ET-Ü11 - SS2014
================

Extremwertaufgaben
D6.2c,e,g; 3b,c; 10

Aufg. 2c
=========
Define $f(x,y)=\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)$

done

Bereich $B=\{(x,y)|0\leq x\leq\frac{\pi}{2},0\leq y\leq\frac{\pi}{2}\}$

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{cases}\right|_{x,y}$$

ERROR:Insufficient Memory

$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl1$

$\cos(x+y)+\cos(x)=0$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl2$

$\cos(x+y)+\cos(y)=0$

$Gl1-Gl2 \Rightarrow Gl3$

$\cos(x)-\cos(y)=0$

Im Bereich B ergibt sich x=y, wegen cos(x)=cos(y)

Gl1|y=x

$\cos(x)+\cos(2\cdot x)=0$

solve(Gl1|y=x,x)

$\{x=2\cdot\pi\cdot \text{constn}(1)+\pi, x=2\cdot\pi\cdot \text{constn}(2)-\frac{\pi}{3}, x=2\cdot\pi\cdot \text{cons}$ ▸

Wegen B gibt es die einzige Lösung $x=y=\frac{\pi}{3}$

Hinr. Bed.:

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\times\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x\right.\right.$▸

done

$D(x,y)|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+3$$

Wegen D>0 liegt ein Extremwert vor.

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$-\sqrt{3}$$

$\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$-\sqrt{3}$$

Wegen $f_{xx}=f_{yy}<0$ liegt ein lok.Maximum vor.

Ergebnis:

$f(x,y)|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$$

□

$P\_max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

3D-Grafik

Aufg. 2e

=========

Define $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-x\times y$

done

B={(x,y)|x≠0,y≠0} bedeutet, dass die x- und y-Achse aus dem Def.-Bereich von f herausfallen. Damit zerfällt die Fläche f in vier Teilflächen über den jeweiligen Quadranten.

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{cases}\right|_{x,y}$$

$\{x=-1,y=-1\}$

$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl1$

$$\frac{-\left(x^2\cdot y+1\right)}{x^2}=0$$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl2$

$$\frac{-\left(x\cdot y^2+1\right)}{y^2}=0$$

Es gibt die einzige Lösung x=y=-1

Hinr. Bed.:

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\times\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(\triangleright\right.\right.$

done

$D(x,y)|x=-1 \text{ and } y=-1$

5

Wegen D>0 liegt ein Extremwert vor.

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=-1 \text{ and } y=-1$

$$-2$$

$\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))|x=-1 \text{ and } y=-1$

$$-2$$

Wegen $f_{xx}=f_{yy}<0$ liegt ein lok.Maximum vor.

Ergebnis:

f(x,y)|x=-1 and y=-1

$$-3$$

P_max(-1,-1,-3)

3D-Grafik

Aufg. 2g

=========

Define $f(x,y)=\frac{x^4}{16}+\frac{x^2y^2}{8}-\frac{x^2}{8}+\frac{y^4}{16}-\frac{y^2}{2}$

done

B=$\mathbf{R}^2$

Damit besteht die Fläche f aus einem Stück.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{array}\right|_{x,y}$$

{{x=-1,y=0},{x=0,y=-2},{x=0,y=0},{x=0,y=2},{x=▸

$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl1$

$$\frac{x^3+x\cdot y^2-x}{4}=0$$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl2$

$$\frac{y^3+x^2\cdot y-4\cdot y}{4}=0$$

Man erkennt zunächst die Lösung x=y=0.

Weitere Fälle:
x=0 und y≠0:

simplify(Gl2/y×4)|x=0⇒Gl3

$$y^2-4=0$$

solve(Gl3,y)

$$\{y=-2,y=2\}$$

Es gibt hier die Lösungen x=0,y=-2 bzw. x=0,y=2

Weitere Fälle:
x≠0 und y=0:

simplify(Gl1/x×4)|y=0⇒Gl4

$$x^2-1=0$$

solve(Gl4,x)

$$\{x=-1,x=1\}$$

Es gibt hier die Lösungen x=-1,y=0 bzw. x=1,y=0

Damit gibt es fünf extremwertverdächtige Stellen für die gegekrümmte Fläche 4. Ordnung:
P1(0;0), P2(0;-2), P3(0;2), P4(-1;0), P5(1;0)

Hinr. Bed.:

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\times\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f()\right.\right.$▸

done

{D(x,y)|{x=0,y=0},D(x,y)|{x=0,y=-2},D(x,y)|{x=▸

$$\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{8},-\frac{3}{8}\right\}$$

d.h. für P4 und P5 gibt es kein Extremum:

$$\begin{bmatrix} D(x,y)|\{x=0,y=0\} \\ D(x,y)|\{x=0,y=-2\} \\ D(x,y)|\{x=0,y=2\} \\ D(x,y)|\{x=-1,y=0\} \\ D(x,y)|\{x=1,y=0\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -3/8 \\ -3/8 \end{bmatrix}$$

Wegen D>0 für P1, P2, P3 liegen drei Extremwerte vor.

