Numerische Integration

Ziel: Berechnung eines Näherungswertes für das Integral $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Idee:

- Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$
- Approximation des Integranden f über jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ durch ein Polynom m-ten Grades $p_m^{(i)}$. Hierbei soll $p_m^{(i)}(x_j^{(i)}) = f(x_j^{(i)})$ in $m+1$ ausgewählten Punkten $x_j^{(i)}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, aus dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ gelten.
- Berechnung eines Näherungswertes $S(f)$ für das Integral $I(f)$ gemäß

$$S(f) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p_m^{(i)}(x)\,dx$$

Geometrische Interpretation falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$: Der Näherungswert $S(f)$ ist die Summe der Flächeninhalte A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, der Flächen, die durch den Graphen der Funktion $p_m^{(i)}$ über dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, die Geraden $x = x_{i-1}$ und $x = x_i$ sowie durch die x-Achse begrenzt werden.

Summierte Mittelpunktsregel

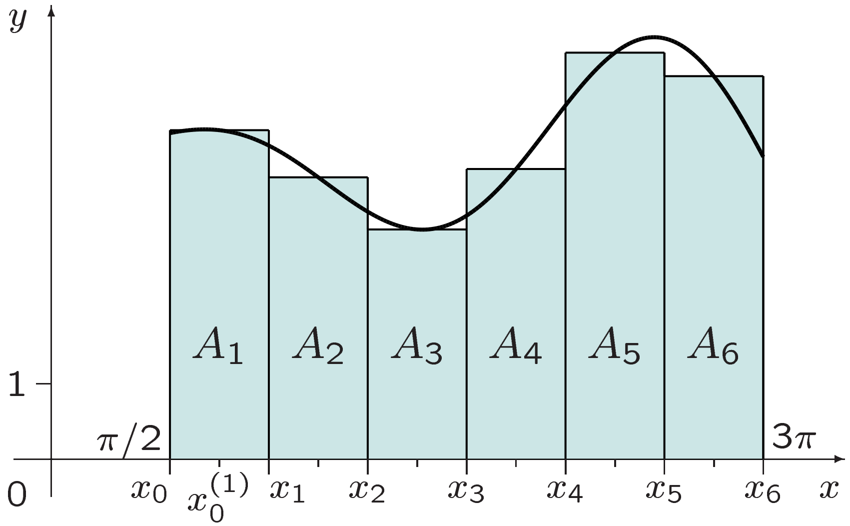
- Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1},x_i]$ mit $x_0=a$, $x_i=a+ih$, $h=(b-a)/n$, $i=1,2,\ldots,n$
- Approximation des Integranden f durch die konstante Funktion $p_0^{(i)}(x)=f(x_0^{(i)})$, $x_0^{(i)}=(x_i+x_{i-1})/2$, über jedem Intervall $[x_{i-1},x_i]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{\mathsf{sMR}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)dx = \sum_{i=1}^{n} hf\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)}$$

Integrationsfehler:

$$|I(f)-S_{\mathsf{sMR}}(f)| \leq \frac{b-a}{24}h^2 \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Formel integriert lineare Funktionen exakt.



Summierte Trapezregel

- Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Über jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$: Approximation des Integranden f durch die lineare Funktion

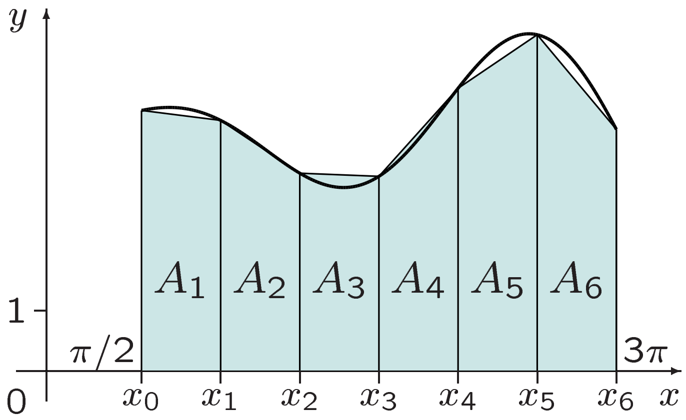
$$p_1^{(i)}(x) = f(x_0^{(i)})\,\frac{x - x_1^{(i)}}{x_0^{(i)} - x_1^{(i)}} + f(x_1^{(i)})\,\frac{x - x_0^{(i)}}{x_1^{(i)} - x_0^{(i)}} \qquad \text{mit} \qquad x_0^{(i)} = x_{i-1}\,,\ x_1^{(i)} = x_i$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{S_{\mathsf{STR}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p_1^{(i)}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)}$$

