\cdot x_2+x_3)$$

d.h. $5=x_1+2\cdot x_2+x_3$

simplify(Equation|a_3=0)

$$6\cdot a_4=a_4\cdot(3\cdot x_1+4\cdot x_2+x_4)$$

d.h. $6=3\cdot x_1+4\cdot x_2+x_4$

zu lösen ist das LGS

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix}$$

$$ST:=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & -5\\ 3 & 4 & 0 & 1 & -6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 3)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 3)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix} ET & x_1 & x_2 & 1 \\ x_3 & -1 & -2 & 5 \\ x_4 & -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, $x_1=t_1$, $x_2=t_2$, ergibt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ – Basislösung (spezielle Lös. des inhom. LGS, partikuläre Lösung)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ – Fundamentallösungen (Basisvektoren für das hom. LGS, Fundamentalsystem)