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=0 \text{ and } y=0$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=0 \text{ and } y=-2$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=0 \text{ and } y=2$$

$$\frac{3}{4}$$

Wegen $f_{xx}=f_{yy}<0$ liegt bei P1 ein lok.Maximum vor.
Wegen $f_{xx}=f_{yy}>0$ liegen bei P2 und P3 ein lok.Minima vor.

Ergebnis:

f(x,y)|x=0 and y=0

0

f(x,y)|x=0 and y=-2

-1

f(x,y)|x=0 and y=2

-1

P_max(0,0,0)
P_min(0,-2,-1) und P_min(0,2,-1)

3D-Grafik	Z1:… Z2:…

Aufg. 3b
=========
Fläche dritter Ordnung mit Parabel als NB
(!Skizze als Karte mit Höhenlinien und NB)

Define $F(x,y,\lambda)=6x^2y+\lambda x(x^2-y-8)$

done

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{array}\right|_{x,y,\lambda}$$

$\{\{x=-2,y=-4,\lambda=24\},\{x=0,y=-8,\lambda=0\},\{x=2,y=-4,\lambda=2$▸

$6x^2y|\{x=0,y=-8\}$

0

$6x^2y|\{x=-2,y=-4\}$

-96

$6x^2y|\{x=2,y=-4\}$

-96

Die Fläche ist überall definiert und zusammenhängend.
Damit ist P_max(0,-8,0) und
P_min(-2,-4,-96) sowie P_min(2,-4,-96).

Aufg. 3c
=========
Fläche vierter Ordnung mit Gerade als NB
(!Skizze als Karte mit Höhenlinien und NB)

Define $F(x,y,\lambda)=x^2y^2+\lambda\times(2x+6y-12)$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{cases}\right|_{x,y,\lambda}$$

$\{\{x=0,y=2,\lambda=0\},\{x=3,y=1,\lambda=-3\},\{x=6,y=0,\lambda=0\}\}$

$x^2y^2|\{x=0,y=2\}$

0

$x^2y^2|\{x=3,y=1\}$

9

$x^2y^2|\{x=6,y=0\}$

0

Die Fläche ist überall definiert und zusammenhängend.
Damit ist P_max(3,1,9) und
P_min(0,2,0) sowie P_min(6,0,0).

Aufg. 10

=========

ellipt. Paraboloid:

$z=x^2+2y^2 \Rightarrow Gl1$

$$z=x^2+2\cdot y^2$$

Ebene:

$4x-8y-z+24=0 \Rightarrow Gl2$

$$4\cdot x-8\cdot y-z+24=0$$

Schnittkurve:

$Gl2|Gl1 \Rightarrow Gl3$

$$-x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-8\cdot y+24=0$$

Gl3 ist die NB für Gl1 oder Gl2

Define $F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda\times(-x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-8\cdot y+24)$

done

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0 \\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0 \\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0 \end{array}\right|_{x,y,\lambda}$$

$$\left\{\left\{x=-2\cdot\sqrt{3}+2, y=2\cdot\sqrt{3}-2, \lambda=\frac{-\sqrt{3}}{3}+1\right\}, \left\{x=2\cdot\sqrt{3}+2, y\right.\right.$$

$x^2+2y^2|\{x=-2\cdot\sqrt{3}+2, y=2\cdot\sqrt{3}-2\}$

$$3\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)^2$$

approx(ans)

$$6.430780618$$

$x^2+2y^2|\{x=2\cdot\sqrt{3}+2, y=-2\cdot\sqrt{3}-2\}$

$$3\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+2\right)^2$$

approx(ans)

$$89.56921938$$

Ergebnis:

$P\_max\left(2\cdot\sqrt{3}+2,-2\cdot\sqrt{3}-2,3\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+2\right)^2\right)$

$P\_min\left(-2\cdot\sqrt{3}+2,2\cdot\sqrt{3}-2,3\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)^2\right)$

gerundet:

$\text{approx}\left(\left\{2\cdot\sqrt{3}+2,-2\cdot\sqrt{3}-2,3\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+2\right)^2\right\}\right)$

$$\{5.464101615,-5.464101615,89.56921938\}$$

$\text{approx}\left(\left\{-2\cdot\sqrt{3}+2,2\cdot\sqrt{3}-2,3\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)^2\right\}\right)$

$$\{-1.464101615,1.464101615,6.430780618\}$$

Hinw.:

Die NB beschreibt eine Ellipse

$-x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-8\cdot y+24=0,$

das ergibt mit quadratischer Ergänzung:

$x^2-4x+4+2\cdot\left(y^2+4y+4\right)=24+4+8=36$

d.h.

