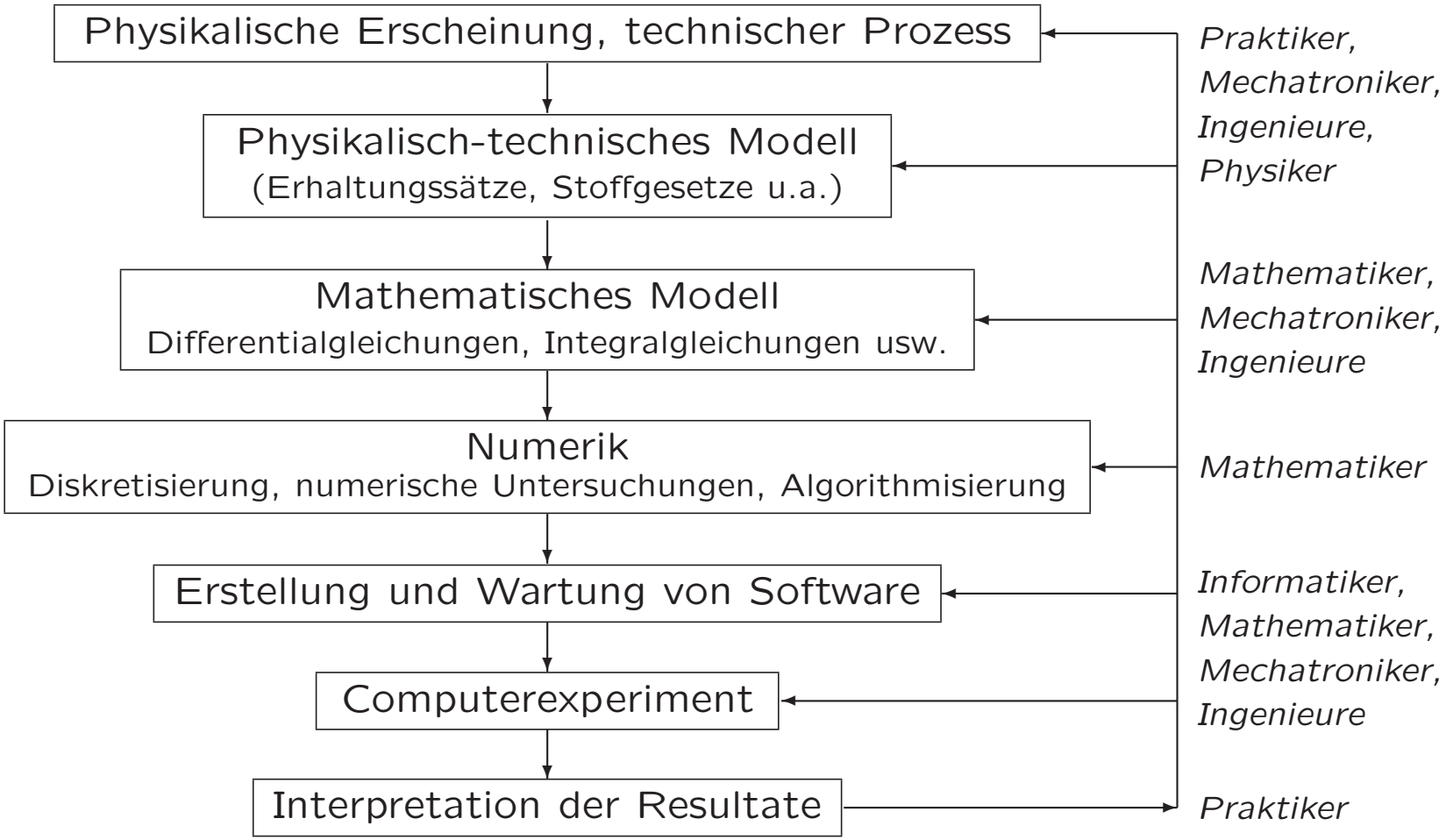
Vom physikalisch-technischen Problem zur Computersimulation

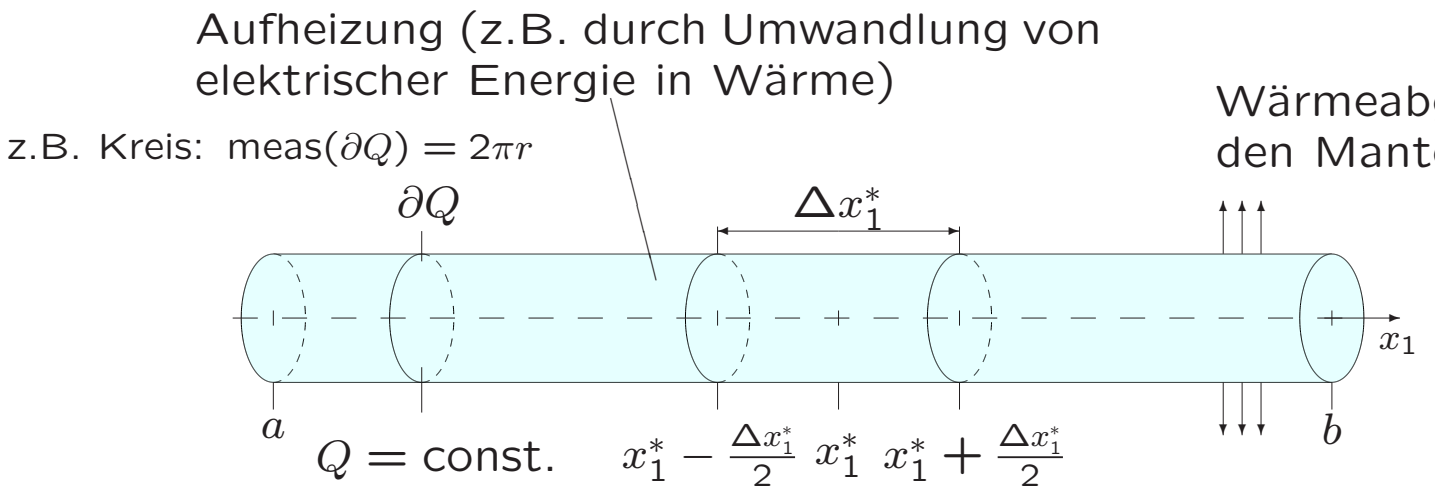


M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Modellierung eines stationären 1D-Wärmeleitproblems

- Physikalisches Problem

Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$ in einem hinreichend dünnen Stab der Länge $\ell = b - a$ mit konstantem Querschnitt Q, wobei ℓ viel größer ist als der Durchmesser des Querschnitts.



