Differential, Fehlerrechnung, Approximation

Seien $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $d\underline{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

1. **Differential** von f an der Stelle $\underline{x}$ mit der Argumentendifferenz $d\underline{x}$:

   $\boxed{df(\underline{x}, d\underline{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x})dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})dx_n}$

   <u>Kurzschreibweise:</u> $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

2. **Funktionswertdifferenz** von f an der Stelle $\underline{x}$ mit der Argumentendifferenz $d\underline{x}$:

   $\boxed{\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) := f(\underline{x} + d\underline{x}) - f(\underline{x})}$

3. **Vollständige (totale) Differenzierbarkeit** an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$:

   $\lim\limits_{\|d\underline{x}\| \to 0} \frac{\Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) - df(\underline{a}, d\underline{x})}{\|d\underline{x}\|} = 0$

   Für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$ gilt dann $\boxed{\Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) \approx df(\underline{a}, d\underline{x})}$

4. **Fehlerrechnung:**

   - exakte Werte: $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(\underline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$
   - Näherungswerte: $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $f(\underline{a})$
   - Abweichungen: $\Delta\underline{x} = d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$, $\Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) = f(\underline{x}) - f(\underline{a})$

   $\boxed{\Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) \approx df(\underline{a}, d\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})dx_i}$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

5. **Lineare Approximation** von $f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$:

   - bekannt: $f(\underline{a})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$
   - gesucht: $f(\underline{x})$, $\underline{x} = \underline{a} + d\underline{x}$ mit $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$, $f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x})$

   $$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})(x_i - a_i)}$$