Prof. Dr. Ludwig Paditz WS2021/2022

HTW Dresden, Fak. Inf./Math.

Aufgaben zur ALGEBRA

Aufgabe 01:

Gegeben sei $A(x,y)$: $(x-y)^2 = x^2-y^2$,

$x,y \in \mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$.

a) Worum handelt es sich bei $A(x,y)$?

b) Geben Sie jeweils den Wahrheitswert an von

$\forall x \forall y$: $A(x,y)$ $\forall x \exists y$: $A(x,y)$

$\exists x \forall y$: $A(x,y)$ $\exists y \forall x$: $A(x,y)$.

c) Was ändert sich bei b), falls

$x,y \in \mathbb{N}^+=\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$ gilt?

(Bem.: DIN 5473:1992-07 u.a. Symbolik
Logik und Mengenlehre; Zeichen und Begriffe)

vgl. auch:

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft:

www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathe1infowirt2018w

/media/skript_aussagenlogikmengen.pdf

Aufgabe 02:

Vereinfachen Sie die Terme A\(A\B) und (A\A)\B mittels Veranschaulichung in einem VENN-Diagramm!

Welchen Schluß ziehen Sie daraus für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Operation \ (Mengendifferenz)?

Aufgabe 03:

In der Menge M={1,2,3,4} werde die Relation

R={(x,y)|ggt(x,y)=1}   ggt: größter gemeinsamter Teiler betrachtet.

a) Geben Sie **R** als Menge (von Zahlenpaaren) vollständig an!

b) Welche Eigenschaften hat diese Relation, welche nicht?

Bem.: s. **Einführung in die Mathematik für**

Informatiker (Dörfler, Peschek 1988, Hanser-Verl.)

Kapitel 3: Relationen und Abbildungen (S.40ff)

Aufgabe 04*:

Bezüglich der beiden zweistelligen mengentheoretischen Operationen $\times$ und $\cap$ lassen sich zwei verschiedene Distributivgesetze formulieren.

a) Wie lauten diese Formulierungen?

b) Das eine dieser beiden Gesetze gilt tatsächlich, das andere nicht. Welches der beiden gilt?

Verdeutlichen Sie sich dabei die Beziehung in einem kartesischen Koordinatensystem

anhand der drei Mengen $A=[2;4]$, $B=[1;4]$, $C=[3;6]$!

Aufgabe 05:

Betrachtet werde die Relation $\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x+y \text{ gerade}\}$ in **Z**. Zeigen Sie, dass **R** eine **Äquivalenzrelation** ist!

In welche Mengen wird **Z** durch diese Relation zerlegt?

Ist auch die Relation $\mathbf{R}=\{(x,y)|x+y \text{ ungerade}\}$ eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 06:

Die Operation $ggt(x,y)$ in $\mathbf{N}^+$ ist offenbar kommutativ und idempotent, außerdem ist sie assoziativ.

a) Um welche algebraische Struktur handelt es sich mithin bei $[N^+; ggt]$?

b) Besitzt diese Struktur ein neutrales Element?

Aufgabe 07:

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbf{N}$ den Wert des Terms

$15^{4k}(17)$!

(vgl. auch Dörfler, Peschek (1988):

Kap. 1.6 Stellenwertsysteme,

Kap. 1.7 Zahlendarstellung am Computer,

Kap. 1.8 Elementare Begriffe der Zahlentheorie)

Aufgabe 08:

Lösen Sie die (linearen) Kongruenzen $2x \equiv 1(7)$, $2x \equiv 1(8)$ und $2x \equiv 2(8)$!

Aufgabe 09:

Für die folgende Aufgabe wird jeweils das **Repräsentantensystem** $\{0,...,m-1\}$ bzgl. der Restklassen modulo m zugrundegelegt.

Berechnen Sie alle Produkte 3x (also $3 \cdot 0$, $3 \cdot 1$ usw.), jeweils für den Modul $m=6$ und den Modul $m=8$!

Welchen qualitativen Unterschied stellen Sie fest? Worin ist er begründet?

Dörfler, Peschek (1988) S. 21 u. Def. 1.8.5:

vollständiges Restsystem R aller Restklassen

$r \in \mathbf{R} = \{0,...,m-1\}$

vgl. auch:

lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-4.pdf

lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-04-7.pdf

Aufgabe 10*:

Zeigen Sie, dass die Zahlen der Form $x+\sqrt{2}y$ mit $x, y \in \mathbf{Z}$ bzgl. der "normalen" Multiplikation eine Halbgruppe mit neutralem Element bilden! Bilden sie auch eine Gruppe?

Aufgabe 11:

Gegeben seien $z_1=-\sqrt{3}+3\boldsymbol{j}$, $z_2=1-\boldsymbol{j}$.

a) Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$ in arithmetischer Form!

b) Stellen Sie z_1 und z_2 in Exponentialform dar, berechnen Sie damit wiederum den Quotienten und leiten Sie daraus die arithmetische Form ab!