$u(a) = g_a$

Temperatur im linken Randpunkt

$u_\mathrm{A} = u_\mathrm{A}(x_1)$

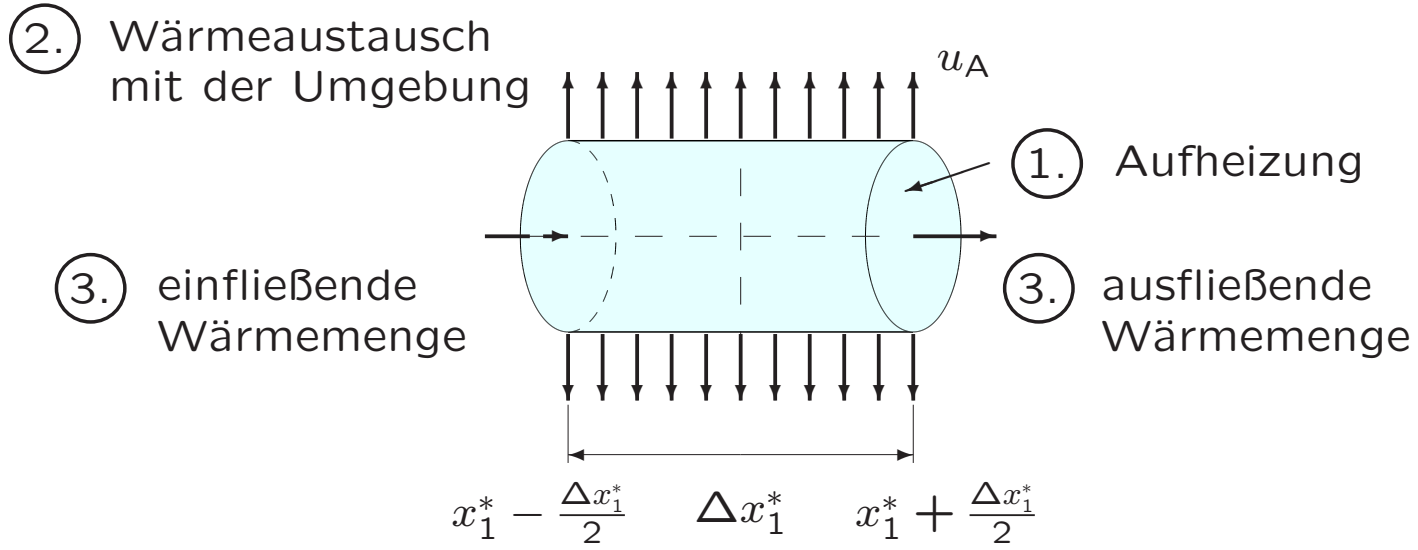
Umgebungs-temperatur

$u(b) = g_b$

Temperatur im rechten Randpunkt

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

- Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge Δx_1^*

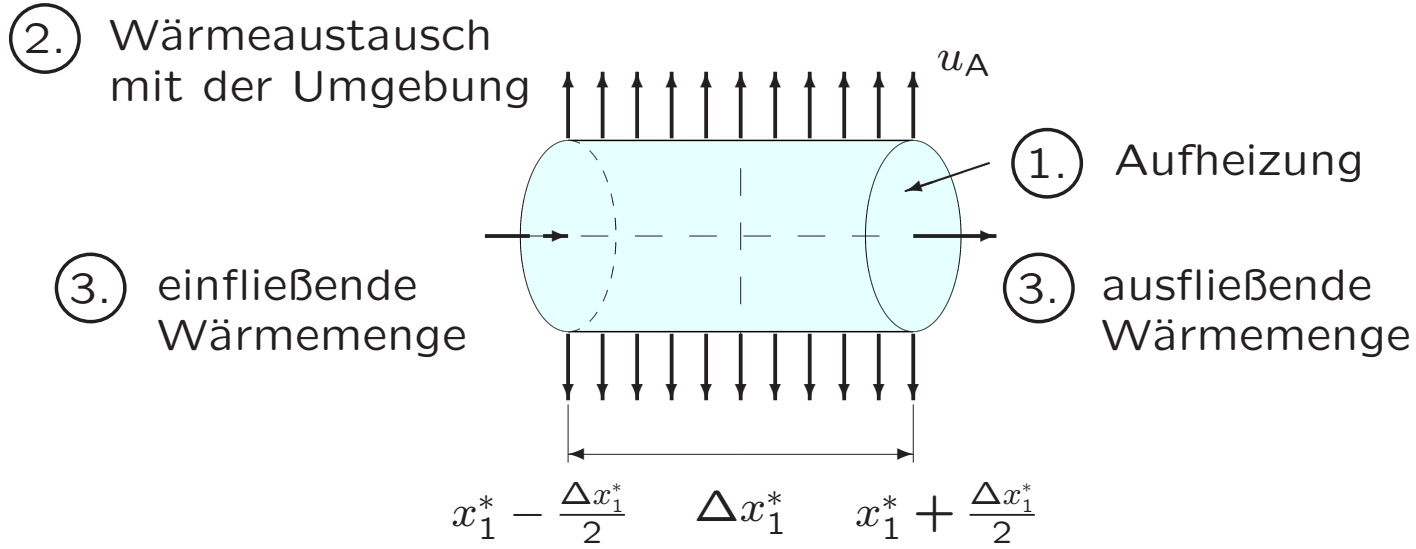


1. Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht:

$$W_{\mathrm{H}} = \int_S f(x_1)\,dx_1dx_2dx_3 = \mathrm{meas}(Q) \int_{x_1^*-\frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^*+\frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1)\,dx_1$$

Die Funktion f charakterisiert die Intensität der Wärmequelle.
Der Flächeninhalt von Q ist mit meas(Q) bezeichnet.

