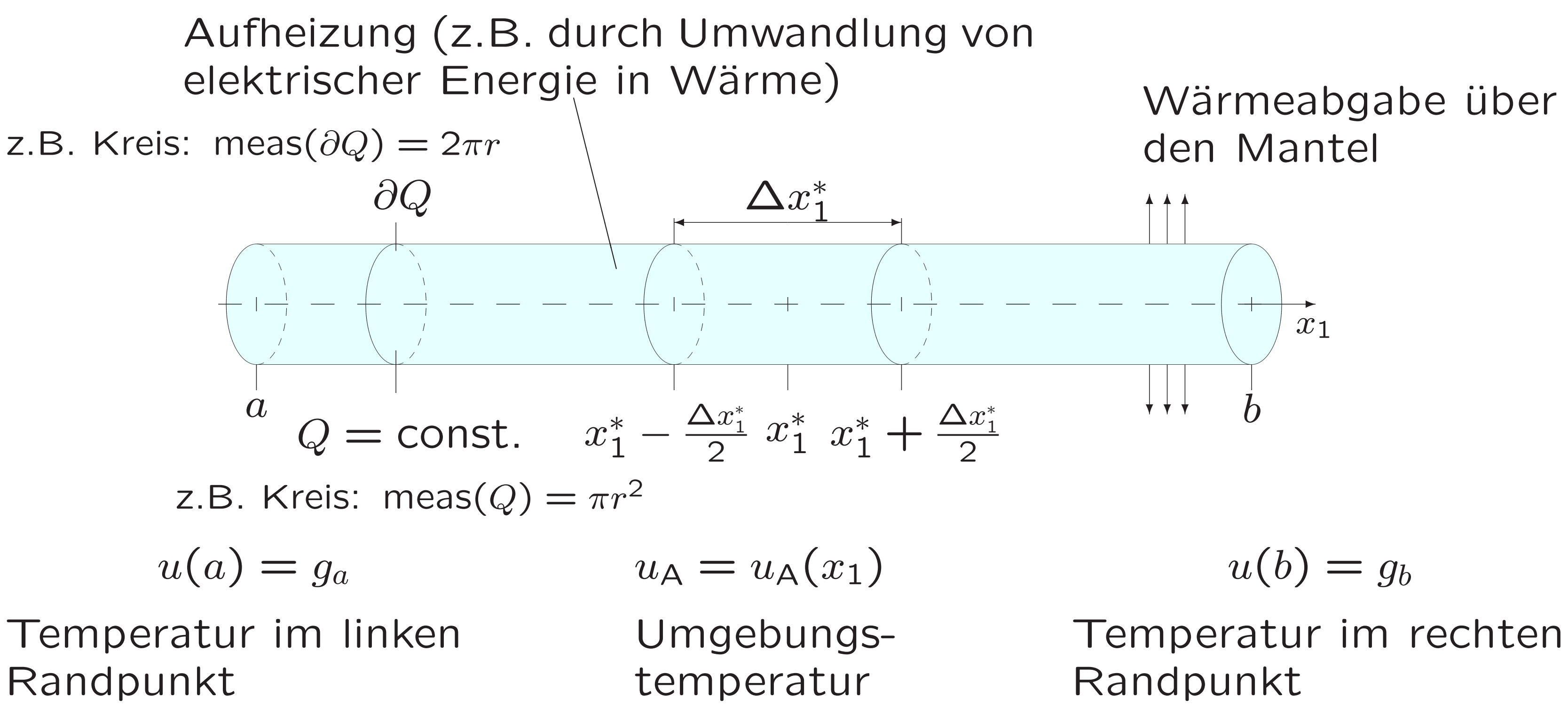
Modellierung eines stationären 1D-Wärmeleitproblems

