Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben und Lösungen zur ALGEBRA

Aufgabe 01:

Gegeben sei $A(x,y)$: $(x-y)^2 = x^2-y^2$,

$x,y \in \mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$.

a) Worum handelt es sich bei $A(x,y)$?

b) Geben Sie jeweils den Wahrheitswert an von

$\forall x \forall y$: $A(x,y)$ $\quad$ $\forall x \exists y$: $A(x,y)$

$\exists x \forall y$: $A(x,y)$ $\quad$ $\exists y \forall x$: $A(x,y)$.

c) Was ändert sich bei b), falls

$x,y \in \mathbb{N}^+=\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$ gilt?

(Bem.: DIN 5473:1992-07 u.a. Symbolik

Logik und Mengenlehre; Zeichen und Begriffe)

vgl. auch:

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft:

www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathe1infowirt2018w

/media/skript_aussagenlogikmengen.pdf

Lösung:

a) $A(x,y)$ ist eine **Aussageform** (Gleichung), die wahr oder falsch sein kann, d.h. $A(x,y)$ besitzt noch keinen Wahrheitswert.

b) $\forall x \forall y: A(x,y)$ ist **falsch,** da $A(x,y)$ nicht für für alle $(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ gilt (z.B. $x=0$ und $y=1$)

$\forall x \exists y: A(x,y)$ ist **wahr,** da für alle $x \in \mathbf{N}$ ein $y \in \mathbf{N}$ existiert, um $A(x,y)$ zu erfüllen (z.B. $y=0$ oder $y=x$)

denn $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 = x^2-y^2$ ergibt $2y^2=2xy$ oder $y(y-x)=0$

$\exists x \forall y: A(x,y)$ ist **falsch,** da es kein gemeinsames x für alle y gibt mit $2y^2=2xy$, d.h. $y^2=xy$ oder $y(y-x)=0$

$\exists y \forall x: A(x,y)$ ist **wahr** ($y=0$, dann $x^2=x^2$)

c) $\forall x \forall y: A(x,y)$ ist **falsch,** vgl. a) (es fehlt auf der rechten Seite der Term $-2xy$ und $+y^2$ statt $-y^2$)

$\forall x \exists y$: $A(x,y)$ ist **wahr** ($y=x$ wählen)

$\exists x \forall y$: $A(x,y)$ ist **falsch**, vgl. a)

$\exists y \forall x$: $A(x,y)$ ist **falsch**, da $y=0$ nicht mehr zum Definitionsbereich von $A(x,y)$ gehört.

Aufgabe 02:

Vereinfachen Sie die Terme $A\setminus(A\setminus B)$ und $(A\setminus A)\setminus B$ mittels Veranschaulichung in einem VENN-Diagramm!

Welchen Schluß ziehen Sie daraus für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Operation \ (Mengendifferenz)?

Lösung:

Assoziativgesetzes der Operation \ wäre hier

$A\setminus B\setminus C=(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$ und speziell

$A\setminus A\setminus B=(A\setminus A)\setminus B=A\setminus(A\setminus B)$

Nun gilt $A\setminus A=\emptyset$ ($\emptyset$ – leere Menge, DIN 5473)

und daraus $(A\setminus A)\setminus B=\emptyset\setminus B=\emptyset$

andererseits ist $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

Im allgemeinen gilt nicht $A\cap\bar{B}=\emptyset$, d.h. das

Assoziativgesetz gilt hier nicht.

rechnerische Umformung:

$A\setminus(A\setminus B)=A\setminus(A\cap\overline{B})=A\cap(\text{nicht}(A\cap\overline{B}))=$

$A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\emptyset\cup(A\cap B)=A\cap B$

Aufgabe 03:

In der Menge $M=\{1,2,3,4\}$ werde die Relation

R$=\{(x,y)\mid ggt(x,y)=1\}$ ggt: größter gemeinsamter Teiler

betrachtet.

a) Geben Sie **R** als Menge (von Zahlenpaaren) vollständig an!

b) Welche Eigenschaften hat diese Relation, welche nicht?

Bem.: s. **Einführung in die Mathematik für Informatiker** (Dörfler, Peschek 1988, Hanser-Verl.)