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013



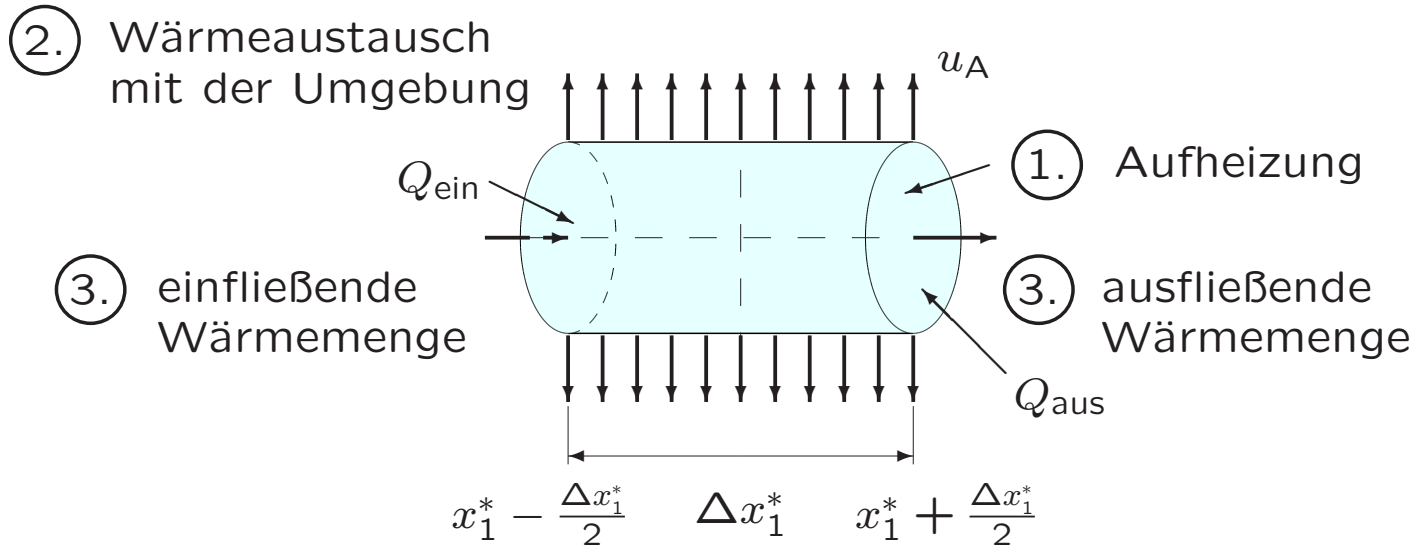
2. Transportierte Wärmemenge beim Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel:

$$W_A = \int_{\partial Q \times \left[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right]} q(x_1)\,(u(x_1) - u_A(x_1))\,dO$$

$$= \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1)\,(u(x_1) - u_A(x_1))\,dx_1\,,\ \bar{q}(x_1) = \frac{\text{meas}(\partial Q)}{\text{meas}(Q)} q(x_1)$$

Die Funktion q wird als Wärmeaustauschkoeffizient bezeichnet und ist eine materialabhängige Größe.

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013



3. Wärmemenge, die am linken Rand einfließt bzw. am rechten Rand ausfließt:

   Fouriersches Erfahrungsgesetz der Wärmeleitung: Wärmefluss $\sigma(x_1)$ ist proportional zu $-u'(x_1)$. Mit der Wärmeleitzahl $\lambda(x_1)$ als Proportionalitätsfaktor gilt $\sigma(x_1) = -\lambda(x_1)\, u'(x_1)$.

   $\longrightarrow$ einfließende (ausfließende) Wärmemenge

$$W(x_1^* \mp \tfrac{\Delta x_1^*}{2}) = \int_{Q_{ein}(Q_{aus})} -\lambda(x_1^* \mp \tfrac{\Delta x_1^*}{2})\, u'(x_1^* \mp \tfrac{\Delta x_1^*}{2})\, dx_2 dx_3$$

$$= -\lambda(x_1^* \mp \tfrac{\Delta x_1^*}{2})\, u'(x_1^* \mp \tfrac{\Delta x_1^*}{2})\, \mathrm{meas}(Q)$$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Wärmemengebilanz:

Wärmemenge, die am linken Rand in „Δx_1^*“ hineinfließt	$-$	Wärmemenge, die am rechten Rand aus „Δx_1^*“ herausfließt	$-$	Wärmemenge, die über den Mantel abgegeben wird	$+$	Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht	$= 0$

$$W\left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - W\left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - W_{\mathsf{A}} + W_{\mathsf{H}} = 0$$

Mit $\Delta x_1^* \to 0$ erhalten wir die Randwertaufgabe:

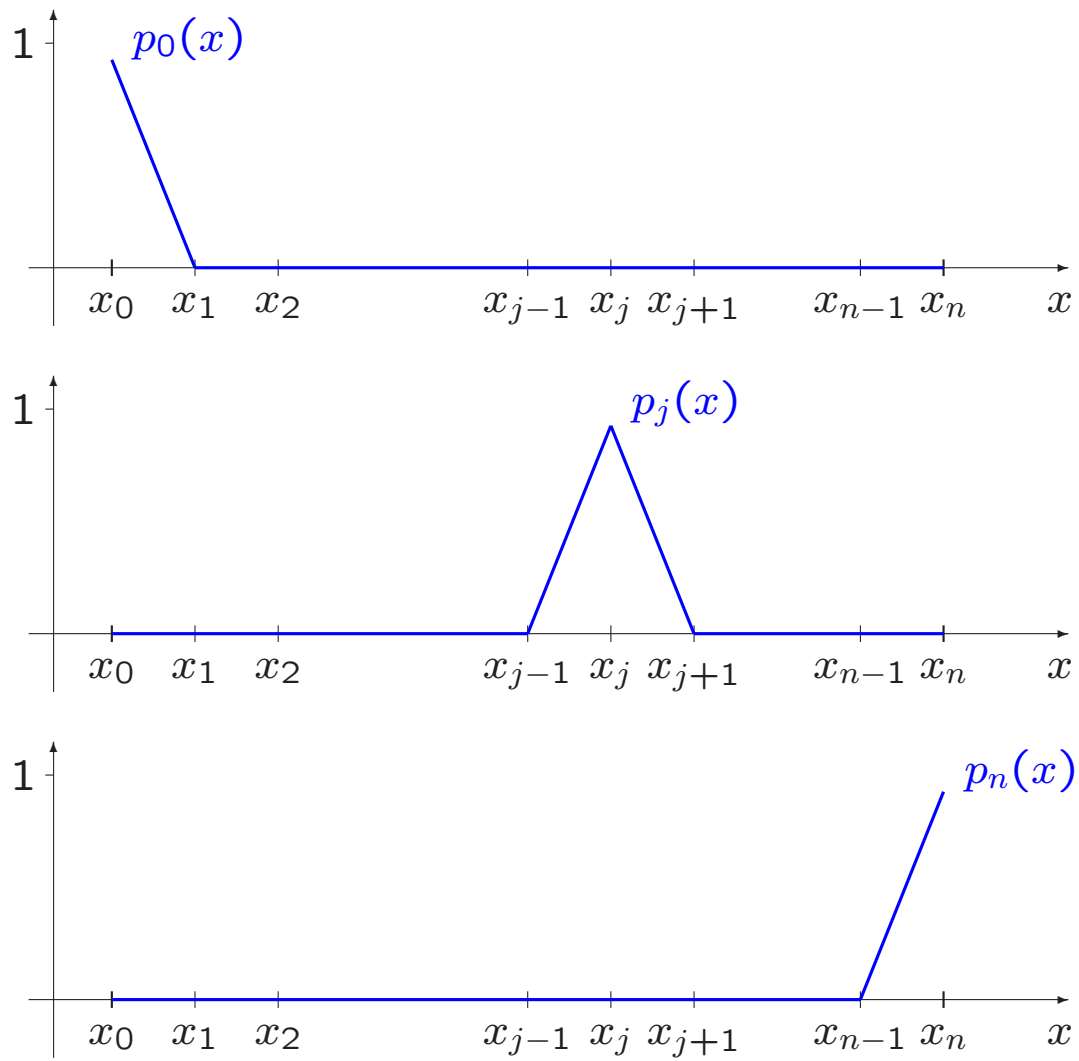
Gesucht ist die Funktion u, für die

$$-(\lambda(x_1)u'(x_1))' + \bar{q}(x_1)u(x_1) = f(x_1) + \bar{q}(x_1)u_{\mathsf{A}}(x_1)$$

für alle $x_1 \in (a, b)$ gilt.
Zusätzlich sind die Randbedingungen $u(a) = g_a$ und $u(b) = g_b$ vorgegeben.