$(x-2)^2+2(y+2)^2=36$

Normalform:

$$\left(\frac{x-2}{6}\right)^2+\left(\frac{y+2}{3\sqrt{2}}\right)^2=1$$

Parameterdarstellung der Schnittkurve:

Define xst1(s,t)=2+6cos(t)

done

Define $\text{yst1}(s,t)=-2+3\sqrt{2}\sin(t)$

done

Define zst1(s,t)=4xst1(s,t)-8yst1(s,t)+24

done

3D-Grafik

$\frac{d}{dt}(zst1(s,t))=0$

$$-24\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(t)-24\cdot\sin(t)=0$$

solve(ans,t)

$$\left\{t=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\cdot\text{constn}(1)-\frac{\pi}{2}\right\}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\cdot 0-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t1$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\cdot 1-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t2$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$$

approx({t1,t2})

$$\{-0.9553166181,2.186276035\}$$

{xst1(s,t),yst1(s,t),zst1(s,t)}|t=t1

$$\left\{2\cdot\sqrt{3}+2,-2\cdot\sqrt{3}-2,12\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+2\right)+24\right\}$$

approx(ans)

$$\{5.464101615,-5.464101615,89.56921938\}$$

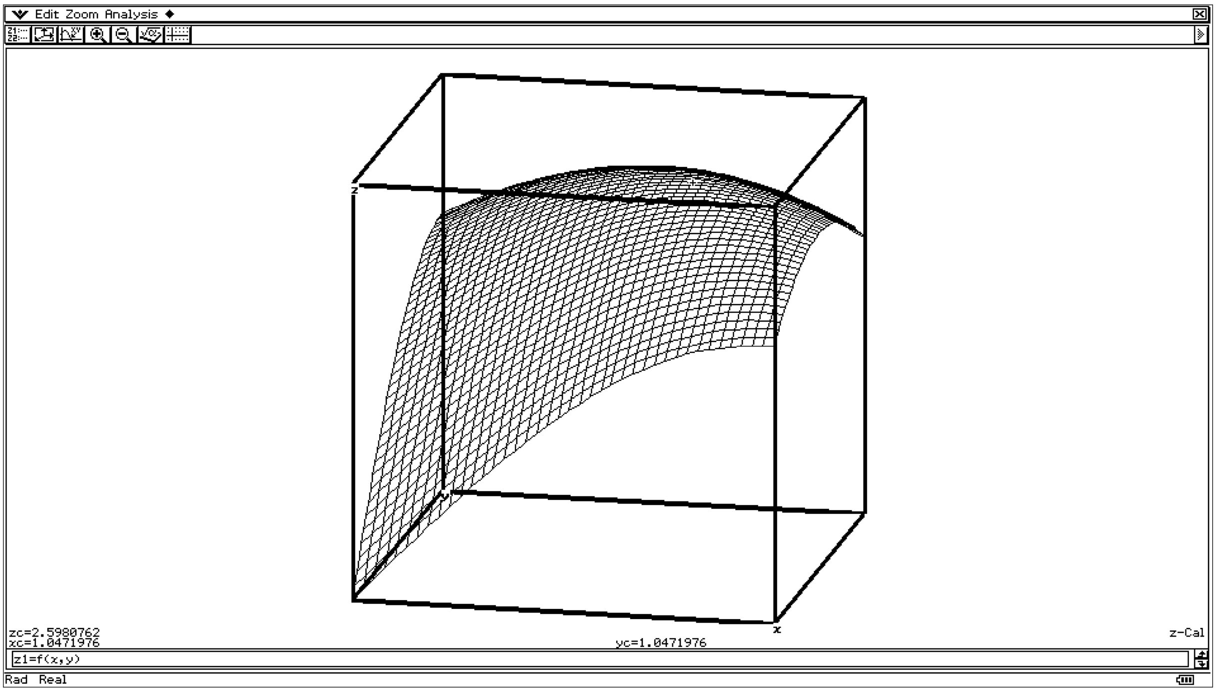
{xst1(s,t),yst1(s,t),zst1(s,t)}|t=t2

$$\left\{-2\cdot\sqrt{3}+2,2\cdot\sqrt{3}-2,-12\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)+24\right\}$$