Kapitel 3: Relationen und Abbildungen (S. 40ff)

Lösung: **R** ist eine binäre Relation in M×M (kartesisches Produkt)

a)

R=$\{(x,y) \mid (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(3,1),($

in Tabellenform oder als Matrix (oder als Pfeildiagramm, gerichteter Graph)

$$\begin{bmatrix} R & \mid & 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & + & - & - & - & - \\ 1 & \mid & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \mid & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \mid & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & \mid & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Matrix:} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Die Relation ist **symmetrisch** $(x,y)\in$**R** und $(y,x)\in$**R**, d.h. **R**=R^{-1}

R^{-1} bezeichnet die inverse Relation zu **R** (**R** enthält die Paare (x,y) und R^{-1} die Paare (y,x))

Die Relation ist **transitiv**, d.h. aus $(x,y)\in$**R** und $(y,z)\in$**R** folgt $(x,z)\in$**R**, d.h. **R**$\circ$**R**$\subset$**R**

R$\circ$**R** bezeichnet das Produkt (oder die Komposition) zweier Relationen,

vgl. Def.3.1.3 in Dörfler, Peschek:

$\mathbf{R \circ R = \{(x,z) \mid x \in R \land z \in R \land \exists y \in M: (x,y) \in R \land (y,z) \in R\}}$,

man schreibt auch:

$x(\mathbf{R \circ R})z \iff \exists y \in \mathbf{M}:\ x\mathbf{R}y \land y\mathbf{R}z$

Die Relation ist **nicht reflexiv**, d.h. es gilt nicht

$(x,x) \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{M}$

Damit ist **R keine Äquivalenzrelation**!

Aufgabe 04*:

Bezüglich der beiden zweistelligen mengentheoretischen

Operationen × und ∩ lassen sich zwei verschiedene

Distributivgesetze formulieren.

a) Wie lauten diese Formulierungen?

b) Das eine dieser beiden Gesetze gilt tatsächlich, das

andere nicht. Welches der beiden gilt?

Verdeutlichen Sie sich dabei die Beziehung in einem

kartesischen Koordinatensystem

anhand der drei Mengen A=[2;4], B=[1;4], C=[3;6]!

Lösung:

a) $(A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$ bzw. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

b) Die erste Beziehung gilt nicht, da $(A\times B)\cap C$ nicht definiert ist.

$A\cap B=A$, $A\times C=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in C\}$, $B\times C=\{(x,y)\mid x\in B\wedge y\in C\}$

Aufgabe 05:

Betrachtet werde die Relation **$R=\{(x,y)\mid x+y$ gerade$\}$** in **Z**. Zeigen Sie, dass **R** eine **Äquivalenzrelation** ist!

In welche Mengen wird **Z** durch diese Relation zerlegt?

Ist auch die Relation **$R=\{(x,y)\mid x+y$ ungerade$\}$** eine Äquivalenzrelation?

Lösung:

$Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

a) Relation **$R=\{(x,y)\mid x+y$ gerade$\}$** in **Z**

symmetrische Relation: $x+y$ gerade <=> $y+x$ gerade

reflexive Relation: $x+x$ gerade

transitive Relation: $x+y$ gerade $\wedge$ $y+z$ gerade => $x+z$ gerade damit ist **R** eine **Äquivalenzrelation**, da sie gleichzeitig symmetrisch, reflexiv und transitiv ist.

Z wird durch **R** in die **Menge der geraden** und die **Menge der ungeraden** Zahlen zerlegt.

(die geraden Zahlen sind bezüglich **R** "äquivalent", ebenso die ungeraden Zahlen bezüglich **R** "äquivalent")

b) Relation **R**={(x,y)|x+y ungerade} in **Z**

symmetrische Relation: x+y ungerade <=> y+x ungerade

keine reflexive Relation: x+x ist nicht ungerade

keine transitive Relation: x+y ungerade $\wedge$ y+z ungerade => x+z nicht ungerade

damit ist **R** keine **Äquivalenzrelation**, da sie weder reflexiv noch transitiv ist.

Aufgabe 06:

Die Operation ggt(x,y) in $\mathbf{N}^+$ ist offenbar kommutativ und idempotent, außerdem ist sie assoziativ.

a) Um welche algebraische Struktur handelt es sich mithin bei $[N^+; ggt]$?

b) Besitzt diese Struktur ein neutrales Element?