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

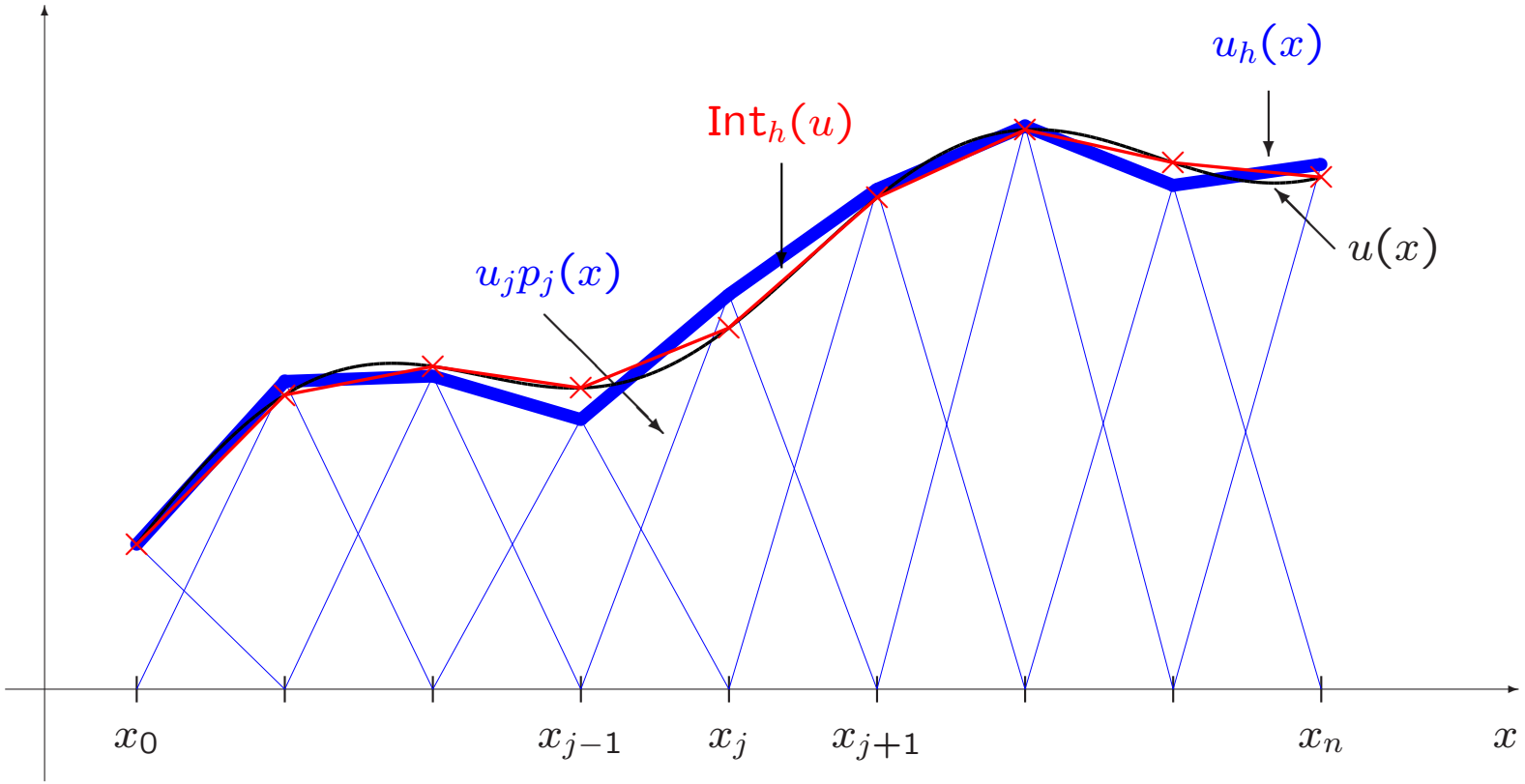
Stückweise lineare Ansatzfunktionen



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

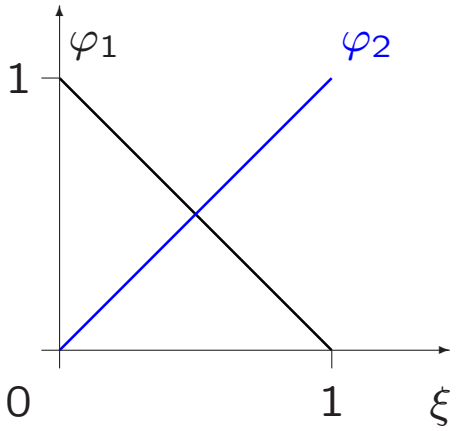
Stückweise lineare Interpolation $\mathrm{Int}_h(u)$ und Näherungslösung u_h

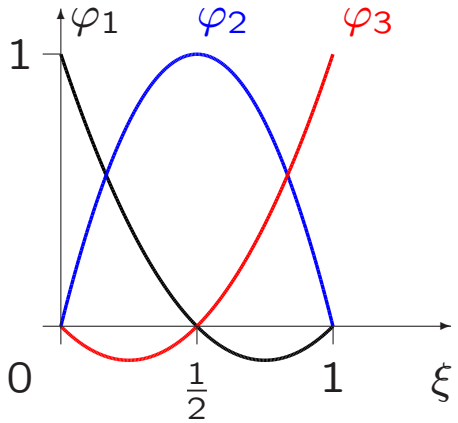
$$\mathrm{Int}_h(u) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j)p_j \quad \text{und} \quad u_h(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j p_j(x)\,,\ u_j = u_h(x_j) \approx u(x_j)$$

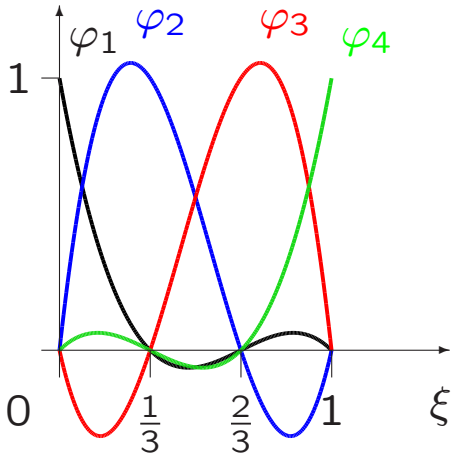


M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Lineare, quadratische und kubische Formfunktionen