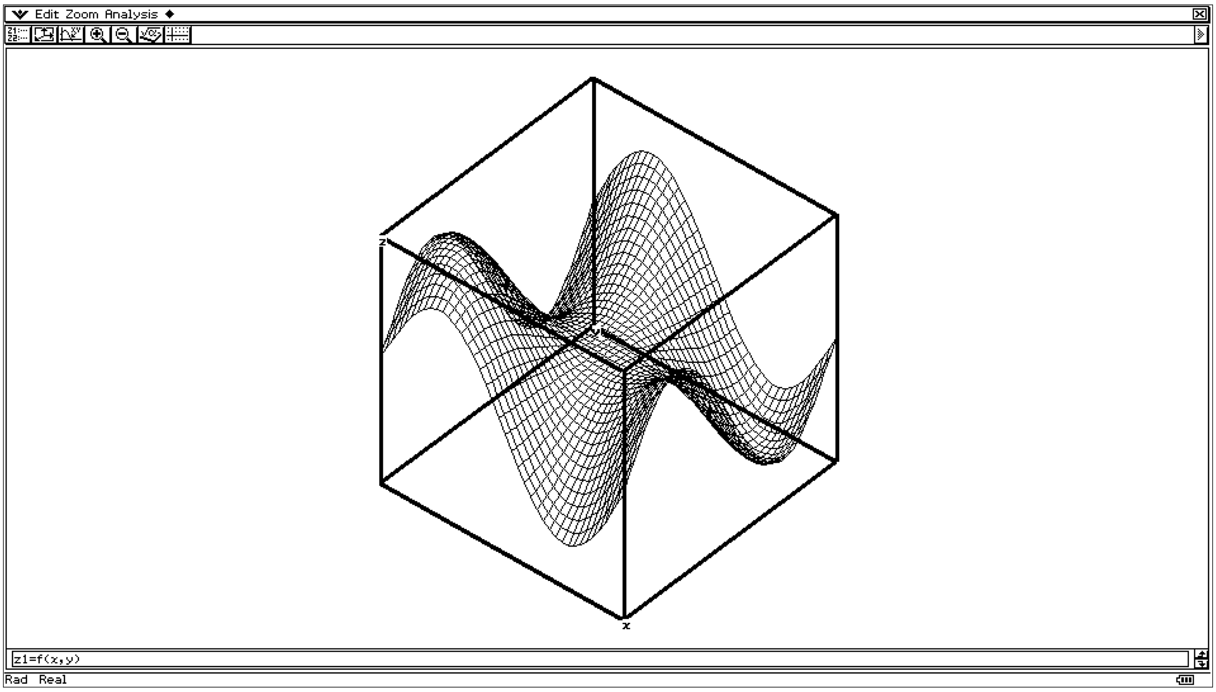
approx(ans)

$$\{-1.464101615,1.464101615,6.430780618\}$$

Aufg. D6.2c



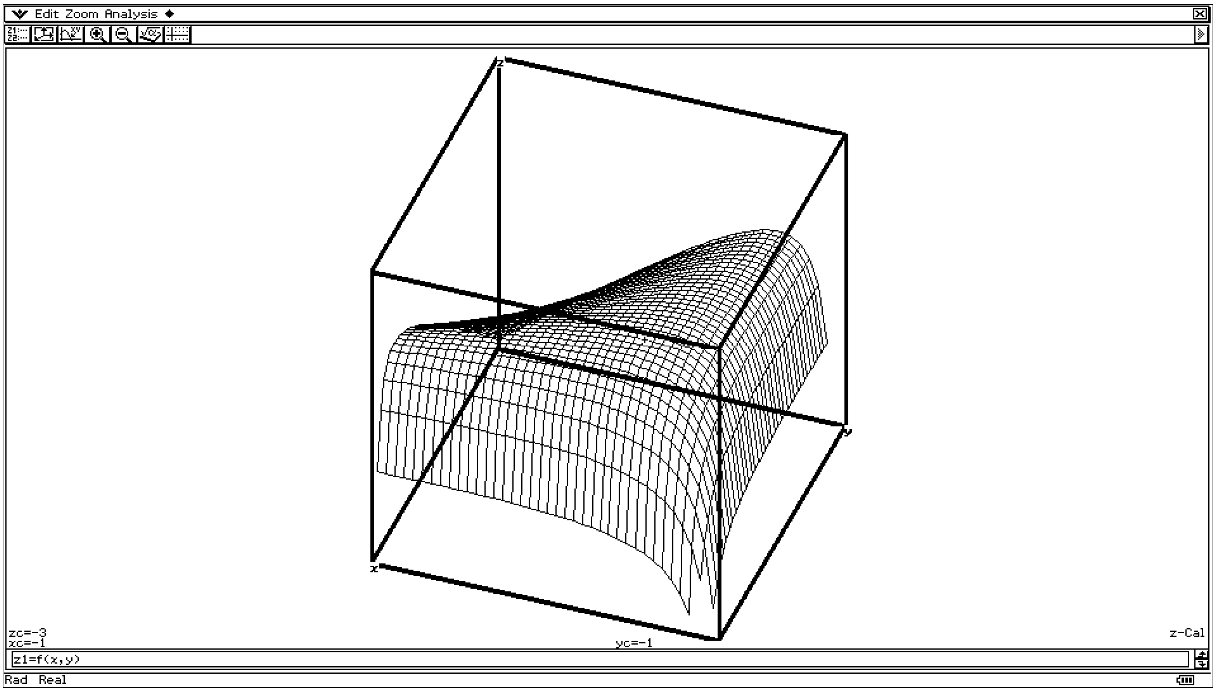
Lage des Flächenstückes über B im 1.Oktanten.



