Schwingungsgleichung

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f(t) \tag{1}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(t_0) = x_0\,,\ \ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

Beispiele: mechanischer Schwingkreis: $2\alpha = \dfrac{\mu}{m}\,,\quad \omega_0^2 = \dfrac{D}{m}$

elektrischer Schwingkreis: $2\alpha = \dfrac{R}{L}\,,\quad \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

Eigenschwingungen: Schwingt das betrachtete System frei, dann genügt es der DGL (1) mit $f(t) = 0$.

In Abhängigkeit von den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ des charakteristischen Polynoms ergeben sich unterschiedliche Lösungen.

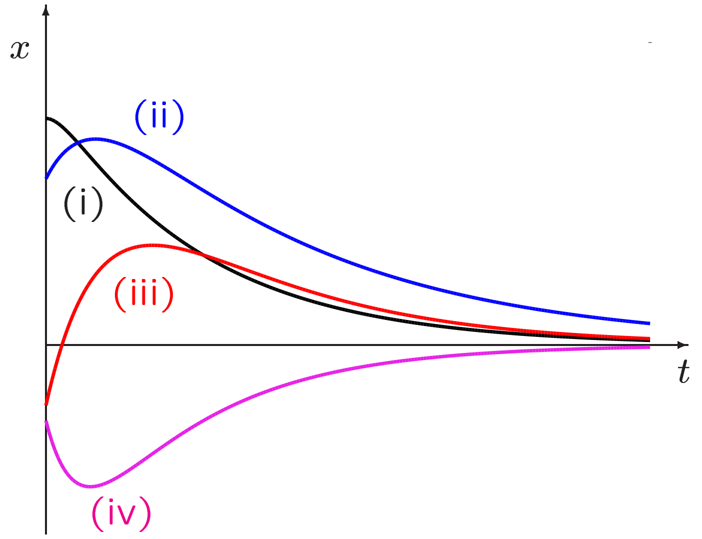
(a) *Aperiodischer Fall* (starke Dämpfung): $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$

$$x_h(t) = c_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + c_2 e^{(-\alpha-\beta)t}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

mit $c_1 = ((\alpha+\beta)x_0 + \dot{x}_0)/(2\beta)e^{(\alpha-\beta)t_0}$, $c_2 = ((-\alpha+\beta)x_0 - \dot{x}_0)/(2\beta)e^{(\alpha+\beta)t_0}$

Beispiele:

(i)	$\alpha = 2.5$	$\omega_0 = 1.5$	$x_0 = 3.0$	$\dot{x}_0 = 0.0$
(ii)	$\alpha = 1.0$	$\omega_0 = 0.75$	$x_0 = 2.2$	$\dot{x}_0 = 2.0$
(iii)	$\alpha = 0.9$	$\omega_0 = 0.8$	$x_0 = -0.8$	$\dot{x}_0 = 4.5$
(iv)	$\alpha = 1.5$	$\omega_0 = 1.2$	$x_0 = -1.0$	$\dot{x}_0 = -4.0$



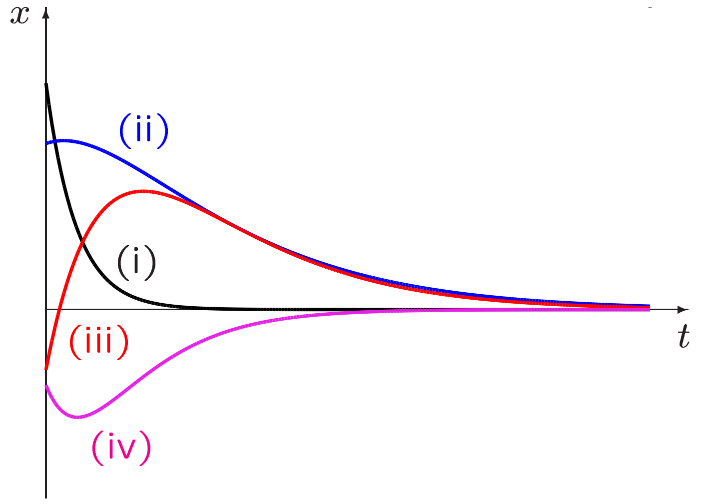
(b) *Aperiodischer Grenzfall*: $\alpha^2 = \omega_0^2$

$$x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

mit $c_1 = ((1 - \alpha t_0)x_0 - \dot{x}_0 t_0)e^{\alpha t_0}$, $c_2 = (\alpha x_0 + \dot{x}_0)e^{\alpha t_0}$