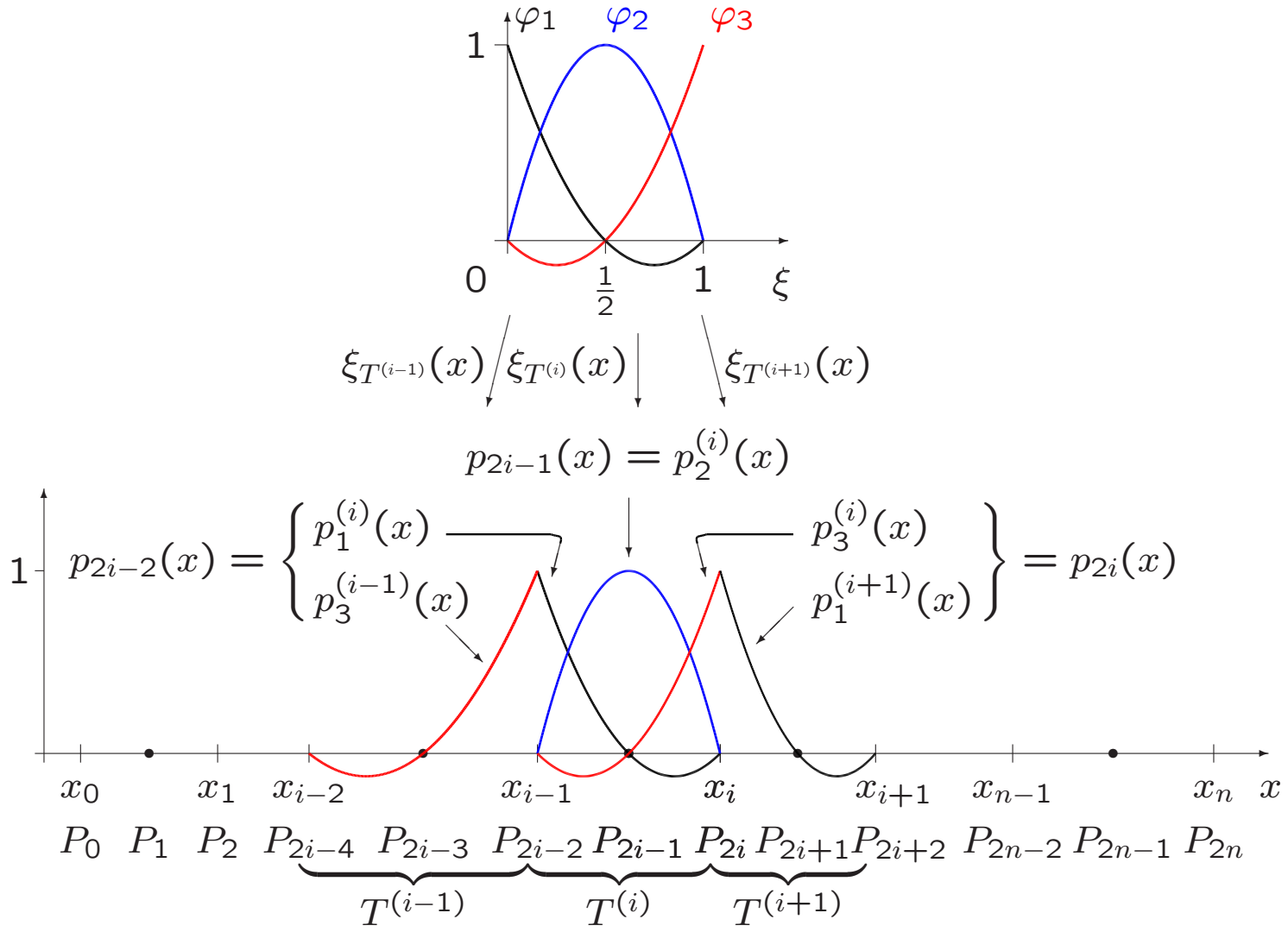
$$\varphi_1(\xi) = -\xi + 1$$
$$\varphi_2(\xi) = \xi$$

$$\varphi_1(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1$$
$$\varphi_2(\xi) = -4\xi^2 + 4\xi$$
$$\varphi_3(\xi) = 2\xi^2 - \xi$$

$$\varphi_1(\xi) = -\tfrac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \tfrac{11}{2}\xi + 1$$
$$\varphi_2(\xi) = \tfrac{27}{2}\xi^3 - \tfrac{45}{2}\xi^2 + 9\xi$$
$$\varphi_3(\xi) = -\tfrac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \tfrac{9}{2}\xi$$
$$\varphi_4(\xi) = \tfrac{9}{2}\xi^3 - \tfrac{9}{2}\xi^2 + \xi$$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

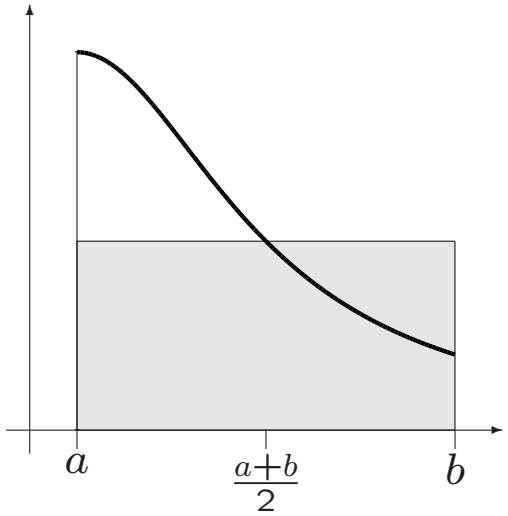
Definition der Ansatzfunktionen mittels Formfunktionen



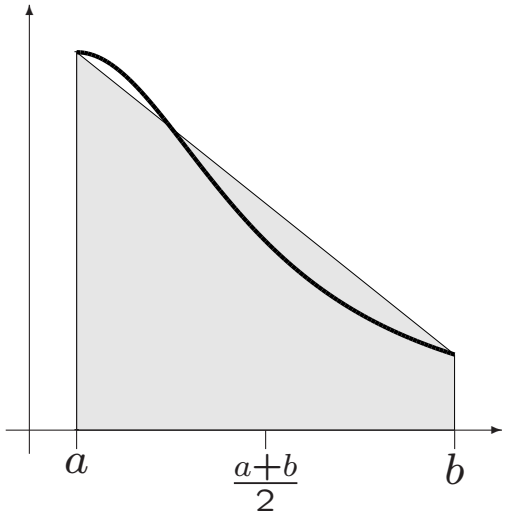
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Quadraturformeln

