Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben und Lösungen zur ALGEBRA

Aufgabe 17:

Gegeben seien

$$x:=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$y:=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Berechnen Sie x^Ty, xy^T und xy!

Lösung:

trn(x)•y

$$[7]$$

x•trn(y)

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt:

dotP(x,y)

7

Aufgabe 18:

Berechnen Sie

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}!$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -12 \\ -7 & 9 & 32 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 19:

Lösen Sie die Matrizengleichung **X=AX+B**

a) allgemein

b) für $A=\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$!

Lösung:

a) **X=AX+B** ergibt

EX−AX=B, (E−A)X=B

und somit

$\mathbf{X=(E-A)^{-1}B}$ mit $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b)

$A := \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$B := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$X := (E-A)^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} 2 & -9 & 4 \\ 2 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 20:

a) Welcher Schluß läßt sich über den Rang einer Matrix (ungleich **N**) des Typs (17, 4) ziehen, wenn offensichtlich die 3. Spalte Vielfaches der 1. Spalte, nicht aber der 4. Spalte ist?

b) Was ändert sich, wenn bei gleichem Typ dieser Sachverhalt nicht für die Spalten, sondern für die Zeilen gilt?

Lösung:

a) Es liegt keine Nullmatrix N vor, d.h. Rang≥1.
Der maximal mögliche Rang ist 4 (Rang=Zeilenrang=Spaltenrang≤min(17, 4)), d.h. Rang≤4.
1. und 3. Spalte sind linear abhängig, d.h. Rang≤3 (Rang verkleinert sich)

3. Spalte kein Vielfaches der 4. Spalte, d.h. Rang$\geq$2 (mindestens 2 unabhängige Spalten)

b) Wegen Zeilenrang=Spaltenrang das gleiche Ergebnis wie vorher.

Aufgabe 21:

Untersuchen (nicht: berechnen!) Sie mittels des Basisaustauschverfahrens, ob die Matrix

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ regulär ist! Welche (wichtige) Frage ist damit gleichbedeutend?

Bem.: **Basisaustauschverfahren = Pivotverfahren**

Austauschverfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung!

Anzahl der möglichen Austauschschritte = Rang

Lösung:

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

rank(A)

3

Die Matrix ist singulär, da sie nicht den vollen Rang 4 erreicht.

det(A)

$$0$$

Die quadratische Matrix hat die Determinante 0, d.h. sie ist singulär.

Die Matrix hat 3 lin. unabhängige Spalten (bzw. Zeilen):

Abhängigkeitsbeziehung:

$$a\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$ untersuchen auf nichttriviale Lösungen.

$$a\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}+d\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a+2\cdot c-d\\-2\cdot a-b+d\\b+2\cdot c\\4\cdot a+2\cdot c-3\cdot d\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a+2\cdot c-d=0\\-2\cdot a-b+d=0\\b+2\cdot c=0\\4\cdot a+2\cdot c-3\cdot d=0\end{cases}\Bigg|_{a,b,c,d}$$

$$\left\{a=\frac{2\cdot d}{3}, b=\frac{-d}{3}, c=\frac{d}{6}, d=d\right\}$$

$$\text{ans}\,|\,d=1$$

$$\left\{a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{6}, 1=1\right\}$$

$$a\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}\,|\,\left\{a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{6}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

d.h. $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}=$

$$-a\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\end{bmatrix}-b\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}-c\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}\mid\left\{a=\frac{2}{3},\, b=-\frac{1}{3},\, c=\frac{1}{6}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

andere Untersuchung: (reduced) row echelon form – (normierte) Zeilenstufenform

ref(A)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & -4 & 1\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

rref(A)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nutzung des bereits programmierten Austauschverfahrens in

Einzelschritten mit Vorauswahl des Pivots:

Programmstart: **AVRank(Matrix, Pivotrow, Pivotcol)**

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

AVRank(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

AVRank(A1, 1, 1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

AVRank(A2, 1, 1)

done

A3:=matnew

[0]

Es konnten 3 Austauschschritte durchgeführt werden:

Rg(A)=3

Aufgabe 22:

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ und

$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ sowie das Spatprodukt von $\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}6\\-1\\-1\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}-1\\-1\\8\end{bmatrix}$!