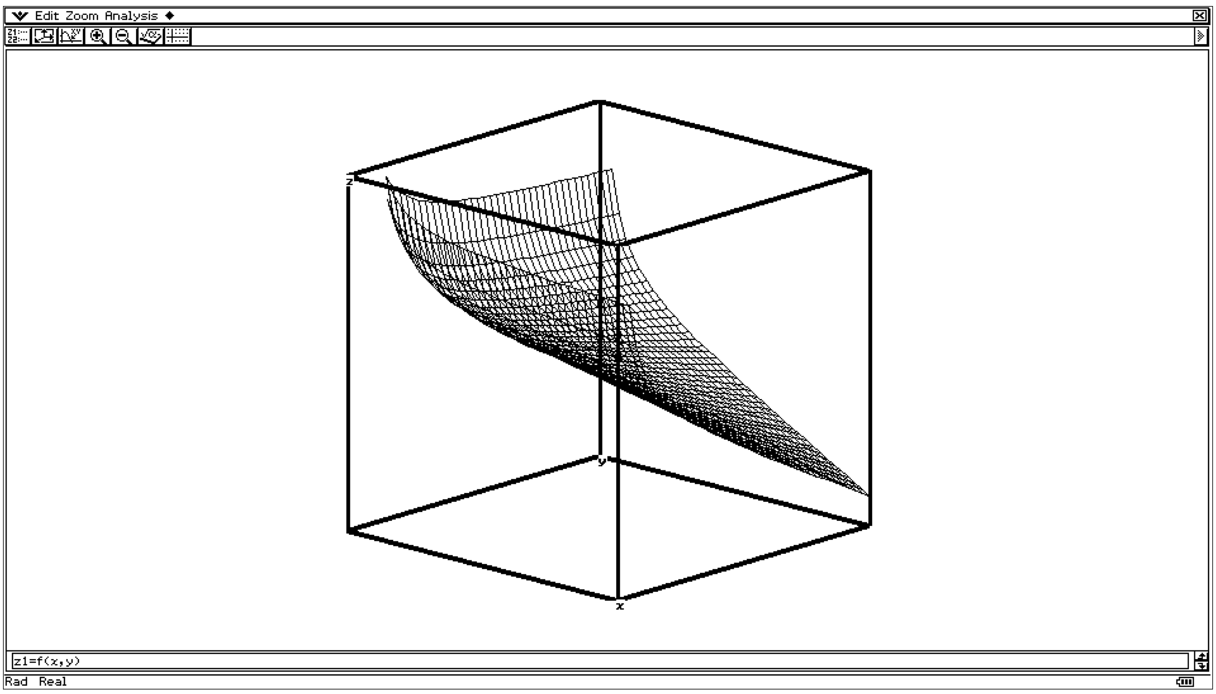
Flächenstück über dem Bereich 0 bis 2pi (für x und y)

Bem.: wegen der Periodizität ergibt sich etwa das Oberflächenprofils eines Eierstapelbehältnisses, wie man es oftmals in Kaufhallen sieht.