Integrationsfehler:

$$|I(f) - S_{\mathsf{STR}}(f)| \le \frac{b-a}{12}\,h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Formel integriert lineare Funktionen exakt.



Summierte Simpsonregel

- Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Über jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$: Approximation des Integranden f durch die quadratische Funktion

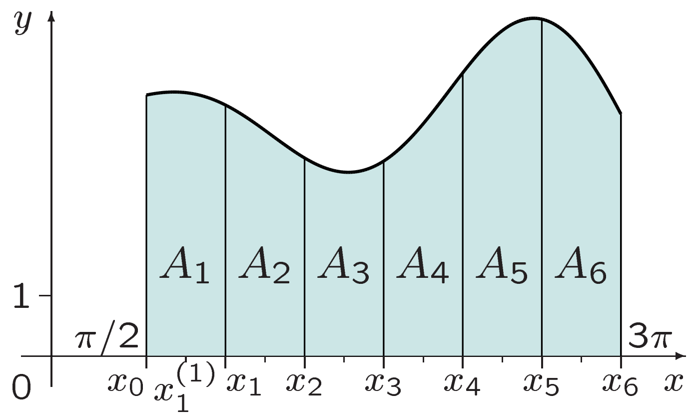
$$\begin{aligned} p_2^{(i)}(x) &= f(x_0^{(i)}) \frac{(x - x_1^{(i)})(x - x_2^{(i)})}{(x_0^{(i)} - x_1^{(i)})(x_0^{(i)} - x_2^{(i)})} + f(x_1^{(i)}) \frac{(x - x_0^{(i)})(x - x_2^{(i)})}{(x_1^{(i)} - x_0^{(i)})(x_1^{(i)} - x_2^{(i)})} \\ &\quad + f(x_2^{(i)}) \frac{(x - x_0^{(i)})(x - x_1^{(i)})}{(x_2^{(i)} - x_0^{(i)})(x_2^{(i)} - x_1^{(i)})} \quad \text{mit} \quad x_0^{(i)} = x_{i-1}\,,\ x_1^{(i)} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\,,\ x_2^{(i)} = x_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{\mathrm{SSR}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_2^{(i)}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i) \right)}$$

Integrationsfehler:

$$|I(f) - S_{\mathrm{STR}}(f)| \leq \frac{b-a}{2880} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Formel integriert kubische Funktionen exakt.