Beispiele:

(i)	$\alpha = 2.5$	$\omega_0 = 2.5$	$x_0 = 3.0$	$\dot{x}_0 = 0.0$
(ii)	$\alpha = 0.75$	$\omega_0 = 0.75$	$x_0 = 2.2$	$\dot{x}_0 = 2.0$
(iii)	$\alpha = 0.9$	$\omega_0 = 0.9$	$x_0 = -0.8$	$\dot{x}_0 = 4.5$
(iv)	$\alpha = 1.5$	$\omega_0 = 1.5$	$x_0 = -1.0$	$\dot{x}_0 = -4.0$



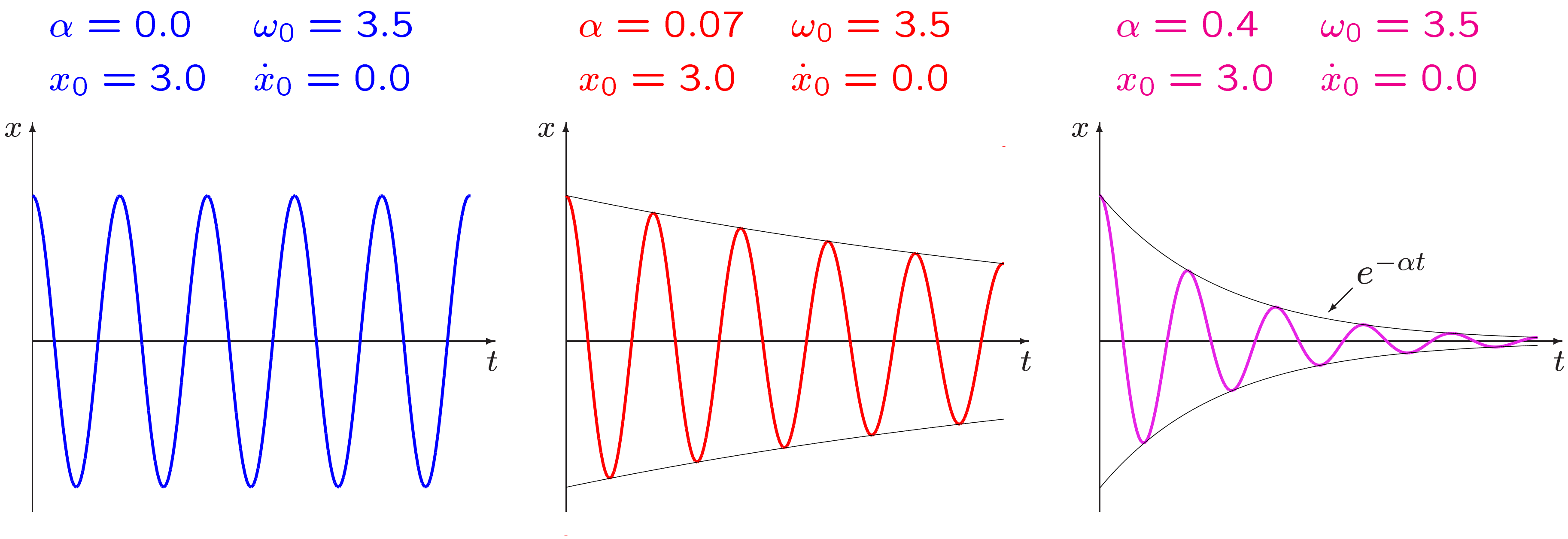
(c) *Periodischer Fall* (schwache Dämpfung): $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