Lösung:

$$\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}4\\-2\\4\end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-1\\-1\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}-1\\-1\\8\end{bmatrix}\right)$$

$$-323$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}3&6&-1\\6&-1&-1\\2&-1&8\end{bmatrix}\right)$$

$$-323$$

Aufgabe 23:

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$x_1+x_2+2x_3-x_4=3$

$-2x_1+x_2+2x_3+2x_4=3$

$-2x_1-2x_2-4x_3+2x_4=-6$

a) Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise an!

b) Welche Aussagen über die Lösbarkeit des Gleichungssystems lassen sich allein aufgrund seiner Form (d.h. Anzahl Variablen und Gleichungen) treffen?

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels des Basisaustauschverfahrens! Beginnen Sie den Algorithmus an der Position (1,1) der Koeffizientenmatrix! Geben Sie die Lösung in vektorieller Form an!

d) Gibt es eine Lösung, bei der $x_2=-2x_3$ gilt? Wenn ja, geben Sie sie an, wenn nein, begründen Sie dies!

Lösung:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ sind lin. abhängig (1. und 4. Spalte)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ sind lin. abhängig (2. und 3. Spalte)

1. und 2. Spalte sind lin. unabhängig, d.h.

$\mathrm{Rg}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right)=2$

rechte Seite $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ lin. abhängig von 2. Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,

d.h. LGS ist lösbar!

z.B. $x_1=x_3=x_4=0$ und $x_1=3$ ist eine Lösung des LGS

Wegen Rang=2 gibt es 2 Austauschschritte und damit sind noch zwei nicht ausgetauschte Variablen frei wählbar.

Das LGS hat damit eine mehrdeutige Lösung mit 2 frei wählbaren Parametern.

c) Nutzung des Programms **LinEqSys(Matrix, PZeile, PSpalte)** im Einzelschrittverfahren:

$$M:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Starttabelle mit negativer rechter Seite (1-Spalte)

$$A:=\text{augment}\left(M, -\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1, 2, 1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Endtabelle}\ \begin{bmatrix} ET & x_3 & x_4 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & -2 & 0 & 3 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sei $x_3=s$ und $x_4=t$, dann $x_1=t$ und $x_2=-2s+3$.

Probe:

$$M\cdot\begin{bmatrix} t \\ -2s+3 \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2\cdot(2\cdot s-3)-4\cdot s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Alternativ:

$$\begin{cases} x_1+\ x_2+2x_3-\ x_4=\ 3 \\ -2x_1+\ x_2+2x_3+2x_4=\ 3 \\ -2x_1-2x_2-4x_3+2x_4=-6 \\ 0=0 \end{cases}\Bigg|_{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4}$$

$$\{x_1=x_4,\, x_2=-2\cdot x_3+3,\, x_3=x_3,\, x_4=x_4\}$$

Lösung in vektorieller Form:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad s,t\in\mathbf{R}.$$

d) $x_2=-2\cdot x_3$ ist nicht möglich, da $x_2=-2\cdot x_3+3$ für die

Lösung erforderlich ist.

Aufgabe 24:

Lösen Sie mittels des Basisaustauschverfahrens das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x+2z &= -1\\
-2x-y &= 0\\
3x+y+2z &= -1
\end{aligned}
$$

Geben Sie die Lösung vektoriell an! Ermitteln Sie (daraus) alle Lösungen, für die $|z| = 2$ gilt!

Lösung:

Matrixform $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Das LGS ist lösbar, da rechte Seite $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ lin. abhängig von 3.Spalte ist (z.B. x=y=0 und z=-0.5)

Starttabelle für Austauschverfahren:

$A:=\text{augment}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},-\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A,1,1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1, 2, 1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: Endtabelle $\begin{bmatrix} ET & z & 1 \\ x & -2 & -1 \\ y & 4 & 2 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$z=s$, $x=-2s-1$, $y=4s+2$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s\in\mathbf{R}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2\cdot(2\cdot s+1)-4\cdot s-2 \\ -3\cdot(2\cdot s+1)+6\cdot s+2 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$s\cdot\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\,|\,s=2$$

$$\begin{bmatrix}-5\\10\\2\end{bmatrix}$$

$$s\cdot\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\,|\,s=-2$$

$$\begin{bmatrix}3\\-6\\-2\end{bmatrix}$$

Aufgabe 25:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+2y \quad\;\; &= 3 \\ y+3z &= 4 \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems anhand des Lösbarkeitskriteriums!

b) Fügen Sie (auf möglichst einfache Weise) eine dritte Gleichung hinzu, so dass das dann entstehende System **nicht** lösbar ist! (Begründung!)

c) Was ergäbe sich für a) und b), wenn es sich um homogene Gleichungssysteme (bei gleicher linker Seite) handeln würde?

