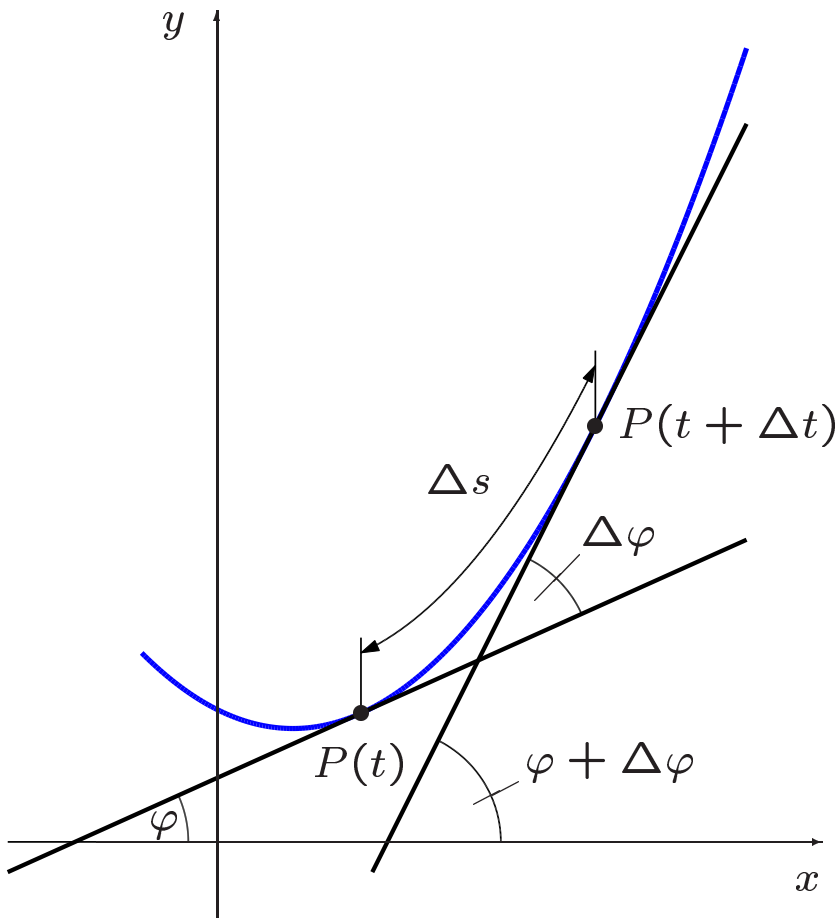
Krümmung einer Kurve

Parameterdarstellung der Kurve:

$$x = x(t)\,,\; y = y(t)\,,\; a \le t \le b\,.$$

Seien $x(t)$, $y(t)$ zweimal differenzierbar und $(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 \neq 0$ für alle t.

Bezeichnen mit $\varphi(t)$ den positiv gemessenen Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Richtung des Tangentenvektors sowie mit $s(t) = \int_a^t \sqrt{(\dot{x}(\tau))^2 + (\dot{y}(\tau))^2}\, d\tau$ die Länge des Kurvenbogens über dem Parameterintervall $[a, t]$.



Geeignetes Maß für die durchschnittliche Krümmung der Kurve über dem Intervall $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

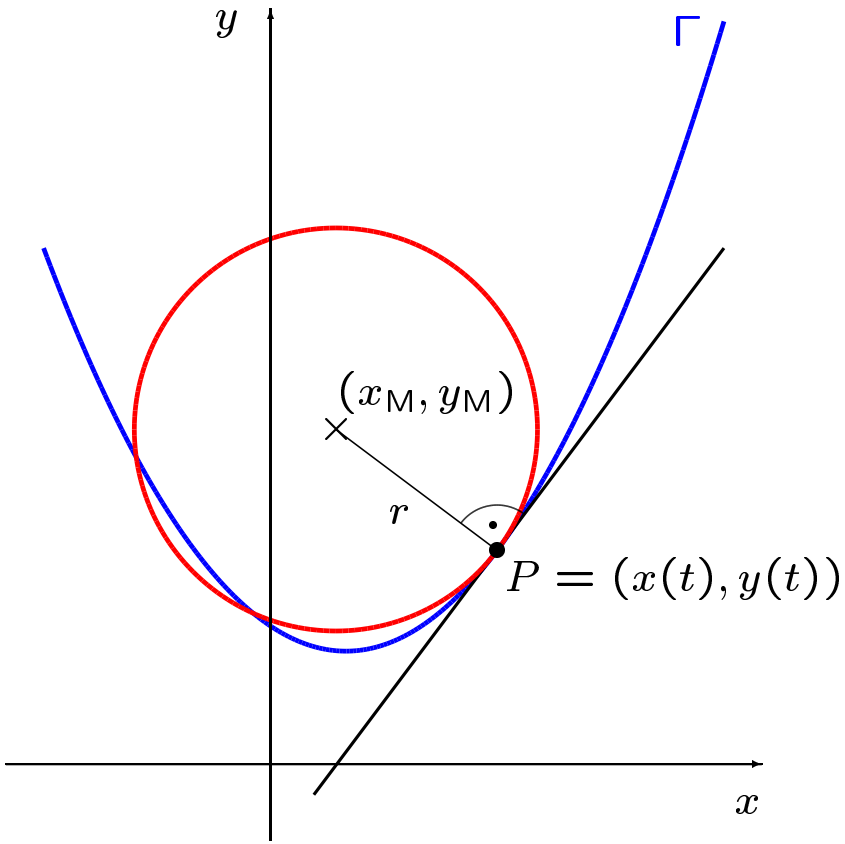
Krümmung der Kurve im Punkt $P(x(t), y(t))$:

$$\boxed{\kappa = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta s(t)} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{s}(t)}}$$

Krümmungskreis

Der zum Punkt $P(t) = P(x(t), y(t))$ gehörige Krümmungskreis der Kurve ist ein Kreis durch den Kurvenpunkt P mit folgenden Eigenschaften:

- Krümmung ist gleich der Krümmung κ der Kurve Γ im Punkt P
  $\Rightarrow$ Krümmungsradius
  $$r = \frac{1}{|\kappa|}$$
- Tangentenrichtung im Punkt P ist gleich der Richtung der Tangente an die Kurve Γ im Punkt P.
  $\Rightarrow$ Mittelpunkt (x_M, y_M) des Krümmungskreises liegt auf der Normalen im Abstand r von P. Es gilt:

$$x_M = x(t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}$$

$$y_M = y(t) + \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}$$