$\Rightarrow$ Schwingungen mit der Eigenfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$$x_h(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) = C e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

mit $\tan \delta = c_2/c_1$, $C = c_1/\cos \delta$

Beispiele:



Erzwungene Schwingungen:

Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung mit $f(t) \neq 0$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \qquad (x_p(t) - \text{partikuläre Lösung})$$

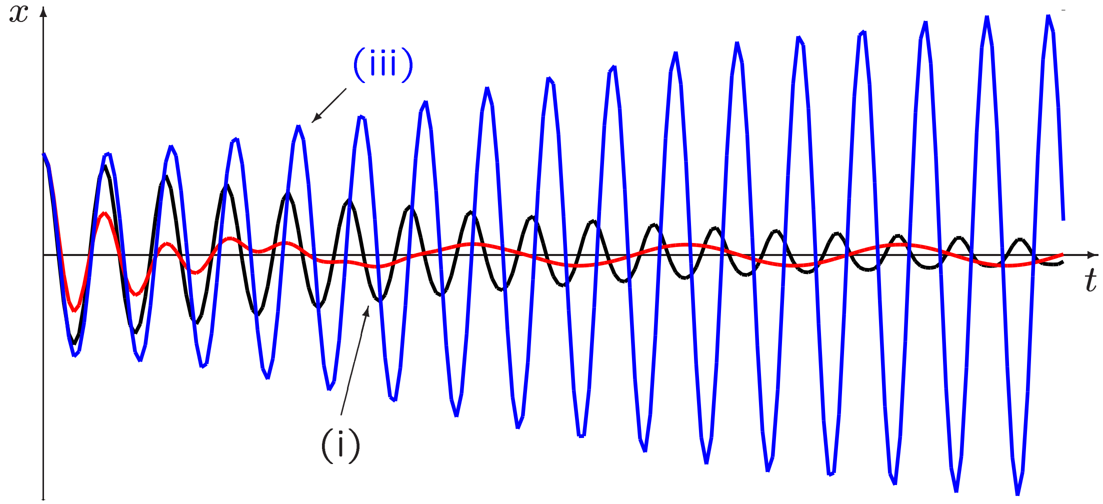
Falls $\alpha > 0$, gilt $x_h(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Somit ergibt sich nach einer „Einschwingzeit“ t_e für die Lösung $x(t) \approx x_p(t)$, $t \geq t_e$.

Sonderfall der harmonischen Anregung: $f(t) = F_0 \cos \omega t$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Beispiele:

(i)	$\alpha = 0.07$	$\omega_0 = 3.5$	$x_0 = 3.0$
	$\dot{x}_0 = 0.0$	$F_0 = 3.5$	$\omega = 7.0$
(ii)	$\alpha = 0.4$	$\omega_0 = 3.5$	$x_0 = 3.0$
	$\dot{x}_0 = 0.0$	$F_0 = 3.5$	$\omega = 1.0$
(iii)	$\alpha = 0.0$	$\omega_0 = 3.5$	$x_0 = 3.0$
	$\dot{x}_0 = 0.0$	$F_0 = 3.5$	$\omega = 3.4$



Verstärkungsfaktor $V(\omega)$: Verhältnis der Amplituden von $x_p(t)$ und $f(t)$

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

Da $V(\omega) \to 0$ für $\omega \to \infty$ sind Anregungen mit sehr hoher Frequenz ω praktisch ohne Wirkung.

Resonanz: $V(\omega)$ hat für $\omega_\mathrm{r}^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2$ ein Maximum. ω_r wird als *Resonanzfrequenz der Amplitudenverstärkung* bezeichnet. Resonanz tritt also nur für $\alpha < \omega_0/\sqrt{2}$ auf. Für die Resonanzfrequenz gilt

$$\omega_\mathrm{r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \alpha^2} \quad \text{mit} \quad V(\omega_\mathrm{r}) = \max_\omega V(\omega) = \frac{1}{2\alpha\omega_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Beispiele:

$\omega_0 = 1.2$

(i) $\alpha = 0.5$

(ii) $\alpha = 1.5$

(iii) $\alpha = 0.05$

(iv) $\alpha = 0.3$