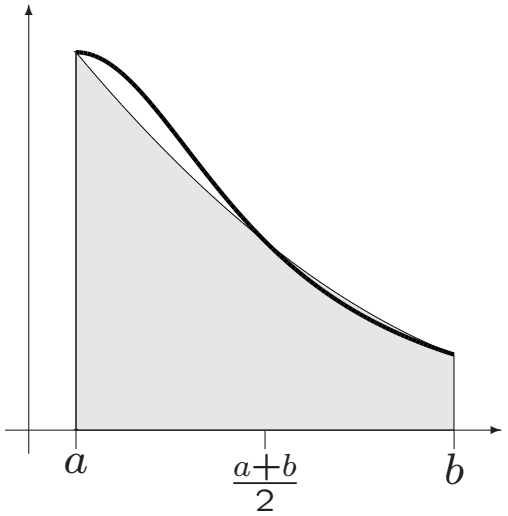
$$\int_a^b w(x)\,dx \approx Q(w) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w(x_i)$$



Mittelpunktsregel



Trapezregel



Simpsonsche Regel

$Q_{\mathsf{MR}} = (b-a)w(\frac{a+b}{2})$ $\quad Q_{\mathsf{TR}} = \frac{b-a}{2}(w(a)+w(b))$ $\quad Q_{\mathsf{SR}} = \frac{b-a}{6}\big(w(a)+4(\frac{a+b}{2})+w(b)\big)$

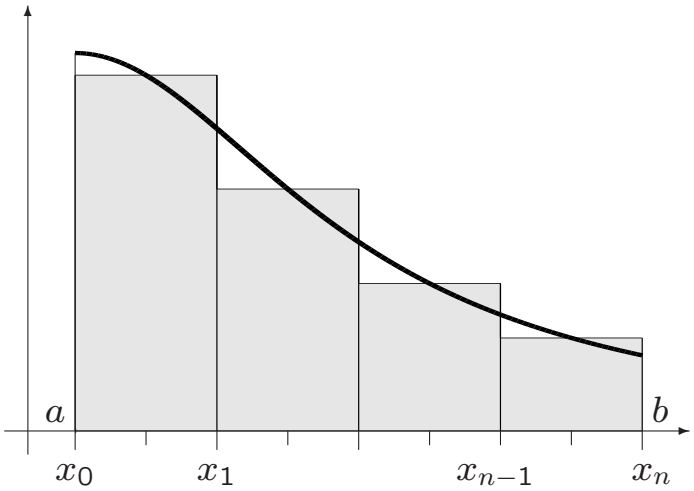
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

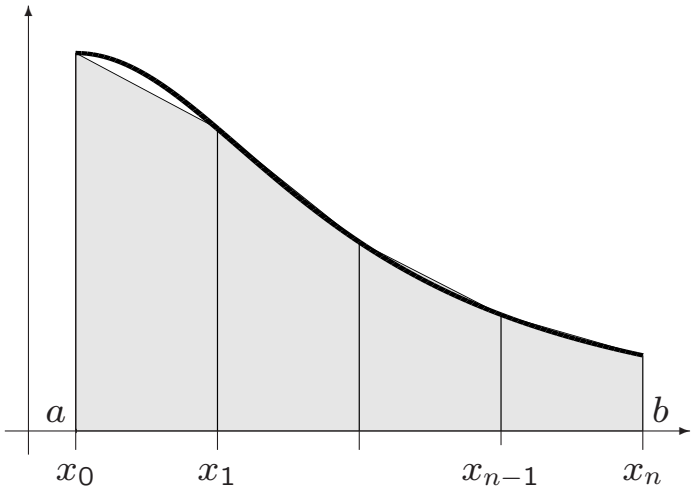
Quadraturformeln über dem Referenzintervall $[0,1]$

Formel	Lage der Stützstellen	Stützstellen x_i	Gewichte α_i	exakt für Polynome vom Grad k
Newton-Cotes-Formel vom offenen Typ: $\int_0^1 w(x)\,dx \approx \sum_{i=2}^{m} \alpha_i w(x_i)$				
Mittelpunktsregel (Gauß 1)		$\frac{1}{2}$	1	$k=1$
Newton-Cotes-Formeln vom geschlossenen Typ: $\int_0^1 w(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i w(x_i)$				
Trapezregel		0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$k=1$
Simpson-Regel		$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$k=3$
Newtonsche $\frac{3}{8}$-Regel		$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$k=3$
Gaußsche Formeln: $\int_0^1 w(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w(x_i)$				
Gauß 2		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$k=3$
Gauß 3		$\frac{5-\sqrt{15}}{10}, \frac{1}{2}, \frac{5+\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{18}, \frac{8}{18}, \frac{5}{18}$	$k=5$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Summierte Quadraturformeln





summierte Mittelpunktsregel $\quad h = \dfrac{b-a}{n} \quad$ summierte Trapezregel

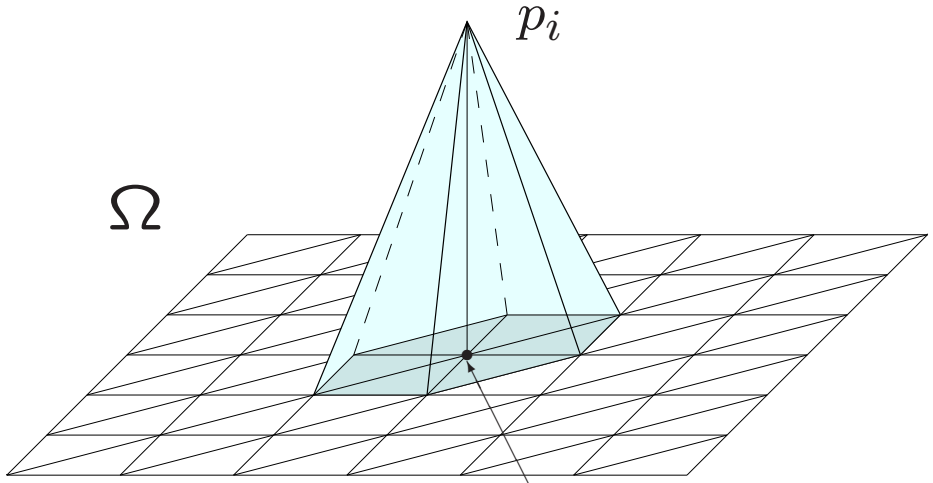
$$\int_a^b w(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} w\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big)$$

$$\int_a^b w(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \big(w(x_{i-1}) + w(x_i)\big)$$

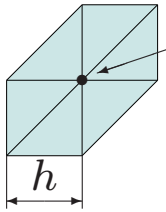
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Ansatzfunktionen

stückweise linear



Träger
supp(p_i) :