Lösung:

a) Matrixform $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

Das LGS ist lösbar, da rechte Seite $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ lin. abhängig von den Spalten der Matrix ist (z.B. x=y=z=1)

oder: Rang der Matrix =2 sofort erkennbar, Rang der erweiterten Matrix ebenso =2

b) z.B. y +3z = 5 als dritte Gleichung, dann 2. und 3. Gleichung widerspruchsvoll!

Matrixform $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) ein hom. LGS ist stets lösbar (z.B. triviale Lösung)

Rechnung:

$A := \mathrm{augment}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1, 2, 1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & z & 1 \\ x & 6 & -5 \\ y & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Rechnung:

$$A:=\text{augment}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}, -\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\0 & 1 & 3 & -4\\0 & 1 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

LinEqSys(A,1,1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\1 & 3 & -4\\1 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1,2,1)

done

A2:=matnew

$$\begin{bmatrix}6 & -5\\-3 & 4\\0 & -1\end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix}ET & z & 1\\x & 6 & -5\\y & -3 & 4\\y_3 & 0 & -1\end{bmatrix}$ Widerspruch in letzter Zeile:

$y_3=-1$ statt $y_3=0$

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\right) < \text{rank}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\0 & 1 & 3 & -4\\0 & 1 & 3 & -5\end{bmatrix}\right)$$

$2<3$

rechte Seite bewirkt Rangerhöhung!

Aufgabe 26:

Gegeben sei das Gleichungssystem mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$x+ay=1$

$bx+y=c$

Geben Sie anhand des Basisaustauschverfahrens und des Lösbarkeitskriteriums jeweils ein Beispiel und die allgemeinen Bedingungen dafür an, dass das Gleichungssystem

a) eindeutig lösbar

b) mehrdeutig lösbar

c) unlösbar ist (oder begründen Sie, dass der betrachtete Fall nicht auftreten kann)!

Lösung:

Matrixform $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$

a)

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$

$$-a \cdot b + 1 \neq 0$$

Matrix von vollen Rang =2.

$A := \text{augment}\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ b & 1 & -c \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A, 1, 1)

done

A1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -a & 1 \\ -a \cdot b + 1 & b - c \end{bmatrix}$$

2. Austauschschritt nur für $-a \cdot b + 1 \neq 0$ möglich.

b) $-a \cdot b + 1 = 0$ und $b - c = 0$, d.h.

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\,|\, b=1/a\right)$$

$$1$$

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}1 & a & -1\\ b & 1 & -c\end{bmatrix}\,|\, b=1/a \text{ and } c=1/a\right)$$

$$1$$

Rang(Matrix)=Rang(erweiterte Matrix)<Maximalrang

c) Rang(Matrix)=1<Rang(erweiterte Matrix)=2, d.h.

$-a\cdot b+1=0$ und $b-c\neq 0$, vgl. Endtabelle in a)

Beispiele:

a) $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ c\end{bmatrix}$ mit a=b=2 und c=1

b) $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ c\end{bmatrix}$ mit a=b=1 und c=1

c) $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ c\end{bmatrix}$ mit a=b=1 und c=2

Kontrolle:

a)

$$\left\{\begin{array}{l}x+a\cdot y=1\,|\,a=2 \text{ and } b=2 \text{ and } c=1\\ b\cdot x+y=c\,|\,a=2 \text{ and } b=2 \text{ and } c=1\end{array}\right|_{x,y}$$

$$\left\{x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}\right\}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l}x+a\cdot y=1\,|\,a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=1\\ b\cdot x+y=c\,|\,a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=1\end{array}\right|_{x,y}$$

$$\{x=-y+1, y=y\}$$

c)

$$\left\{\begin{array}{l}x+a\cdot y=1\,|\,a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=2\\ b\cdot x+y=c\,|\,a=1 \text{ and } b=1 \text{ and } c=2\end{array}\right|_{x,y}$$

No Solution

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

a) Wie lautet die zugehörige quadratische Form $Q = x^T\mathbf{S}x$ mit $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ explizit?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von **S**!

c) Bestimmen Sie einen normierten Eigenvektor, der zum betragsgrößten Eigenwert von **S** gehört!

d) Berechnen Sie die restlichen Eigenvektoren, und geben Sie die Transformationsmatrix **C** an!