Lösung:

a) Die binäre Operation ist

kommutativ: $ggt(x,y)=ggt(y,x)$, d.h. Reihenfolge der Operanden kann vertauscht werden

idempotent: $ggt(x,x)=x$, d.h. $\forall x \in N^+$ ist x der ggt des Paares (x,x)

assoziativ: $ggt(ggt(x,y),z)=ggt(x,ggt(y,z))$ (z.B. $ggt(60,24)=12, ggt(12,39)=3, ggt(12,3)=ggt(60,39)$ usw.)

Es handelt sich bei $[N^+; ggt]$ um eine **Halbgruppe H,** da die binäre Operation assoziativ ist.

Kurz: **H=**$[N^+; ggt]$, vgl. Dörfler, Peschek (1988), S. 106 Def. 6.1.2 Halbgruppe(engl. semigroup)

Darüber hinaus ist diese **Halbgruppe kommutativ und idempotent.**

(vgl. Def. 6.1.4: kommutative Halbgruppe)

b) neutrales Element würde bedeuten $\forall x,y \in N^+ \; \exists e \in N^+$:

ggt(e,y)=y bzw. ggT(x,e)=x

Ein solches Element e existiert nicht.

Bem.: https://de.wikipedia.org/wiki/Idempotenz

In der Informatik wird Idempotenz von Recovery-Maßnahmen bei Datenbanken und Diensten gefordert, um Fehlertoleranz bei einem Absturz während einer Wiederanlaufphase zu gewährleisten. Undo- und Redo-Operationen müssen hier auch bei mehrfacher Hintereinanderausführung dasselbe Resultat zur Folge haben.

Rein lesende Services sind von Natur aus idempotent, da der Zustand der Daten nicht geändert wird.

Beispiel:

Bei einem Service zum Verbuchen von Geldbeträgen ist der Aufruf **einzahlen(100)** nicht idempotent, da bei mehrmaligem Service-Aufruf der Betrag 100 mehrmals eingezahlt wird. Würde man hingegen **neuerKontostand(600)** aufrufen, so würde bei mehrmaligem Service-Aufruf der Kontostand gleich bleiben. Dieser Aufruf wäre idempotent.

Dörfler,Peschek (1988), S.126u. **Körper:**

Ein Körper ist ein Ring, wobei die von Null verschiedenen Elemente eine kommutative Gruppe bilden.

Aufgabe 07:

Bestimmen Sie für alle k∈**N** den Wert des Terms

$15^{4k}(17)$!

(vgl. auch Dörfler,Peschek (1988):

Kap. 1.6 Stellenwertsysteme,

Kap. 1.7 Zahlendarstellung am Computer,

Kap. 1.8 Elementare Begriffe der Zahlentheorie)

Lösung: $15^{4k}(17)$ bedeutet $15^{4k}(\mathrm{mod}17)$, gesucht ist der ganzzahlige Rest bei Division durch 17:

liste:=seq$(15^{4k},k,0,5,1)$

{1,50625,2562890625,129746337890625,65684083557

liste/17

$\left\{\frac{1}{17}, \frac{50625}{17}, \frac{2562890625}{17}, \frac{129746337890625}{17}, \frac{6568408}{}\right.$

approx(ans)

{0.05882352941,2977.941176,150758272.1,7.632137

fRound(ans,0)

{0,2978,150758272,7632137522978,386376962100755

17*ans

{0,50626,2562890624,129746337890626,65684083557

liste−ans

{1,−1,1,−1,46819,1325095531}

Vermutung:

Das **kleinste nichtnegative Restsystem** ist {1;16}

das **absolut kleinste Restsystem** ist {−1;1}

vgl. Dörfler, Peschek (1988) S.22

k=0: $15^{4k}(\text{mod}17)\equiv 1(\text{mod}17)$

k=1:

$15^{4k}(\text{mod}17)=50625(\text{mod}17)=2977*17+16(\text{mod}17)\equiv 16($

denn

$15^{4*1}-2977*17$

16

k=2:

15^{4k}(mod17)=2562890625(mod17)=150758272*17+1(m

denn

$15^{4*2}-150758272*17$

1

k=3:

15^{4k}(mod17)=129746337890625(mod17)=76321375229

denn

$15^{4*3}-7632137522977*17$

16

k=4:

15^{4k}(mod17)=6568408355712890625(mod17)≡1(mod17

denn

$(15^{4*4}-1)/17$

386376962100758272

$(15^{4*5}-16)/17$

19560333706350887522977

$(15^{4*5}+1)/17$

19560333706350887522978

usw.