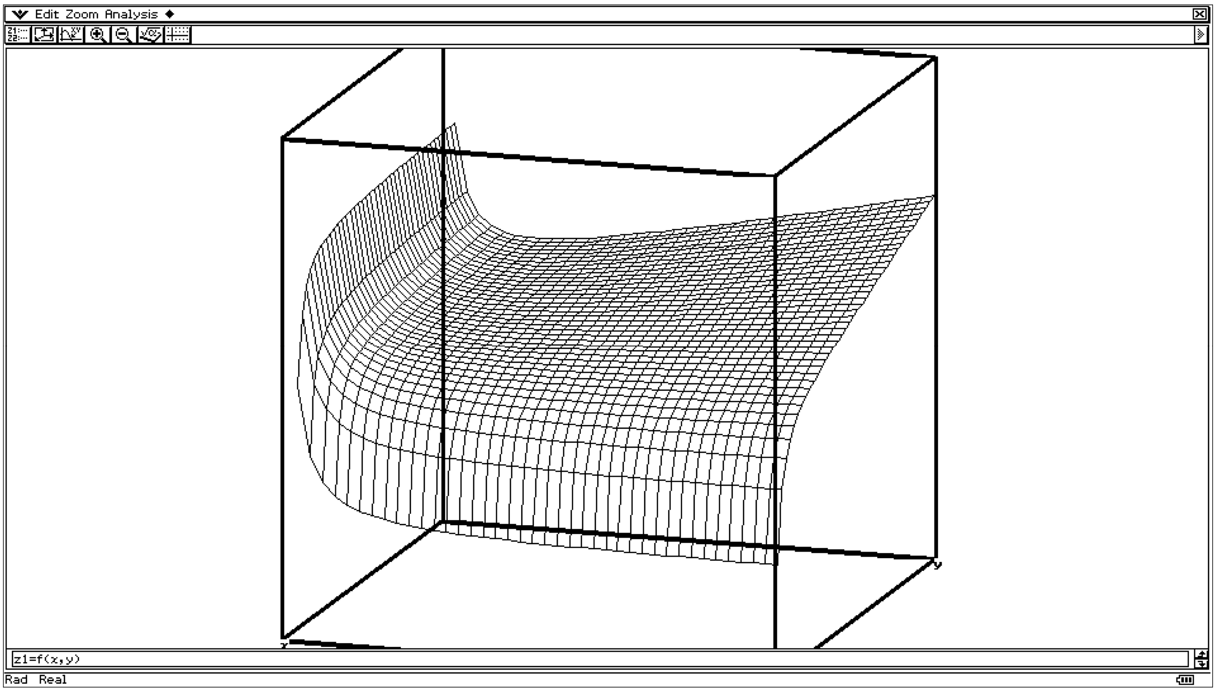
Aufg. D6.2e



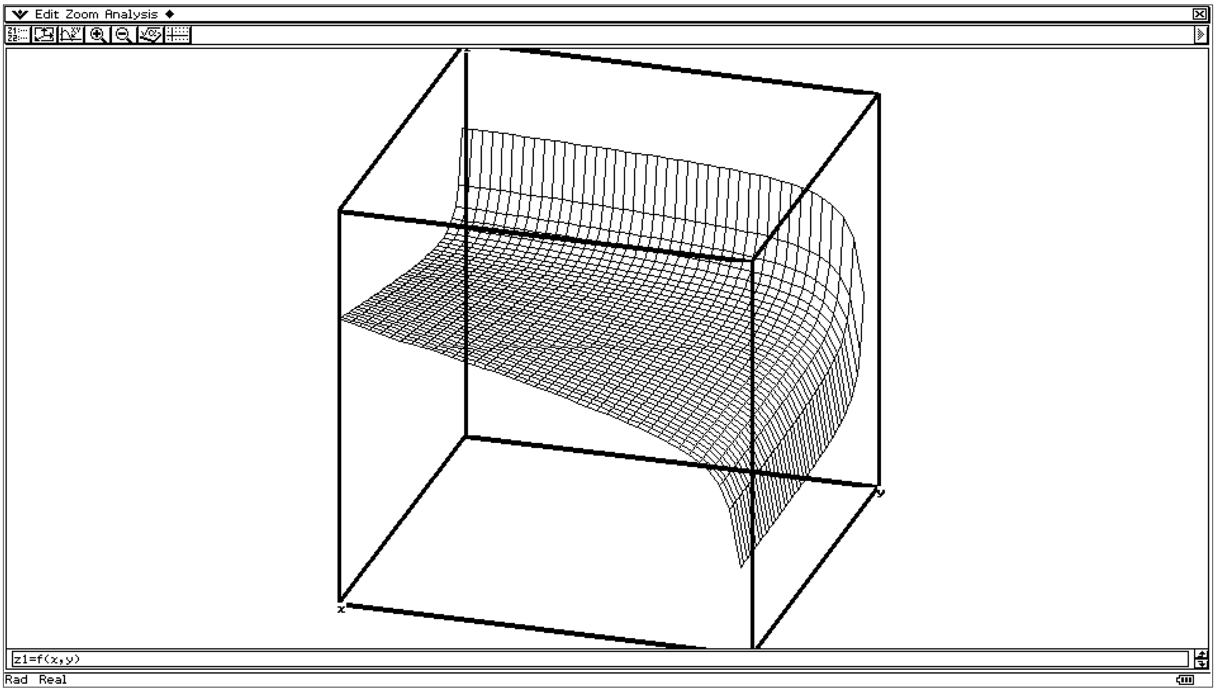
Lage der Teilfläche unter dem III. Quadranten (-3<x<0, -3<y<0, -10<z<0) mit dem Hochpunkt



Lage der Teilfläche über dem I. Quadranten (streng monoton fallend)