(**Hinweis:** Beachten Sie die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte und eine daraus resultierende
Eigenschaft der Eigenvektoren! Überprüfen Sie diese Eigenschaft!)

Lösung: **S** ist eine symmetrische Matrix

a)

$$[x_1\ x_2\ x_3]\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot \mathrm{trn}([x_1\ x_2\ x_3])$$

$$\left[x_2{}^2+x_1\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_3)+2\cdot x_1\cdot x_3\right]$$

$$Q=x_2{}^2+x_1\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_3)+2\cdot x_1\cdot x_3$$

$$Q=x_2{}^2+x_1\cdot(3\cdot x_1+2\cdot x_3)+2\cdot x_1\cdot x_3$$

b)

$$\mathrm{eigVl}\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\{4, 1, -1\}$$

c)

$$\mathrm{eigVc}\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}0.894427191 & 0 & -0.4472135955\\ 0 & 1 & 0\\ 0.4472135955 & 0 & 0.894427191\end{bmatrix}$$

Eigenwertgleichung: $Ax=\lambda x$ bzw. $(A-\lambda\cdot E)\cdot x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot \mathrm{trn}([x_1\ \ x_2\ \ x_3])$$

$$\begin{bmatrix}-x_1+2\cdot x_3\\ -3\cdot x_2\\ 2\cdot x_1-4\cdot x_3\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}-x_1+2\cdot x_3\\ -3\cdot x_2\\ 2\cdot x_1-4\cdot x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ergibt $x_2=0$ und $x_1=2\cdot x_3$, d.h.

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot x_3\\ 0\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}2\cdot x_3\\ 0\\ x_3\end{bmatrix}\right)^2=1$$

$$5\cdot x_3{}^2=1$$

$\mathrm{solve}(\mathrm{ans}, x_3)$

$$\left\{x_3=\frac{-\sqrt{5}}{5}, x_3=\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$$

$x_1=$

$$2\cdot\left\{\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$$

$$\left\{\frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5}, \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\right\}$$

$$\text{approx}\left(\left\{\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}\right)$$

{0.894427191,0,0.4472135955}

d) Transformationsmatrix C aus normierten Eigenvektoren:

$$C:=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

approx(ans)

$$\begin{bmatrix} 0.894427191 & 0 & 0.4472135955 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472135955 & 0 & -0.894427191 \end{bmatrix}$$

$$\text{trn}(C)\cdot\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot C$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 28:

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme

a) Start mit Pivot a_{11}, d.h. $y_1 \leftrightarrow x_1$

$$ST := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST,1,1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,2,1)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_3 & 1 \\ x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ y_3 & 0 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ widerspruchsfrei!

$x_3=s$, $x_1=s-1$, $x_2=s+1$, d.h.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \cdot (s-1) - 2 \cdot s - 1 \\ -2 \cdot (s+1) + 3 \cdot (s-1) - s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b) Start mit Pivot a_{21}, d.h. $y_2 \leftrightarrow x_1$

$$ST := \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 2, 1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

nächstes Pivot (3, 3), d.h. $y_3 \leftrightarrow x_4$

LinEqSys(T1, 3, 3)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

nächstes Pivot (1, 1), d.h. $y_1 \leftrightarrow x_2$

LinEqSys(T2, 1, 1)

done

T3:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_3 & 1 \\ x_2 & 1 & -2 \\ x_1 & -2 & 1 \\ x_4 & 2 & -2 \\ y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d.h.

$x_3=s, x_1=-2s+1, x_2=s-2, x_4=2s-2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot(2\cdot s-1)+3\cdot(s-2)-2\cdot(2\cdot s-2)-3\cdot s \\ -2\cdot(2\cdot s-2)+4\cdot s-1 \\ -3\cdot(2\cdot s-1)+2\cdot(2\cdot s-2)+2\cdot s \\ 5\cdot(s-2)-4\cdot(2\cdot s-2)+3\cdot s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

c) Start mit Pivot a_{12}, d.h. $y_1 \Leftrightarrow x_2$

$$ST := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 2)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

weiter mit Pivot (2, 1), d.h. $y_2 \Leftrightarrow x_1$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_3 & x_4 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 3 & 4 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_3=s$, $x_4=t$, $x_2=s+t+1$,