$(15^{4*8}-1)/17$

25378816663175835000241503996007 58272

$(15^{4*9}+1)/17$

1284802593573276646887226139797883 87522978

allgemein:

k=2n gerade: $15^{4*2n}-1$ ist durch 17 teilbar (ohne Rest)

k=2n+1 ungerade: $15^{4*(2n+1)}+1$ ist durch 17 teilbar

(ohne Rest)

Beweis:

seq$((15^{4*2n}-1)/17$,n,0,10,1)

{0,150758272,386376962100758272,99024189388401

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix}
0 \\
150758272 \\
386376962100758272 \\
99024189388401368085075 8272 \\
253788166631758350002415039960075 8272 \\
650431312996471302486658233272678711835075827 \\
16669843142850969592245955736336113391991923 8 \\
427229847110332857401272326508207968612730516 \\
109494336987925542086318270867982518830786129 \\
280622009756945110011068037173763010175307733 \\
719203517974733151086959918709788714750075795
\end{bmatrix}$$

frac(matToList(ans,1))

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

seq$((15^{4*(2n+1)}+1)/17$,n,0,10,1)

{2978,7632137522978,19560333706350887522978,50

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix} 2978 \\ 7632137522978 \\ 19560333706350887522978 \\ 50130995877878192593069637522978 \\ 128480259357327664688722613979788387522978 \\ 329280852204463596883870730594293597866507137 \\ 843910809106830335607451509152015740469591144 \\ 216285110099606009059394115294780284110194824 \\ 554315081001373056811986246269161501580854781 \\ 142064892439453461943103193819217523901249539 \\ 364096780974708657737773458846830536842225871 \end{bmatrix}$$

frac(matToList(ans,1))

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

□

$15^{4*2n}=17q_0+1$ und $15^{4*(2n+1)}=17q_1-1$

vollständiger Beweis: (vollständige Induktion)

$15^{4*(2n+2)}\equiv 15^{4*2n}(\text{mod } 17)$ ergibt

$15^{4*(2n+2)}-15^{4*2n}\equiv 0(\text{mod } 17)$, denn

$15^{4*(2n+2)}-15^{4*2n}=15^{4*2n+8}-15^{4*2n}=15^{4*2n}*(15^{8}-$

und $15^{8}-1$ ist durch 17 teilbar:

$(15^{8}-1)/17$

150758272

$15^{4*(2n+1)}\equiv 15^{4*(2n-1)}(\text{mod } 17)$ ergibt

$15^{4*(2n+1)}-15^{4*(2n-1)}\equiv 0(\text{mod } 17)$, denn

$15^{4*(2n+1)}-15^{4*(2n-1)}=15^{4*(2n-1+2)}-15^{4*(2n-1)}=$

und $15^{8}-1$ ist durch 17 teilbar, s.o.

Zusammenfassung: $15^{4k}(\text{mod}17)\equiv(-1)^{k}(\text{mod } 17)$

Aufgabe 08:

Lösen Sie die (linearen) Kongruenzen $2x\equiv1(7)$, $2x\equiv1(8)$ und $2x\equiv2(8)$!

Lösung:

$2x\equiv1(7)$, $2x\equiv1(8)$ und $2x\equiv2(8)$ bedeutet $2x\equiv1(\text{mod } 7)$, $2x\equiv1(\text{mod } 8)$ und $2x\equiv2(\text{mod } 8)$

(vgl. Dörfler, Peschek (1988) S.22 Satz 1.8.6)

vgl. auch

lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-7.pdf

zu: $2x\equiv1(\text{mod } 7)$

eine Lösung ist z.B. $x=4$

allgemeine Lösung dann

$x=4+7k$ mit $k\in\mathbb{Z}$

Lösung als Restklasse: $x\equiv4(\text{mod } 7)$

zu: $2x\equiv1(8)$ hat keine Lösung!

$2x=1+8k$ mit $k\in\mathbb{Z}$ ist nicht möglich.

zu: $2x\equiv2(\text{mod } 8)$ bedeutet $x\equiv1(\text{mod } 4)$ (Kürzungsregel)

$x=1+4k$ mit $k\in\mathbb{Z}$, d.h.