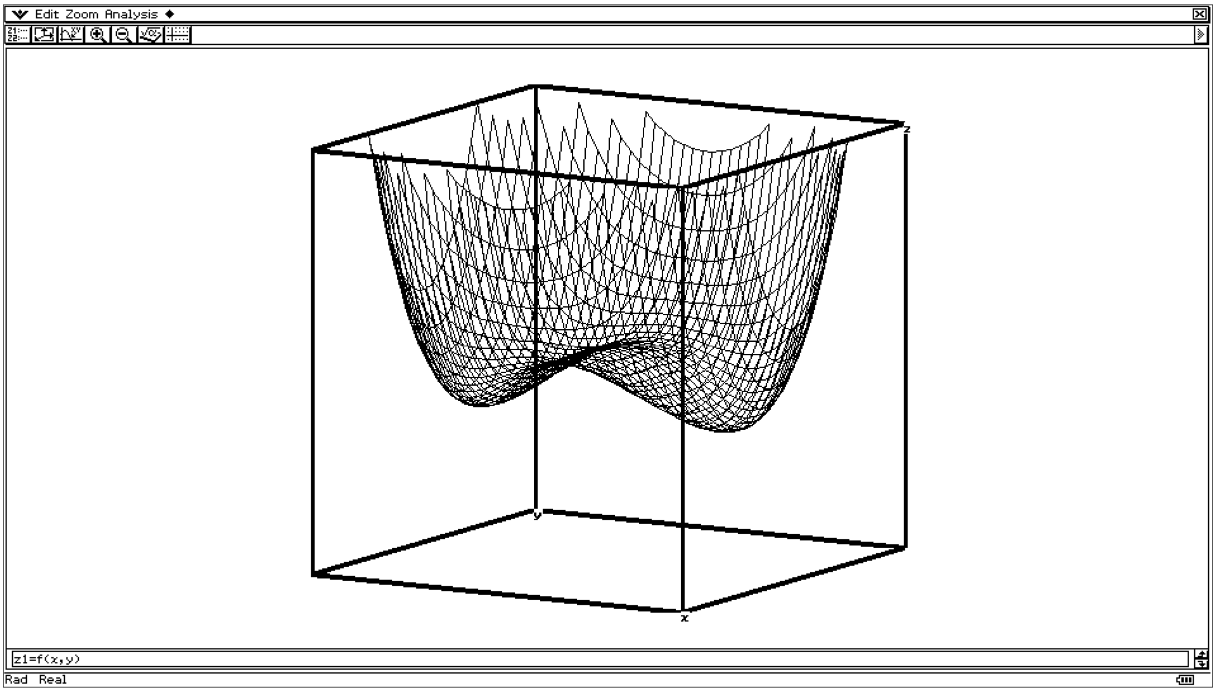


Lage der Teilfläche über dem II. Quadranten



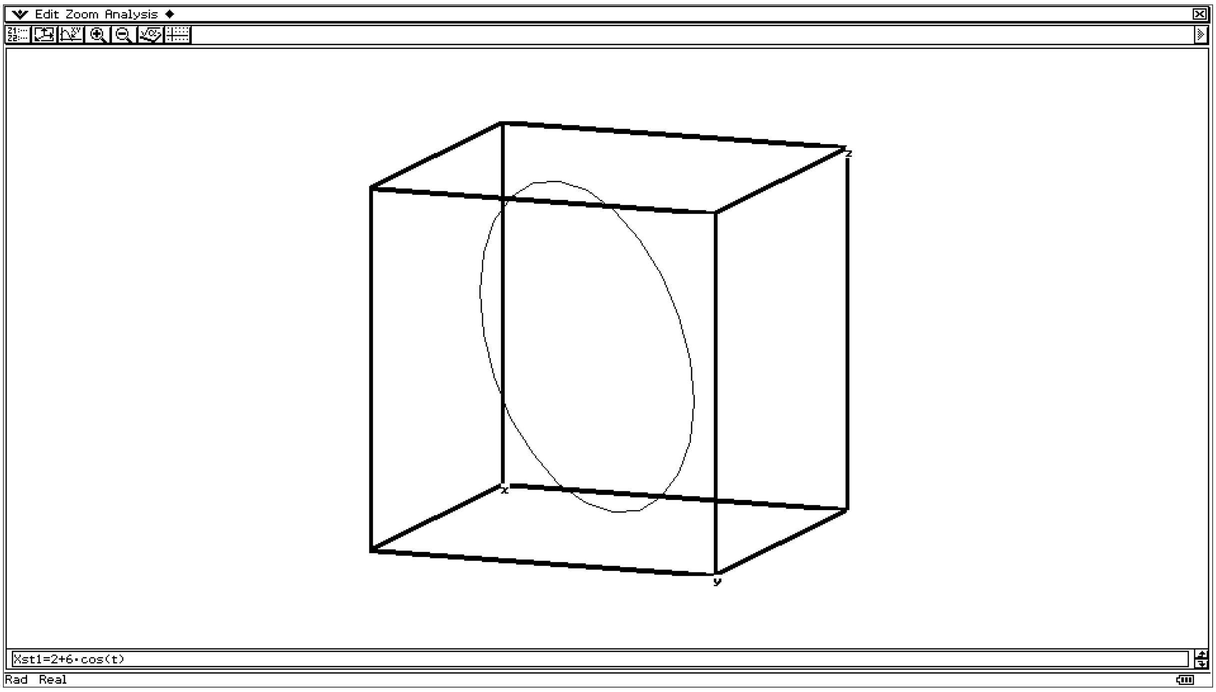
Lage der Teilfläche über dem IV. Quadranten