$x_1=s2+3t+4$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s,t\in R.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\cdot\left(s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

$$\left.\begin{cases} b-c-d=1 \\ a-2c-3d=4 \\ a-b-c-2d=3 \\ 0=0 \end{cases}\right|_{a,b,c,d}$$

$$\{a=2\cdot c+3\cdot d+4, b=c+d+1, c=c, d=d\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s, t \in R.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Für welche λ ist das LGS nichttrivial lösbar? Wie lauten die Lösungen?

$$ST := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$-\lambda + 10 = 0$$

nichttriv. Lösungen für $\lambda=10$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -9 & -6 & \lambda-4 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,2,2)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & \lambda-16 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T2,3,1)

done

T3:=matnew

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ \lambda-10 & 0 \end{bmatrix}$$

ans|λ=10

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle: $\begin{bmatrix} ET & x_4 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_3 & -2 & 0 \\ x_2 & 2 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_4=s$, $x_1=s$, $x_2=2s$, $x_3=-2s$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s\in\mathbf{R}$.

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda \end{bmatrix} \cdot s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \cdot (\lambda - 10) \end{bmatrix}$$

$\text{ans} \mid \lambda = 10$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 29:

Modell der Teileverflechtung (Verflechtungsdiagramm, zweistufiger Prozeß)

M→Z→E

M – Ausgangsmaterialien

Z – Zwischenprodukte

E – Endprodukte

Ausgehend von dem gezeigten Diagramm wissen wir, dass zur Herstellung von zwei Endprodukten $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ zwei Zwischenprodukte $\mathbf{Z_1, Z_2}$ benötigt werden, welche wiederum aus den Ausgangsmaterialien (Rohstoffe) $\mathbf{M_1}$ bis $\mathbf{M_3}$ zusammengesetzt werden können.

Materialfluss in Tabellenform:

$$\begin{bmatrix} \rightarrow & Z_1 & Z_2 \\ M_1 & 6 & 4 \\ M_2 & 3 & 0 \\ M_3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \rightarrow & E_1 & E_2 \\ Z_1 & 1 & 2 \\ Z_2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Wir stellen zuerst die **Bedarfsmatrix B_2** für die Herstellung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten auf:

$$B2:=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Nehmen wir den Vektor $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ als Outputvektor

(Warenproduktion) und $\mathbf{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ als Inputvektor der

Zwischenprodukte, so gilt ja $\mathbf{z}=\mathbf{B_2}\cdot\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{w}$, d.h.

$z_1=1w_1+2w_2$, $z_2=1w_1+3w_2$,

Im nächsten Schritt bestimmen wir nun die **Bedarfsmatrix B_1** für die Produktion der Zwischenprodukte aus den Ausgangsmaterialien (Rohstoffen):

$$B1:=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Für den Inputvektor **m** der Rohstoffe gilt in diesem Falle

$\mathbf{m}=\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{z}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{z}$, d.h. $m_1=6z_1+4z_2$, $m_2=3z_1+0z_2$,

$m_3=1z_1+2z_2$,

Natürlich kann man den Bedarf an Rohstoffen für einen bestimmten Auftrag auch direkt berechnen:

$\mathbf{m}=\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{B_2}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}$,

d.h.

$m_1=6(1w_1+2w_2)+4(1w_1+3w_2)=10w_1+24w_2$,

$m_2=3(1w_1+2w_2)+0(1w_1+3w_2)=\ 3w_1+\ 6w_2$,

$m_3=1(1w_1+2w_2)+2(1w_1+3w_2)=\ 3w_1+\ 8w_2$,

Symbolik:

m_i – Anzahl der Einheiten von M_i

z_j – Anzahl der Einheiten von Z_j

w_k – Anzahl der Einheiten von W_k

a) Wie viele Einheiten $\mathbf{M_i}$, i=1,2,3, werden für eine Einheit $\mathbf{E_j}$, j=1,2, benötigt?

$$\begin{bmatrix} \rightarrow & E_1 & E_2 \\ M_1 & \square & \square \\ M_2 & \square & \square \\ M_3 & \square & \square \end{bmatrix}$$

b) geg. sei die Warenproduktion $\mathbf{E_1}$=12 und $\mathbf{E_2}$=20, ges. der Materialbedarf.