$x\equiv1(\text{mod } 4)$

Aufgabe 09:

Für die folgende Aufgabe wird jeweils das **Repräsentantensystem** $\{0,...,m-1\}$ bzgl. der Restklassen modulo m zugrundegelegt.

Berechnen Sie alle Produkte $3x$ (also $3\cdot0$, $3\cdot1$ usw.), jeweils für den Modul $m=6$ und den Modul $m=8$!

Welchen qualitativen Unterschied stellen Sie fest? Worin ist er begründet?

Dörfler, Peschek (1988) S. 21 u. Def. 1.8.5:
vollständiges Restsystem R aller Restklassen
$r \in \mathbf{R} = \{0, ..., m-1\}$
vgl. auch:
lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-4.pdf
lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-7.pdf

Lösung:

a) m=6 ergibt
$3x \equiv 0 \pmod 6$ entspricht $x \equiv 0 \pmod 2$, d.h. $x=2k$, $k \in \mathbf{Z}$

$3x \equiv 1 \pmod 6$ entspricht $3x=1+6k$, $k \in \mathbf{Z}$
x muss ungerade sein:
seq((3x-1)/6,x,1,25,2)

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{16}{3}, \frac{19}{3}, \frac{22}{3}, \frac{25}{3}, \frac{28}{3}, \frac{31}{3}, \frac{34}{3}, \frac{37}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 1 tritt nicht auf.

$3x \equiv 2 \pmod 6$ entspricht $3x=2+6k$, $k \in \mathbf{Z}$
x muss gerade sein:
seq((3x-2)/6,x,2,26,2)

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}, \frac{20}{3}, \frac{23}{3}, \frac{26}{3}, \frac{29}{3}, \frac{32}{3}, \frac{35}{3}, \frac{38}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 2 tritt nicht auf.

$3x \equiv 3 \pmod 6$ entspricht $x \equiv 1 \pmod 2$, d.h. $x=2k+1$,

$k \in Z$

$3x \equiv 4 \pmod 6$ entspricht $3x=4+6k$, $k \in Z$

x muss gerade sein:

seq((3x−4)/6,x,2,26,2)

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{13}{3},\frac{16}{3},\frac{19}{3},\frac{22}{3},\frac{25}{3},\frac{28}{3},\frac{31}{3},\frac{34}{3},\frac{37}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 4 tritt nicht auf.

$3x \equiv 5 \pmod 6$ entspricht $3x=5+6k$, $k \in Z$

x muss ungerade sein:

seq((3x−1)/6,x,1,25,2)

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{13}{3},\frac{16}{3},\frac{19}{3},\frac{22}{3},\frac{25}{3},\frac{28}{3},\frac{31}{3},\frac{34}{3},\frac{37}{3}\right\}$$

Vermutung: Restklasse 5 tritt nicht auf.

Ergebnis: Es treten nur die Restklassen {0,3} auf bei $x \in Z$

b) m=8 ergibt

$3x \equiv 0 \pmod 8$ bedeutet $x \equiv 0 \pmod 8$, d.h. $x=8k$, $k \in Z$,

und $x \in \{\ldots, 0, 8, 16, 24, 32, \ldots\}$

seq((8k+0)/3,k,0,10,1)

$$\left\{0,\frac{8}{3},\frac{16}{3},8,\frac{32}{3},\frac{40}{3},16,\frac{56}{3},\frac{64}{3},24,\frac{80}{3}\right\}$$

$3x \equiv 1 \pmod 8$ bedeutet $3x-1 \equiv 0 \pmod 8$, d.h. $3x-1=8k$, $k \in Z$,

und x ungerade: x=(8k+1)/3

seq((8k+1)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{1}{3}, 3, \frac{17}{3}, \frac{25}{3}, 11, \frac{41}{3}, \frac{49}{3}, 19, \frac{65}{3}, \frac{73}{3}, 27\right\}$$

x=3+8k, k∈**Z**

3x≡2(mod 8) bedeutet 3x−2≡0(mod 8), d.h. 3x−2=8k, k∈**Z**,

und x gerade: x=(8k+2)/3

seq((8k+2)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 6, \frac{26}{3}, \frac{34}{3}, 14, \frac{50}{3}, \frac{58}{3}, 22, \frac{74}{3}, \frac{82}{3}\right\}$$