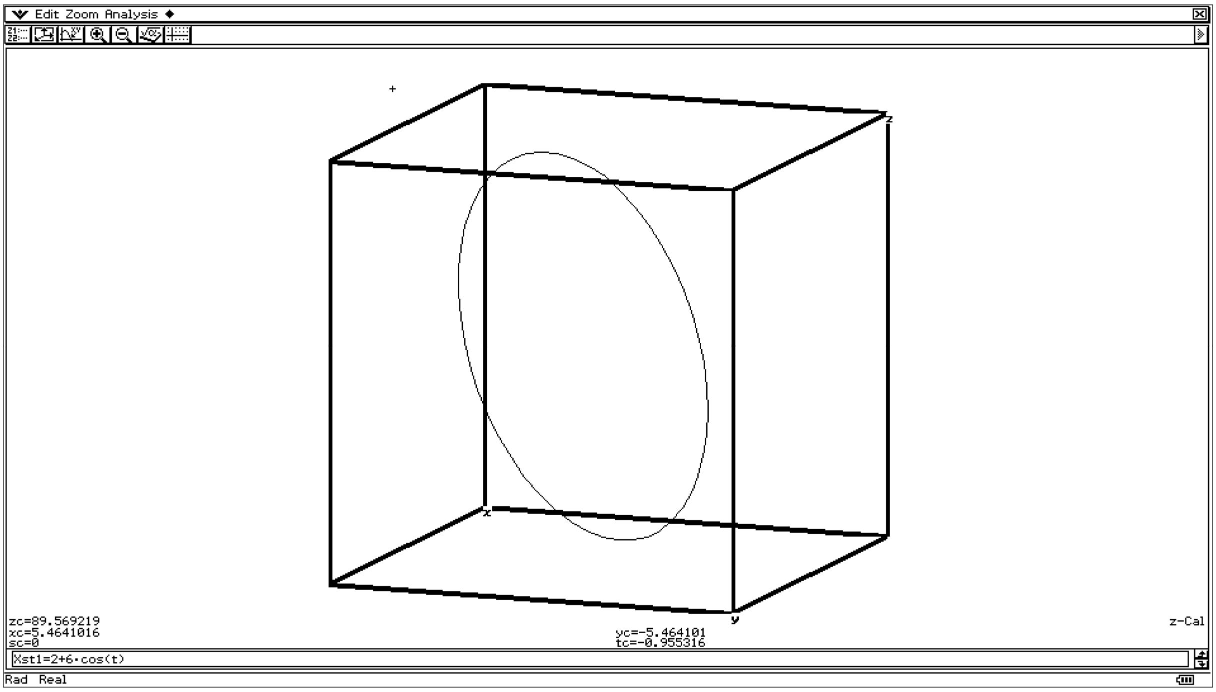
Aufg. D6.2g



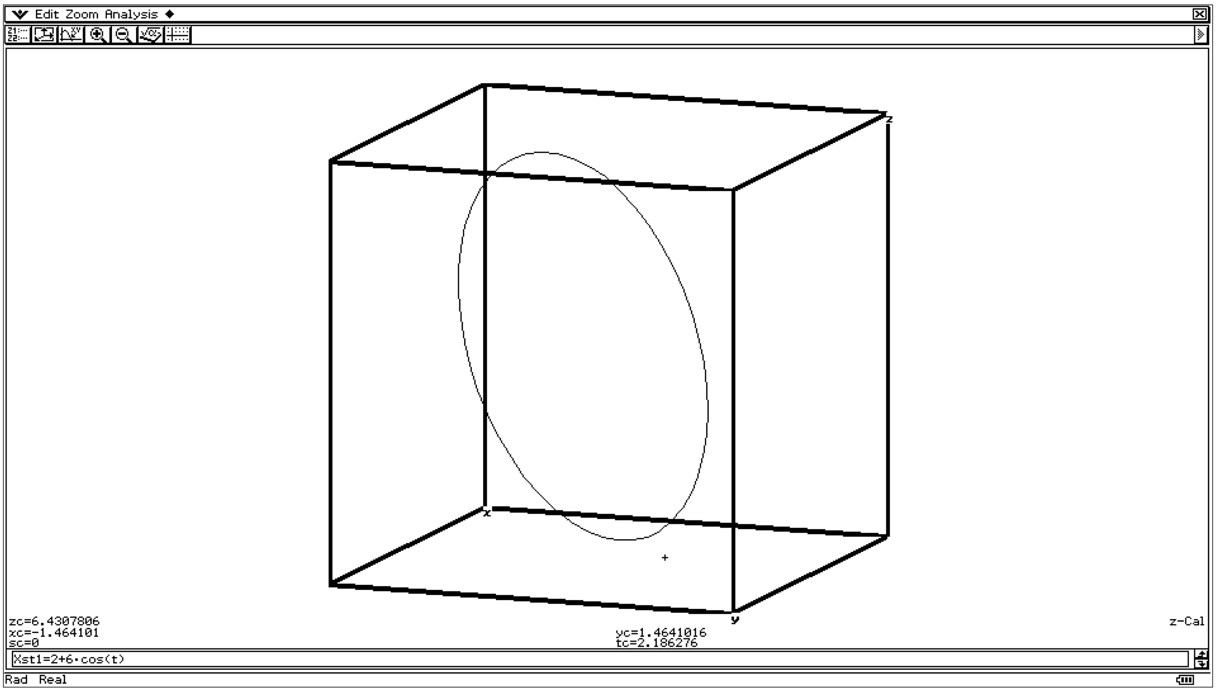
Die Lage der drei Extrema ist gut erkennbar.

Aufg. D6.10





Hochpunkt der Schnittkurve



Tiefpunkt der Schnittkurve