$P_i(x_i)$ – Knoten der zur Ansatzfunktion p_i „gehört“

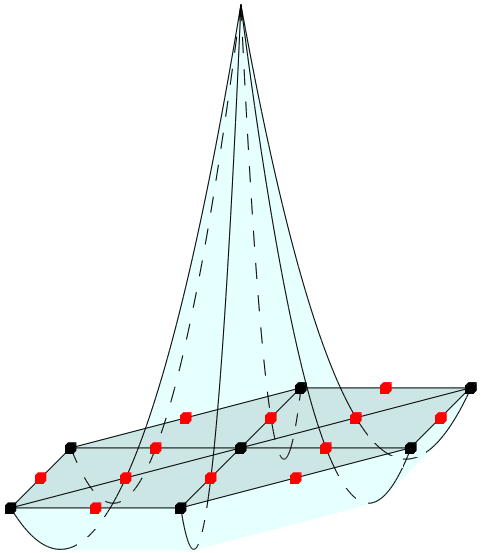
$p_i(x_j) = \delta_{ij}$

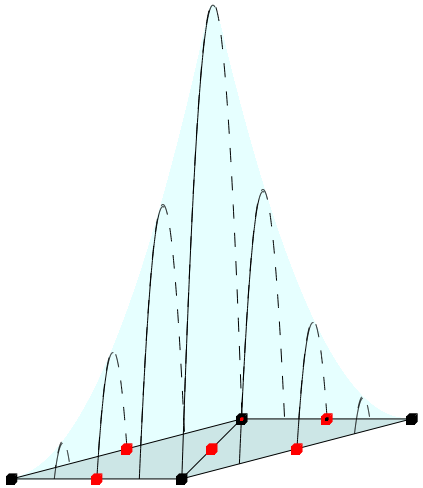
h – Diskretisierungsparameter

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

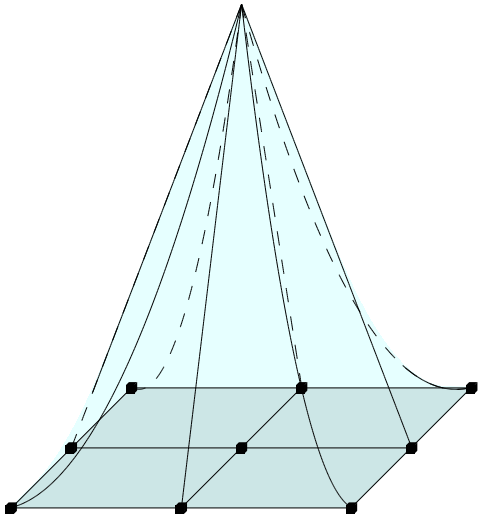
Ansatzfunktionen

stückweise quadratisch





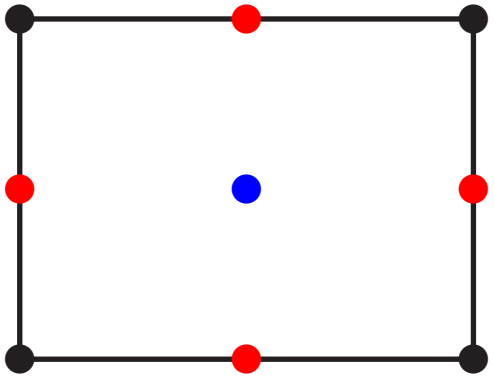
stückweise bilinear



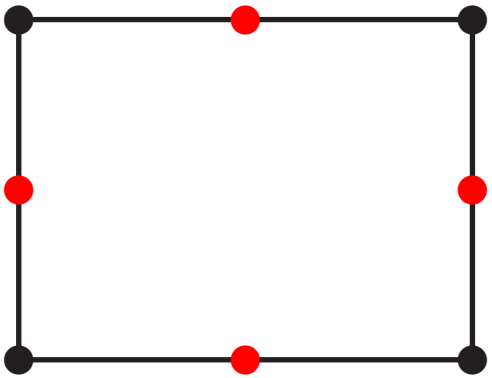
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Viereckselemente

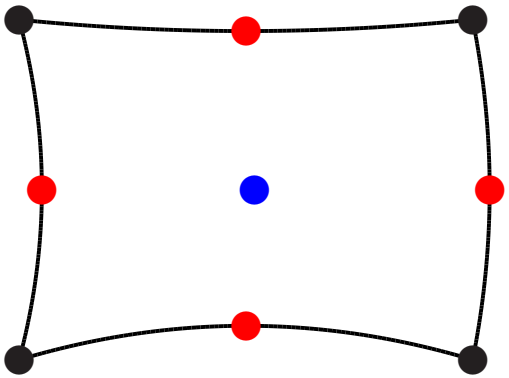
bilineares Element



9-Knoten-Element



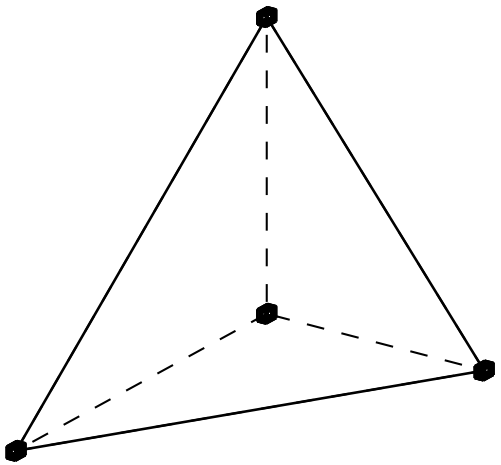
Serendipity–Element
(2. Ordnung)



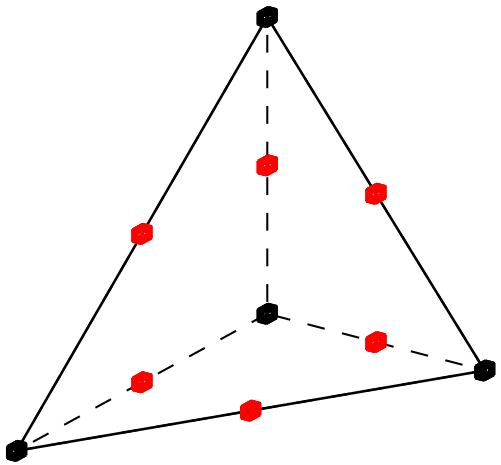
isoparametrisches
Viereckselement

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Tetraederelemente



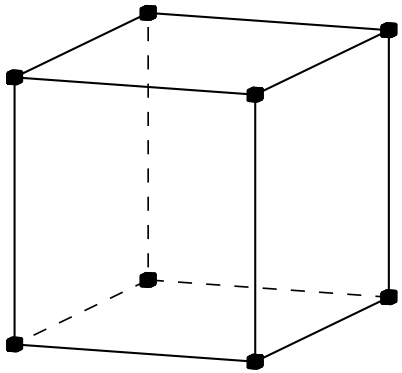
lineares Element



quadratisches Element

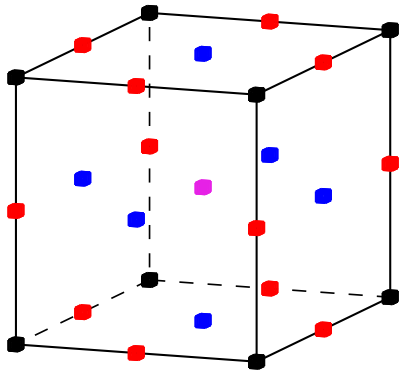
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Hexaederelemente



