Umkehrfunktion

Sei f eine auf $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion und $D \subseteq I$. Man sagt, f ist *über D umkehrbar*, wenn zu jedem $y \in f(D)$ die Gleichung $y = f(x)$ genau eine Lösung $x \in D$ besitzt.
In diesem Fall gibt es eine *Umkehrfunktion*

$$g \ : \ f(D) \to D \ .$$

Sie ordnet jedem $y \in f(D)$ die durch $y = f(x)$ eindeutig bestimmte Zahl $x \in D$ zu, d.h.

$$x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Die Umkehrfunktion von f wird häufig auch mit f^{-1} bezeichnet.

Lineare Funktionen

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Betrachten die lineare Funktion

$$y = f(x) = ax + b$$

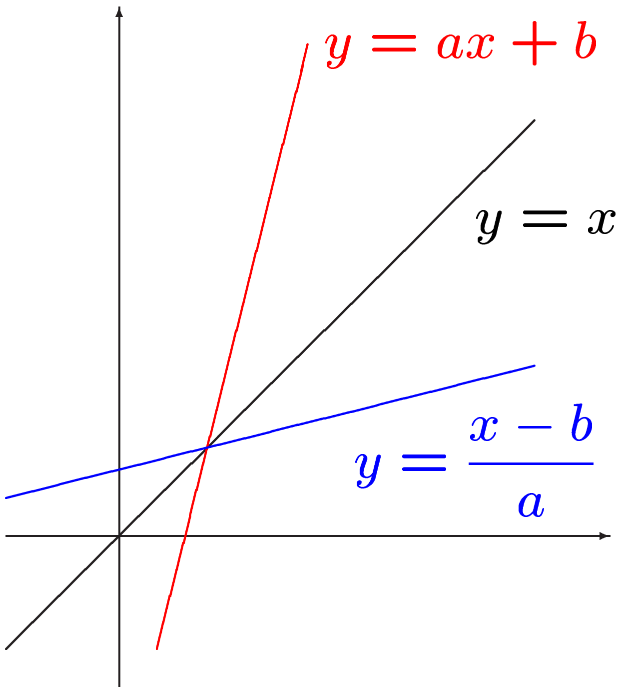
Auflösen von $y = ax + b$ nach x liefert

$$x = \frac{y-b}{a} \; .$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$

Bezeichnen wir wie gewohnt die unabhängige Variable mit x, dann hat die Umkehrfunktion die Gestalt

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \; .$$



$$D(f) = W(f^{-1}) = \mathbb{R}$$
$$W(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei f differenzierbar.
Die Steigung von $y = f^{-1}(x)$ an der Stelle x sei m:

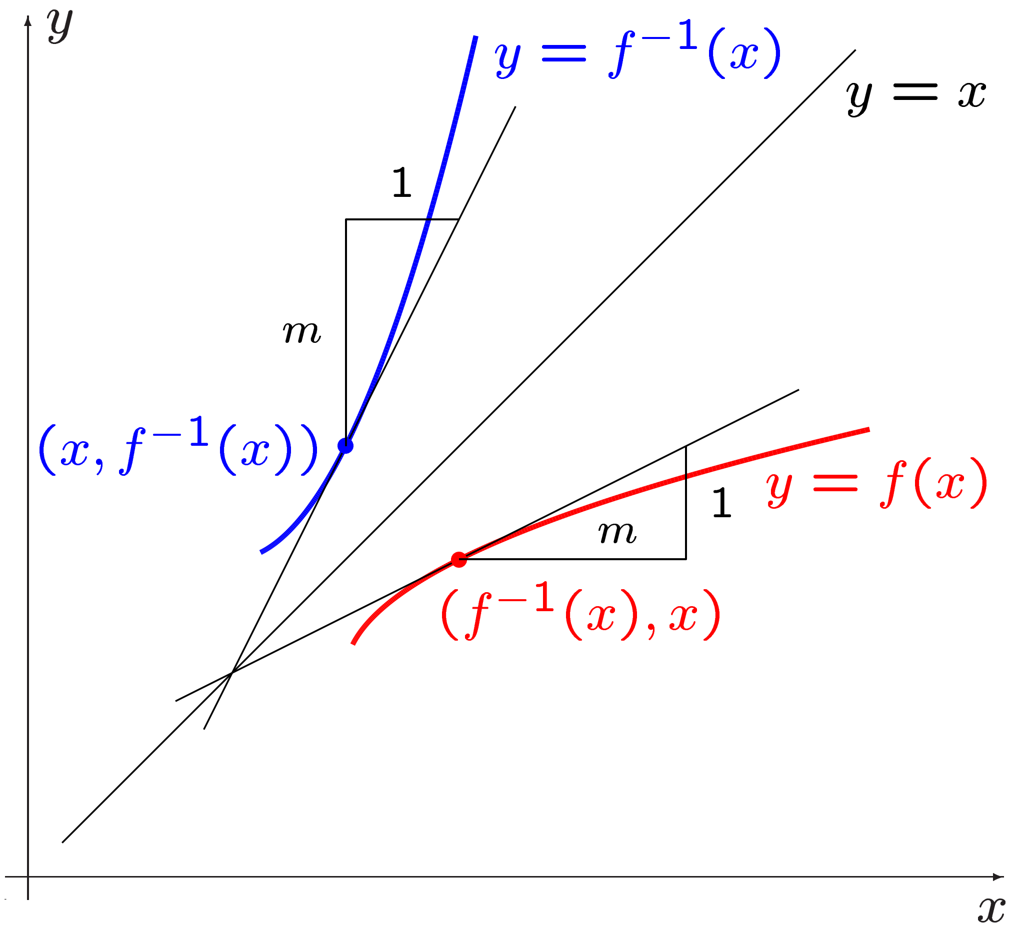
$$(f^{-1})'(x) = m \ .$$

Dann hat $y = f(x)$ an der Stelle $f^{-1}(x)$ die Steigung m^{-1}:

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow$ Ableitungsregel

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$



Hauptsatz über Umkehrfunktionen

Existenz:

1. Jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar.
2. Jede über einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist (über I) umkehrbar.

Graph: Ist die Funktion f über D umkehrbar mit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, dann liegen die Graphen $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Ableitung: Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ einer über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umkehrbaren und differenzierbaren Funktion f ist in allen $x \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$