Aufgabe 12:

Berechnen Sie $\frac{1+a\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}-a}$ für $a \in \mathbf{R}$ bzw. $a \in \mathbf{C}$!

Aufgabe 13:

Geben Sie für die folgenden Terme jeweils die Zerlegung in Linearfaktoren über **C** an!

$T_1=3x^2+12x+39 \quad T_2=x^2-6x+a,\ a\in\mathbf{R}.$

Aufgabe 14:

Gegeben seien folgende Vektoren aus $\mathbf{R}^3$:

$$x_1:=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\ x_2:=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix},\ x_3:=\begin{bmatrix}-6\\2\\0\end{bmatrix},\ x_4:=\begin{bmatrix}0\\1\\9\end{bmatrix}$$

Sind die Vektoren $x_1, \ldots, x_4$ linear unabhängig? Bildet $\{x_1, x_3, x_4\}$ eine Basis von $\mathbf{R}^3$?

Aufgabe 15:

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$x_1:=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\ x_2:=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ x_3:=\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$$

a) Begründen Sie sowohl rechnerisch als auch graphisch, dass die Vektoren x_1 und x_2 eine Basis von $\mathbf{R}^2$ bilden!

b) Stellen Sie unter Verwendung des Basisaustauschverfahrens x_3 als Linearkombination von x_1 und x_2 dar!

Aufgabe 16:

Berechnen Sie die Produkte **AB** bzw. **ABCD** für

a)

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B:=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$A:=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B:=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -1 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B:=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$C:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $D:=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 17:

Gegeben seien

$x:=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y:=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Berechnen Sie $x^T y$, xy^T und xy!

Aufgabe 18:

Berechnen Sie

$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$!

Aufgabe 19:

Lösen Sie die Matrizengleichung **X=AX+B**

a) allgemein

b) für $A=\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$!

Aufgabe 20:

a) Welcher Schluß läßt sich über den Rang einer Matrix (ungleich N) des Typs (17,4) ziehen, wenn offensichtlich die 3. Spalte Vielfaches der 1. Spalte, nicht aber der 4. Spalte ist?

b) Was ändert sich, wenn bei gleichem Typ dieser Sachverhalt nicht für die Spalten, sondern für die Zeilen gilt?

Aufgabe 21:

Untersuchen (nicht: berechnen!) Sie mittels des Basisaustauschverfahrens, ob die Matrix

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ regulär ist! Welche (wichtige) Frage ist damit gleichbedeutend?

Bem.: **Basisaustauschverfahren = Pivotverfahren**

Austauschverfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung!

Anzahl der möglichen Austauschschritte = Rang

Aufgabe 22:

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ und

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sowie das Spatprodukt von $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$!

Aufgabe 23:

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$

$-2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$

$-2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -6$

a) Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise an!

b) Welche Aussagen über die Lösbarkeit des

Gleichungssystems lassen sich allein aufgrund seiner Form (d.h. Anzahl Variablen und Gleichungen) treffen?

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels des Basisaustauschverfahrens! Beginnen Sie den Algorithmus an der Position (1,1) der Koeffizientenmatrix! Geben Sie die Lösung in vektorieller Form an!

d) Gibt es eine Lösung, bei der $x_2=-2x_3$ gilt? Wenn ja, geben Sie sie an, wenn nein, begründen Sie dies!

Aufgabe 24:

Lösen Sie mittels des Basisaustauschverfahrens das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2z &= -1 \\ -2x - y &= 0 \\ 3x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung vektoriell an! Ermitteln Sie (daraus) alle Lösungen, für die $|z| = 2$ gilt!

Aufgabe 25:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+2y \quad &= 3 \\ y+3z &= 4 \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems anhand des Lösbarkeitskriteriums!

b) Fügen Sie (auf möglichst einfache Weise) eine dritte Gleichung hinzu, so dass das dann entstehende System **nicht** lösbar ist! (Begründung!)

c) Was ergäbe sich für a) und b), wenn es sich um homogene Gleichungssysteme (bei gleicher linker Seite) handeln würde?

Aufgabe 26:

Gegeben sei das Gleichungssystem mit $a,b,c \in \mathbf{R}$

$x+ay=1$

$bx+y=c$

Geben Sie anhand des Basisaustauschverfahrens und des

Lösbarkeitskriteriums jeweils ein Beispiel und die allgemeinen Bedingungen dafür an, dass das Gleichungssystem

a) eindeutig lösbar

b) mehrdeutig lösbar

c) unlösbar ist (oder begründen Sie, dass der betrachtete Fall nicht auftreten kann)!

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) Wie lautet die zugehörige quadratische Form $Q = x^T\mathbf{S}x$ mit $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ explizit?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von S!

c) Bestimmen Sie einen normierten Eigenvektor, der zum betragsgrößten Eigenwert von S gehört!

d) Berechnen Sie die restlichen Eigenvektoren, und geben

Sie die Transformationsmatrix **C** an!