x=6+8k, k∈**Z**

3x≡3(mod 8) bedeutet 3x−3≡0(mod 8), d.h. 3x−3=8k, k∈**Z**,

3x−3=3(x−1) und x ungerade: x=x=(8k+3)/3=1+8k/3

seq((8k+3)/3,k,0,10,1)

$$\left\{1, \frac{11}{3}, \frac{19}{3}, 9, \frac{35}{3}, \frac{43}{3}, 17, \frac{59}{3}, \frac{67}{3}, 25, \frac{83}{3}\right\}$$

x=9+8k, k∈**Z**

3x≡4(mod 8) bedeutet 3x−4≡0(mod 8), d.h. 3x−4=8k, k∈**Z**,

und x gerade: x=(8k+4)/3

seq((8k+4)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{4}{3}, 4, \frac{20}{3}, \frac{28}{3}, 12, \frac{44}{3}, \frac{52}{3}, 20, \frac{68}{3}, \frac{76}{3}, 28\right\}$$

x=12+8k, k∈Z

Vermutung: x=3j+8k, j,k∈**Z**

seq((8k+5)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{5}{3},\frac{13}{3},7,\frac{29}{3},\frac{37}{3},15,\frac{53}{3},\frac{61}{3},23,\frac{77}{3},\frac{85}{3}\right\}$$

seq((8k+6)/3,k,0,10,1)

$$\left\{2,\frac{14}{3},\frac{22}{3},10,\frac{38}{3},\frac{46}{3},18,\frac{62}{3},\frac{70}{3},26,\frac{86}{3}\right\}$$

seq((8k+7)/3,k,0,10,1)

$$\left\{\frac{7}{3},5,\frac{23}{3},\frac{31}{3},13,\frac{47}{3},\frac{55}{3},21,\frac{71}{3},\frac{79}{3},29\right\}$$

Ergebnis: Es treten alle Restklassen {0, 1, 2, . . . , 7} auf bei $x \in Z$

Beweis zu b)

$3x \equiv j \pmod 8$ bedeutet

$3x \equiv j \pmod 8 \equiv 8j+j \pmod 8 \equiv 9j+3*8k \pmod 8$

$\equiv 3*(3j+8k) \pmod 8$, d.h. $x=3j+8k$, $j,k \in Z$, d.h. $x \in Z$

c) Unterschiede:

in b) ist das **Repräsentantensystem** vollständig {0, 1, 2, . . . , 7}, in a) unvollständig auf {0, 3} begrenzt, da der Rest die Form $j=3i$, $i \in Z$, hat.

Beweis zu a)

$3x \equiv j \pmod 6$ bedeutet

$3x \equiv j \pmod 6 \equiv 6j+j \pmod 6 \equiv 7j+3*6k \pmod 6$

$\equiv 7*3i+3*6k \pmod 6 \equiv 3*(7i+6k) \pmod 6$,

d.h. der Rest hat die Form $j=3i$, $i \in Z$,

Repräsentantensystem reduziert sich auf {0, 3}

$x=i+6k$, $i,k \in Z$, d.h. $x \in Z$

Aufgabe 10*:

Zeigen Sie, dass die Zahlen der Form $x+\sqrt{2}y$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ bzgl. der "normalen" Multiplikation eine Halbgruppe mit neutralem Element bilden! Bilden sie auch eine Gruppe?

Lösung:

multiplikative Halbgruppe **H** mit dem Assoziativgesetz:

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

denn

$a := x_1+\sqrt{2}y_1$

$$x_1+\sqrt{2}\cdot y_1$$

$b := x_2+\sqrt{2}y_2$

$$x_2+\sqrt{2}\cdot y_2$$

$c := x_3+\sqrt{2}y_3$

$$x_3+\sqrt{2}\cdot y_3$$

$a \cdot b \cdot c$

$$(x_1+\sqrt{2}\cdot y_1)\cdot(x_2+\sqrt{2}\cdot y_2)\cdot(x_3+\sqrt{2}\cdot y_3)$$

expand(ans)

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3+\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_3+\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_3\cdot y_2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot y_3+\sqrt{2}\cdot x_2\cdot x_3\cdot y_1+2\cdot$$ ▶