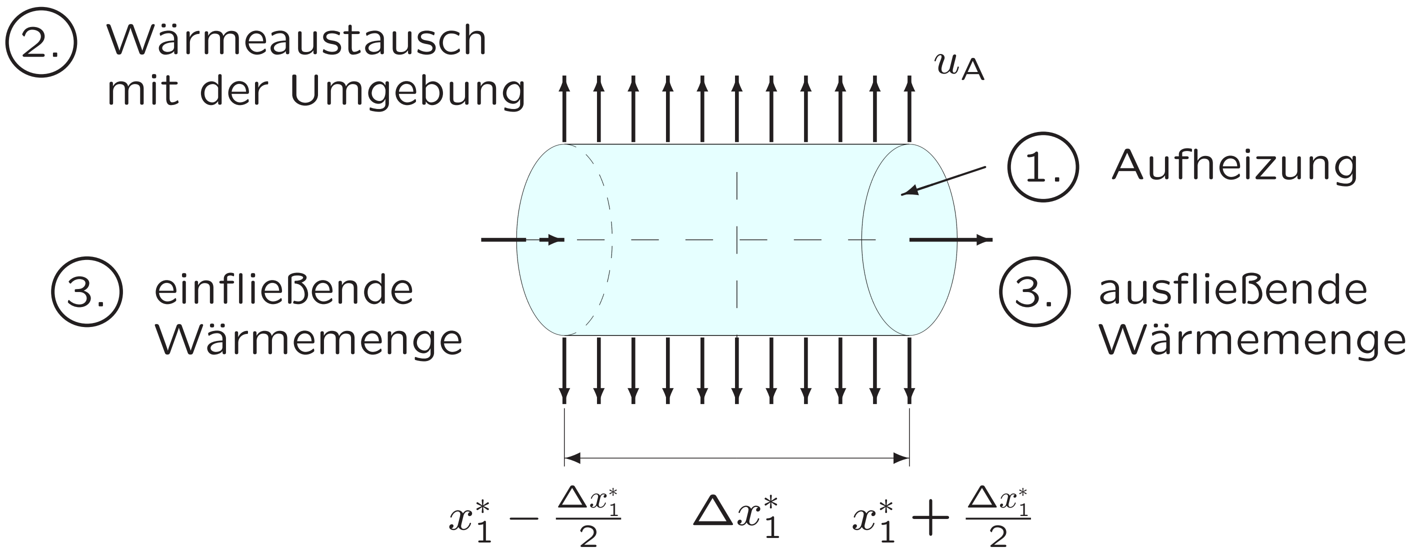
- Physikalisches Problem

Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$ in einem hinreichend dünnen Stab der Länge $\ell = b - a$ mit konstantem Querschnitt Q, wobei ℓ viel größer ist als der Durchmesser des Querschnitts.



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

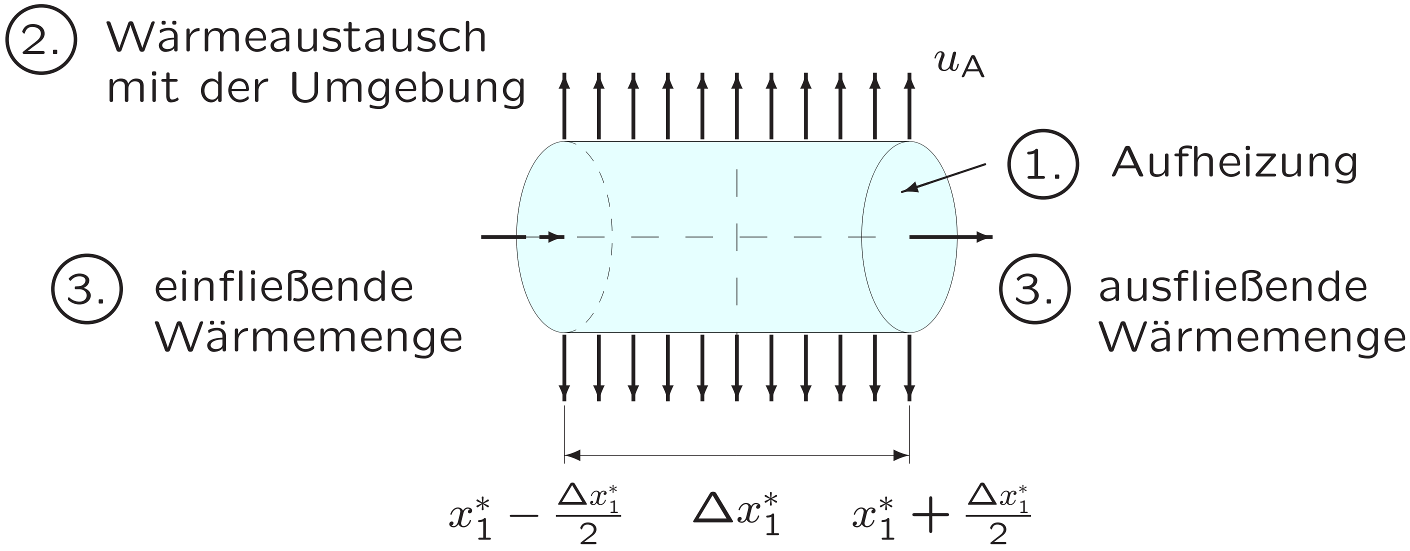
- Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge Δx_1^*



1. Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht:

$$W_{\mathsf{H}} = \int\limits_S f(x_1)\,dx_1 dx_2 dx_3 = \mathrm{meas}(Q) \int\limits_{x_1^*-\frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^*+\frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1)\,dx_1$$