Lösung:

a)

$$B1 := \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bedarfsmatrix B:

$B := B1 \cdot B2$

$$\begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rightarrow & E_1 & E_2 \\ M_1 & 10 & 24 \\ M_2 & 3 & 6 \\ M_3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

b) geg. Warenproduktion **w**, ges. Materialbedarf **m**

$$w:=\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$m:=B\cdot w$

$$\begin{bmatrix} 600 \\ 156 \\ 196 \end{bmatrix}$$

im Einzelnen: $\mathbf{m=B_1 \cdot z}$, $\mathbf{z=B_2 \cdot w}$

$$z:=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 52 \\ 72 \end{bmatrix}$$

$$m:=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 52 \\ 72 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 600 \\ 156 \\ 196 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 30:

Basiswechsel mittels Austauschverfahren

$b_1 \leftrightarrow e_1$ $b_2 \leftrightarrow e_2$

$$\begin{bmatrix} BV & b_1 & b_2 & d \\ e_1 & 1 & 2 & 7 \\ e_2 & 0 & -1 & -2 \\ K & * & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BV & e_1 & b_2 & d \\ b_1 & 1 & -2 & -7 \\ e_2 & 0 & -1 & -2 \\ K & 0 & * & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BV & e_1 & e_2 & d \\ b_1 & 1 & 2 & -3 \\ b_2 & 0 & -1 & -2 \\ K & & & \end{bmatrix}$$

alte Basisdarstellung mit Basis $\{b_1, b_2\}$

$e_1=1b_1+2b_2+7$, $e_2=0b_1-1b_2-2$

ergibt neue Basisdarstellung mit Basis $\{e_1, e_2\}$

$b_1=1e_1+2e_2+4$, $b_2=0e_1-1e_2+2$

$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ ergibt

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\left(\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\left(-\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$ST:=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Zusatz 31:

Lösen Sie folgende LGS:

a) $x\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

b) $x\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Lösung:

a)

$ST:=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0.5 & -2.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 2, 2)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix} ET & x & 1 \\ y_1 & 0 & 0 \\ y & 2 & 5 \end{bmatrix}$, d.h. x=t, y=2t+5, t∈**R**

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, t∈**R**

Probe:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}\cdot\left(t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ \frac{2\cdot t+5}{2}-t \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} | t=-2.5$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} | t=-5$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} | t=0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} | t=-2$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

$ST:=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 2, 2)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix} ET & x & 1 \\ y_1 & 0 & 7 \\ y & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Widerspruch in 1. Zeile, d. h. keine Lösung.

Aufgabe Zusatz 32:

geg.: $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4$

mit $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_3+3\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_3+4\mathbf{a}_4$, $\mathbf{b}=5\mathbf{a}_3+6\mathbf{a}_4$

ges.: x_1, x_2, x_3, x_4

Lösung:

$\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4$ geht über in

$5\mathbf{a}_3+6\mathbf{a}_4=x_1(\mathbf{a}_3+3\mathbf{a}_4)+x_2(2\mathbf{a}_3+4\mathbf{a}_4)+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4$

d. h.

$5a_3+6a_4=x_1\cdot(a_3+3a_4)+x_2\cdot(2a_3+4a_4)+x_3\cdot a_3+x_4\cdot a_4$

$$5\cdot a_3+6\cdot a_4=x_2\cdot(2\cdot a_3+4\cdot a_4)+x_1\cdot(a_3+3\cdot a_4)+a_3\cdot x_3+a_4\cdot x_4$$

simplify(ans)→Equation

$$5\cdot a_3+6\cdot a_4=a_3\cdot x_1+2\cdot a_3\cdot x_2+a_3\cdot x_3+3\cdot a_4\cdot x_1+4\cdot a_4\cdot x_2+a_4\cdot x_4$$

simplify(Equation | $a_4=0$)

$$5\cdot a_3=a_3\cdot(x_1+2\cdot x_2+x_3)$$

d. h. $5=x_1+2\cdot x_2+x_3$

simplify(Equation | $a_3=0$)

$$6\cdot a_4=a_4\cdot(3\cdot x_1+4\cdot x_2+x_4)$$

d. h. $6=3\cdot x_1+4\cdot x_2+x_4$

zu lösen ist das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$ST := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 3)

done

T1:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 3)

done

T2:=matnew

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix} ET & x_1 & x_2 & 1 \\ x_3 & -1 & -2 & 5 \\ x_4 & -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, $x_1=t_1$, $x_2=t_2$, ergibt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ – Basislösung (spezielle Lös. des inhom.LGS,

partikuläre Lösung)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ – Fundamentallösungen (Basisvektoren für das hom. LGS, Fundamentalsystem)