$ans-(x_1\cdot x_2\cdot x_3+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot y_3+2\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_3+2\cdot x_3\cdot y_1\cdot y_2)$

$$\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_3+\sqrt{2}\cdot x_1\cdot x_3\cdot y_2+\sqrt{2}\cdot x_2\cdot x_3\cdot y_1+2\cdot\sqrt{2}\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3$$

factorOut(ans, $\sqrt{2}$)

$$\sqrt{2}\cdot(x_1\cdot x_2\cdot y_3+x_1\cdot x_3\cdot y_2+x_2\cdot x_3\cdot y_1+2\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3)$$

somit

$a\cdot b\cdot c=(x_1\cdot x_2\cdot x_3+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot y_3+2\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_3+2\cdot x_3\cdot y_1\cdot y_2)+\sqrt{2}\cdot(x_1\cdot x$ ▶

neutrales Element: $e=1+\sqrt{2}\cdot 0$

Gruppe:

vgl. Dörfler, Peschek (1988), S. 114, Def. 6.2.1

sei $M=\{x+\sqrt{2}y \mid x,y\in Z\}$ und $H=(M,\cdot)$

H ist assoziativ und es gibt ein neutrales Element,

ges. **inverses Element** $z^{-1}=x_1+\sqrt{2}y_1\in M$ zu $z=x_0+\sqrt{2}y_0$

mit $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=e=1+\sqrt{2}\cdot 0$

$(x_1+\sqrt{2}y_1)\cdot(x_0+\sqrt{2}y_0)=1+\sqrt{2}\cdot 0$ ergibt

$(x_1+\sqrt{2}y_1)\cdot(x_0+\sqrt{2}y_0)$

$$(x_0+\sqrt{2}\cdot y_0)\cdot(x_1+\sqrt{2}\cdot y_1)$$

simplify(ans)

$$\sqrt{2}\cdot(x_0\cdot y_1+x_1\cdot y_0)+x_0\cdot x_1+2\cdot y_0\cdot y_1$$

hieraus:

$x_0\cdot x_1+2\cdot y_0\cdot y_1=1$ und $x_0\cdot y_1+x_1\cdot y_0=0$

$\left.\begin{cases} x_0\cdot x_1+2\cdot y_0\cdot y_1=1 \\ x_0\cdot y_1+x_1\cdot y_0=0 \end{cases}\right|_{x_1,\,y_1}$

$$\left\{x_1=\frac{x_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2},\ y_1=\frac{-y_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}\right\}$$

im Allgemeinen sind $\frac{x_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}\notin Z$, $\frac{-y_0}{x_0^2-2\cdot y_0^2}\notin Z$,

damit ist H keine Gruppe.

Aufgabe 11:

Gegeben seien $z_1=-\sqrt{3}+3j$, $z_2=1-j$.

a) Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$ in arithmetischer Form!

b) Stellen Sie z_1 und z_2 in Exponentialform dar, berechnen Sie damit wiederum den Quotienten und leiten Sie daraus die arithmetische Form ab!

Lösung:

$z_1 := -\sqrt{3}+3j$

$$-\sqrt{3}+3\cdot j$$

$z_2 := 1-j$

$$1-j$$

a)

$\frac{z_1}{z_2}$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot(\sqrt{3}-3\cdot j)$$

cExpand(ans)

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot j$$

b)

$w_1 := \text{compToPol}(z_1)$

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot e^{\frac{\pi\cdot 2\cdot j}{3}}$$

$w_2 := \text{compToPol}(z_2)$

$$\sqrt{2}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-j}{4}}$$

$q := \text{compToPol}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$

$$\sqrt{6}\cdot e^{\frac{\pi\cdot 11\cdot j}{12}}$$

re(q)

$$\frac{-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}{2}$$

a:=simplify(ans)

$$\frac{-(\sqrt{3}+3)}{2}$$

im(q)

$$\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}$$

b:=simplify(ans)

$$\frac{-\sqrt{3}+3}{2}$$

$a+b\boldsymbol{j}$

$$\frac{-(\sqrt{3}+3)}{2}+\frac{(-\sqrt{3}+3)\cdot\boldsymbol{j}}{2}$$

Aufgabe 12:

Berechnen Sie $\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}$ für $a\in\mathbf{R}$ bzw. $a\in\mathbf{C}$!