(Hinweis: Beachten Sie die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte und eine daraus resultierende Eigenschaft der Eigenvektoren! Überprüfen Sie diese Eigenschaft!)

Aufgabe Z28:

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit dem Austauschverfahren

a) Start mit Pivot a_{11}

$$ST := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Start mit Pivot a_{21}, d.h. $y_2 \Leftrightarrow x_1$

$$ST := \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Start mit Pivot a_{12}, d.h. $y_1 \Leftrightarrow x_2$

$$ST:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

d) Für welche λ ist das LGS nichttrivial lösbar? Wie lauten die Lösungen?

$$ST:=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe Z29:

Modell der Teileverflechtung (Verflechtungsdiagramm, zweistufiger Prozeß)

M→Z→E

M – Ausgangsmaterialien

Z – Zwischenprodukte

E – Endprodukte

Ausgehend von dem gezeigten Diagramm wissen wir, dass zur Herstellung von zwei Endprodukten $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ zwei Zwischenprodukte $\mathbf{Z_1, Z_2}$ benötigt werden, welche wiederum aus den Ausgangsmaterialien (Rohstoffe) $\mathbf{M_1}$ bis $\mathbf{M_3}$ zusammengesetzt werden können.

Materialfluss in Tabellenform:

$$\begin{bmatrix} \rightarrow & Z_1 & Z_2 \\ M_1 & 6 & 4 \\ M_2 & 3 & 0 \\ M_3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \rightarrow & E_1 & E_2 \\ Z_1 & 1 & 2 \\ Z_2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Wir stellen zuerst die **Bedarfsmatrix** $\mathbf{B_2}$ für die Herstellung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten auf:

$$B2:=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Nehmen wir den Vektor $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ als Outputvektor (Warenproduktion) und $\mathbf{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ als Inputvektor der Zwischenprodukte, so gilt ja $\mathbf{z}=\mathbf{B_2}\cdot\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{w}$, d.h.

$z_1=1w_1+2w_2$, $z_2=1w_1+3w_2$,

Im nächsten Schritt bestimmen wir nun die **Bedarfsmatrix** $\mathbf{B_1}$ für die Produktion der Zwischenprodukte aus den

Ausgangsmaterialien (Rohstoffen):

$$B1:=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Für den Inputvektor **m** der Rohstoffe gilt in diesem Falle

$\mathbf{m}=\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{z}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{z}$, d.h. $m_1=6z_1+4z_2$, $m_2=3z_1+0z_2$,

$m_3=1z_1+2z_2$,

Natürlich kann man den Bedarf an Rohstoffen für einen

bestimmten Auftrag auch direkt berechnen:
$\mathbf{m}=\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{B_2}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}$,

d.h.

$m_1=6(1w_1+2w_2)+4(1w_1+3w_2)=10w_1+24w_2$,

$m_2=3(1w_1+2w_2)+0(1w_1+3w_2)= 3w_1+ 6w_2$,

$m_3=1(1w_1+2w_2)+2(1w_1+3w_2)= 3w_1+ 8w_2$,

Symbolik:

m_i – Anzahl der Einheiten von M_i

z_j – Anzahl der Einheiten von Z_j

w_k – Anzahl der Einheiten von W_k

a) Wie viele Einheiten $\mathbf{M_i}$, i=1,2,3, werden für eine Einheit $\mathbf{E_j}$, j=1,2, benötigt?

$$\begin{bmatrix} \rightarrow & E_1 & E_2 \\ M_1 & \square & \square \\ M_2 & \square & \square \\ M_3 & \square & \square \end{bmatrix}$$

b) geg. sei die Warenproduktion $\mathbf{E_1}$=12 und $\mathbf{E_2}$=20, ges. der Materialbedarf.

Aufgabe Z30:

Basiswechsel mittels Austauschverfahren

alte Basisdarstellung mit Basis $\{b_1, b_2\}$

$e_1=1b_1+2b_2+7$, $e_2=0b_1-1b_2-2$

ergibt neue Basisdarstellung mit Basis $\{e_1, e_2\}$

$b_1=1e_1+2e_2+4$, $b_2=0e_1-1e_2+2$

Hinweis:

$b_1 \Leftrightarrow e_1$ $\qquad$ $b_2 \Leftrightarrow e_2$

$$\begin{bmatrix} BV & b_1 & b_2 & d \\ e_1 & 1 & 2 & 7 \\ e_2 & 0 & -1 & -2 \\ K & * & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BV & e_1 & b_2 & d \\ b_1 & 1 & -2 & -7 \\ e_2 & 0 & -1 & -2 \\ K & 0 & * & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BV & e_1 & e_2 & d \\ b_1 & 1 & 2 & -3 \\ b_2 & 0 & -1 & -2 \\ K & & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe Z31:

Lösen Sie folgende LGS:

a) $x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

b) $x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Aufgabe Z32:

geg.: $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4$

mit $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 + 3\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_3 + 4\mathbf{a}_4$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{a}_3 + 6\mathbf{a}_4$

ges.: x_1, x_2, x_3, x_4