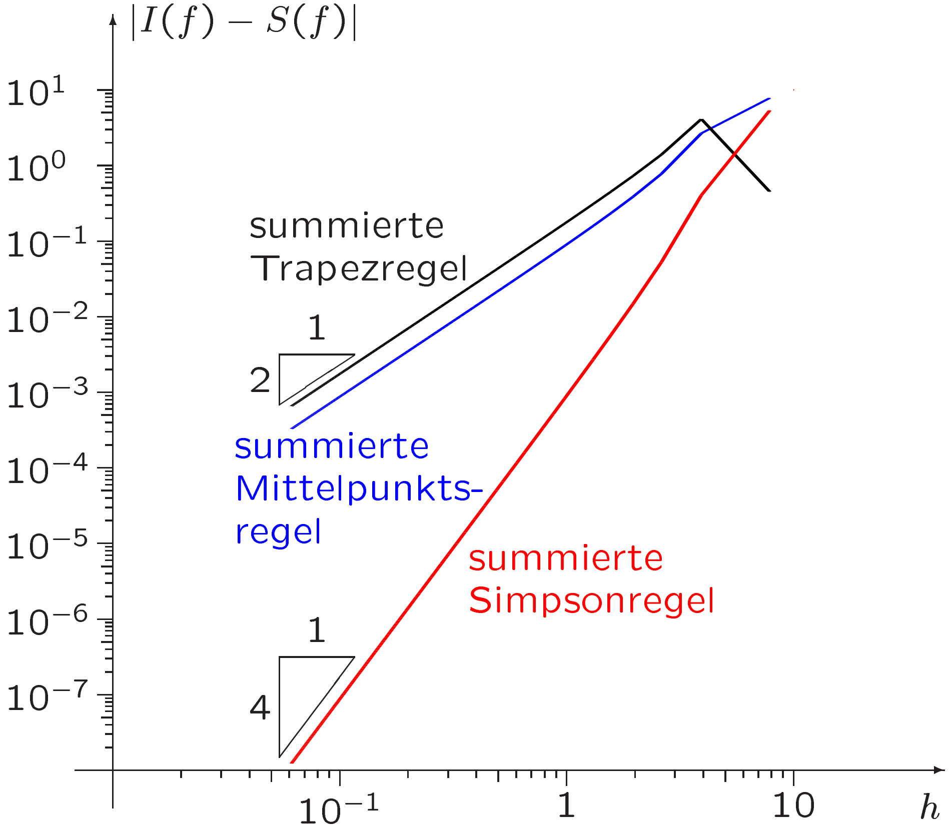


Beispiel: Näherungsweise Berechnung des Integrals $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi} \left[4 + \frac{1}{5} x \sin x\right] dx$

	summierte Mittelpunktsregel		summierte Trapezregel		summierte Simpsonregel	
n	Stütz-stellen	$\lvert I(f) - S_{\text{sMR}}(f)\rvert$	Stütz-stellen	$\lvert I(f) - S_{\text{sTR}}(f)\rvert$	Stütz-stellen	$\lvert I(f) - S_{\text{sSR}}(f)\rvert$
1	1	$0.7791 \cdot 10^{1}$	2	0.4513	3	$0.5345 \cdot 10^{1}$
2	2	$0.2667 \cdot 10^{1}$	3	$0.4121 \cdot 10^{1}$	5	0.4041
4	4	0.3858	5	0.7273	9	$0.1475 \cdot 10^{-1}$
8	8	$0.8662 \cdot 10^{-1}$	9	0.1708	17	$0.8290 \cdot 10^{-3}$
16	16	$0.2111 \cdot 10^{-1}$	17	$0.4207 \cdot 10^{-1}$	33	$0.5052 \cdot 10^{-4}$
32	32	$0.5244 \cdot 10^{-2}$	33	$0.1048 \cdot 10^{-1}$	65	$0.3137 \cdot 10^{-5}$
64	64	$0.1309 \cdot 10^{-2}$	65	$0.2617 \cdot 10^{-2}$	129	$0.1958 \cdot 10^{-6}$
128	128	$0.3271 \cdot 10^{-3}$	129	$0.6542 \cdot 10^{-3}$	257	$0.1223 \cdot 10^{-7}$

Stützstellen: Anzahl der Punkte, in denen für die numerische Integration Funktionswerte der Funktion f berechnet werden müssen.

Grafische Darstellung der Entwicklung des Integrationsfehlers in Abhängigkeit von der Intervalllänge $h = (b-a)/n$:



- Bei gleicher Anzahl von Unterteilungen n und folglich gleicher Schrittweite h ist der Fehler bei der summierten Trapezregel etwa doppelt so groß wie bei der summierten Mittelpunktsregel.

- Bei Verdopplung der Anzahl der Teilintervalle, d.h. bei Halbierung der Schrittweite h, sinkt der Fehler bei der summierten Mittelpunkts- und Trapezregel mit dem Faktor $1/4$, der Fehler bei der summierten Simpsonregel sinkt mit dem Faktor $1/16$.