Lösung:

für $a\in\mathbf{R}$ ergibt sich

$$\text{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\right)$$

$$-\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\right)\cdot\boldsymbol{j}$$

simplify(ans)

$$-\boldsymbol{j}$$

für $a\in\mathbf{C}$ ergibt sich

$$\text{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,|\,a=a_1+a_2\boldsymbol{j}\right)$$

$$-\boldsymbol{j}$$

z.B.

$$\text{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,|\,a=-2\right)$$

$$-\boldsymbol{j}$$

$$\text{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\,|\,a=5\right)$$

$$-\boldsymbol{j}$$

$\text{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\mid a=-2+3\boldsymbol{j}\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

$\text{cExpand}\left(\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}\mid a=0\right)$

$$-\boldsymbol{j}$$

Aufgabe 13:

Geben Sie für die folgenden Terme jeweils die Zerlegung in Linearfaktoren über **C** an!

$T_1=3x^2+12x+39 \quad T_2=x^2-6x+a, \ a\in\mathbf{R}.$

Lösung:

TR-Grundeinstellungen: Algeb Standard Kplx 2π

$\text{rFactor}(3x^2+12x+39)$

$$3\cdot(x+2+3\cdot\boldsymbol{j})\cdot(x+2-3\cdot\boldsymbol{j})$$

$\text{solve}(x^2-6x+a=0)$

$$\{x=-\sqrt{-a+9}+3, x=\sqrt{-a+9}+3\}$$

$\text{rFactor}(x^2-6x+a\mid a=9)$

$$(x-3)^2$$

Fallunterscheidung:

$a<9$ ergibt die **reelle** Faktorisierung

$(x-(\sqrt{-a+9}+3))(x-(-\sqrt{-a+9}+3))$

$$(x+\sqrt{-a+9}-3)\cdot(x-\sqrt{-a+9}-3)$$

simplify(ans)

$$x^2-6\cdot x+a$$

$a>9$ ergibt die **komplexe** Faktorisierung

$\sqrt{-a+9}+3=3+\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}$ und $-\sqrt{-a+9}+3=3-\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}$

$(x-(3+\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}))(x-(3-\sqrt{a-9}\,\boldsymbol{j}))$

$$(x+\sqrt{a-9}\cdot j-3)\cdot(x-\sqrt{a-9}\cdot j-3)$$

simplify(ans)

$$x^2-6\cdot x+a$$

Aufgabe 14:

Gegeben seien folgende Vektoren aus $\mathbf{R}^3$:

$$x_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 := \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sind die Vektoren $x_1, \ldots, x_4$ linear unabhängig? Bildet

$\{x_1, x_3, x_4\}$ eine Basis von $\mathbf{R}^3$?

Lösung:

vier Vektoren im $\mathbf{R}^3$ sind stets linear abhängig.

M:=augment(augment(x_1, x_3), x_4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

det(M)

$$0$$

$\{x_1, x_3, x_4\}$ bilden keine Basis von R^3, da sie linear abhängig sind.

Man erkennt unschwer: $x_1=$

$-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}x_4$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 15:

Gegeben seien folgende Vektoren:

$x_1:=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2:=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_3:=\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a) Begründen Sie sowohl rechnerisch als auch graphisch, dass die Vektoren x_1 und x_2 eine Basis von $\mathbf{R}^2$ bilden!

b) Stellen Sie unter Verwendung des Basisaustauschverfahrens x_3 als Linearkombination von x_1 und x_2 dar!

Lösung:

a)

M:=augment(x_1, x_2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

det(M)

6

det(M)≠0 bedeutet lineare Unabhängigkeit.

alternativ:

Die Abhängigkeitsbeziehung $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hat nur die triviale Lösung a=b=0.

graphisch:

angle(x_1, x_2)

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

approx(ans)

71.56505118

Die Vektoren schliessen einen Winkel von ca. 71,6° ein.

b) Ansatz $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = x_3$

solve($a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = x_3$, {a, b})

$$\{a=3, b=2\}$$

$a \cdot x_1 + b \cdot x_2$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a+b \\ 3 \cdot b \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ergibt:

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie die Produkte **AB** bzw. **ABCD** für

a)

$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$A \cdot B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -19 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$B := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -1 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -1 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$A \cdot B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & 1 \\ 17 & -12 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

c)

$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$B := \mathrm{trn}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösung:

A•B•C•D

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$