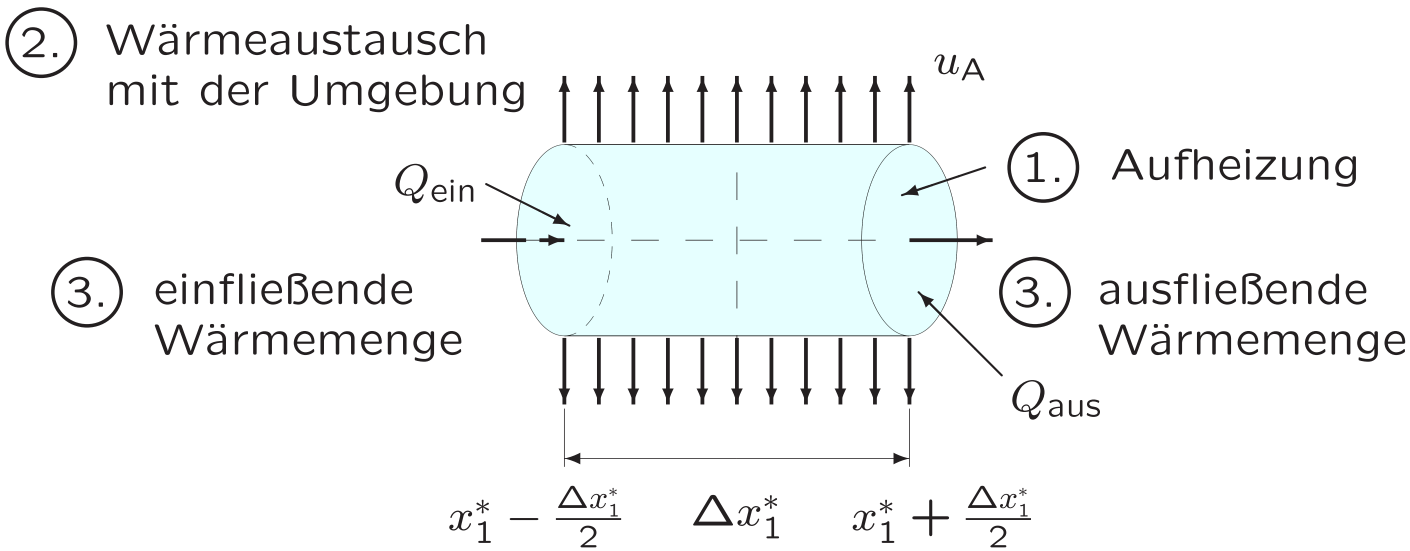
Die Funktion f charakterisiert die Intensität der Wärmequelle.
Der Flächeninhalt von Q ist mit meas(Q) bezeichnet.



2. Transportierte Wärmemenge beim Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel:

$$\begin{aligned} W_{\mathsf{A}} &= \int\limits_{\partial Q \times \left[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right]} q(x_1)\,(u(x_1) - u_{\mathsf{A}}(x_1))\,dO \\ &= \mathsf{meas}(Q) \int\limits_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1)\,(u(x_1) - u_{\mathsf{A}}(x_1))\,dx_1\,,\ \bar{q}(x_1) = \frac{\mathsf{meas}(\partial Q)}{\mathsf{meas}(Q)} q(x_1) \end{aligned}$$

Die Funktion q wird als Wärmeaustauschkoeffizient bezeichnet und ist eine materialabhängige Größe.



3. Wärmemenge, die am linken Rand einfließt bzw. am rechten Rand ausfließt:

Fouriersches Erfahrungsgesetz der Wärmeleitung: Wärmefluss $\sigma(x_1)$ ist proportional zu $-u'(x_1)$. Mit der Wärmeleitzahl $\lambda(x_1)$ als Proportionalitätsfaktor gilt $\sigma(x_1) = -\lambda(x_1)\, u'(x_1)$.

$\longrightarrow$ einfließende (ausfließende) Wärmemenge

$$W\left(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) = \int\limits_{Q_{ein}(Q_{aus})} -\lambda\left(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) u'\left(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) dx_2 dx_3$$

$$= -\lambda\left(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) u'\left(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) \operatorname{meas}(Q)$$

Wärmemengebilanz:

Wärmemenge, die am linken Rand in „Δx_1^*“ hineinfließt	$-$	Wärmemenge, die am rechten Rand aus „Δx_1^*“ herausfließt	$-$	Wärmemenge, die über den Mantel abgegeben wird	$+$	Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht	$= 0$

$$W\left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - W\left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - W_{\mathsf{A}} + W_{\mathsf{H}} = 0$$

Mit $\Delta x_1^* \to 0$ erhalten wir die Randwertaufgabe:

Gesucht ist die Funktion u, für die

$$-(\lambda(x_1)u'(x_1))' + \bar{q}(x_1)u(x_1) = f(x_1) + \bar{q}(x_1)u_{\mathsf{A}}(x_1)$$

für alle $x_1 \in (a, b)$ gilt.
Zusätzlich sind die Randbedingungen $u(a) = g_a$ und $u(b) = g_b$ vorgegeben.

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013