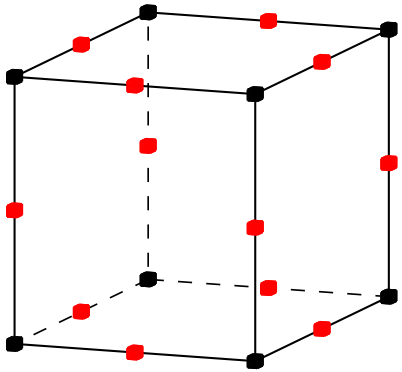
trilineares Element

Quader HK 24



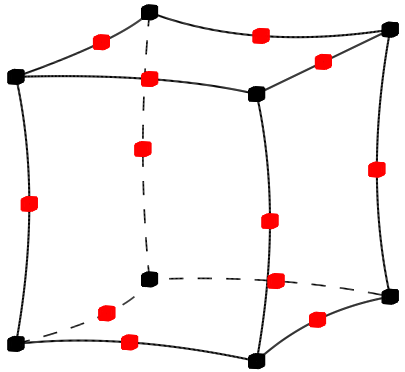
triquadratisches Element

Quader



Serendipity-Element

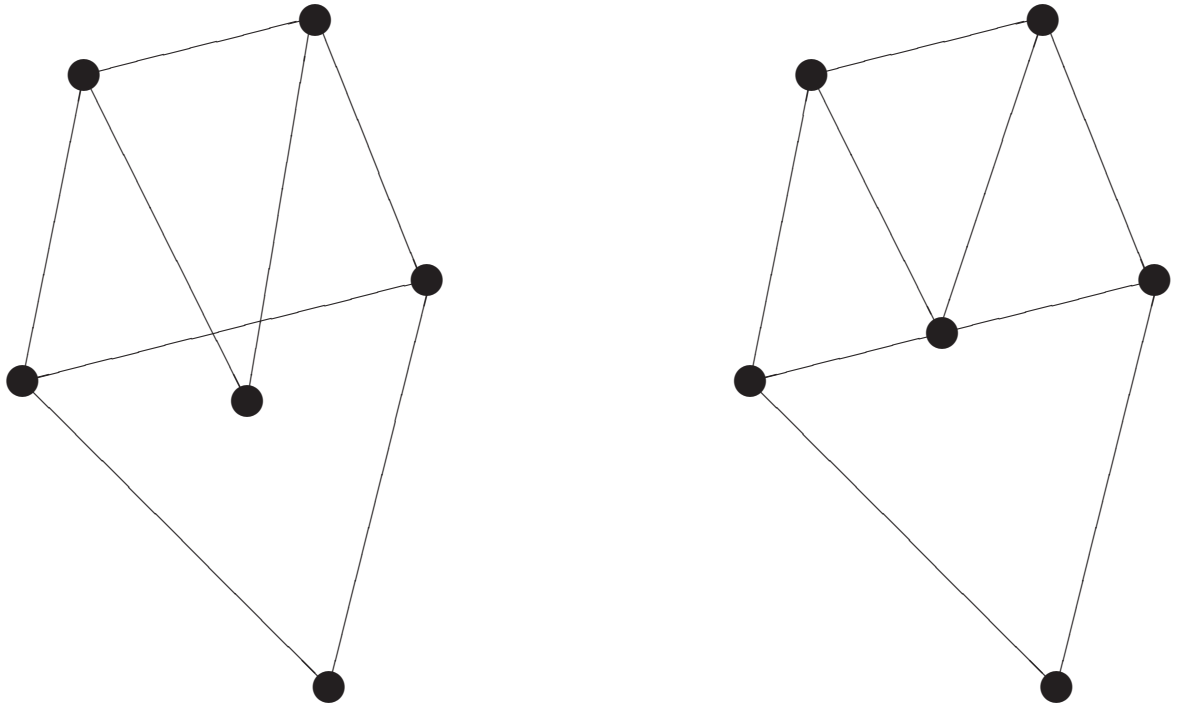
HK 60



isoparametrisches Element

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

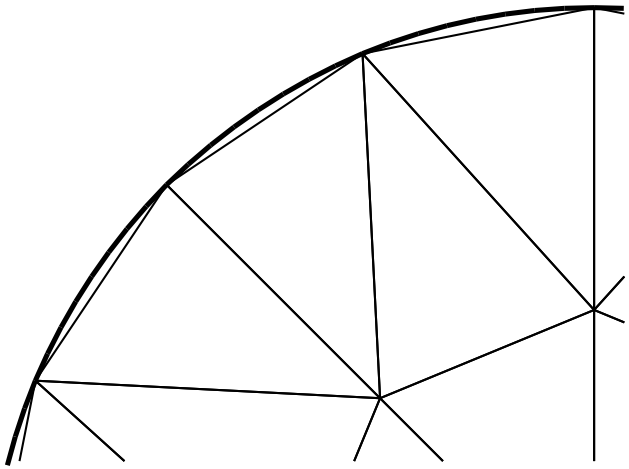
Unzulässige Zerlegungen



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

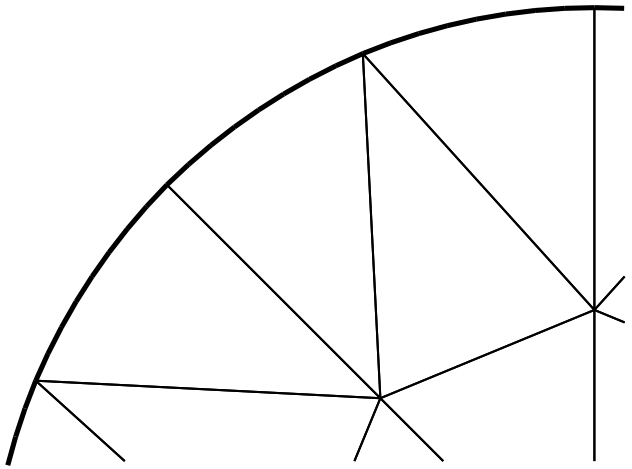
Vernetzungen bei krummlinigem Gebietsrand

Vernetzung mit geradlinig begrenzten Elementen



$\overline{\Omega}_h \approx \overline{\Omega}$

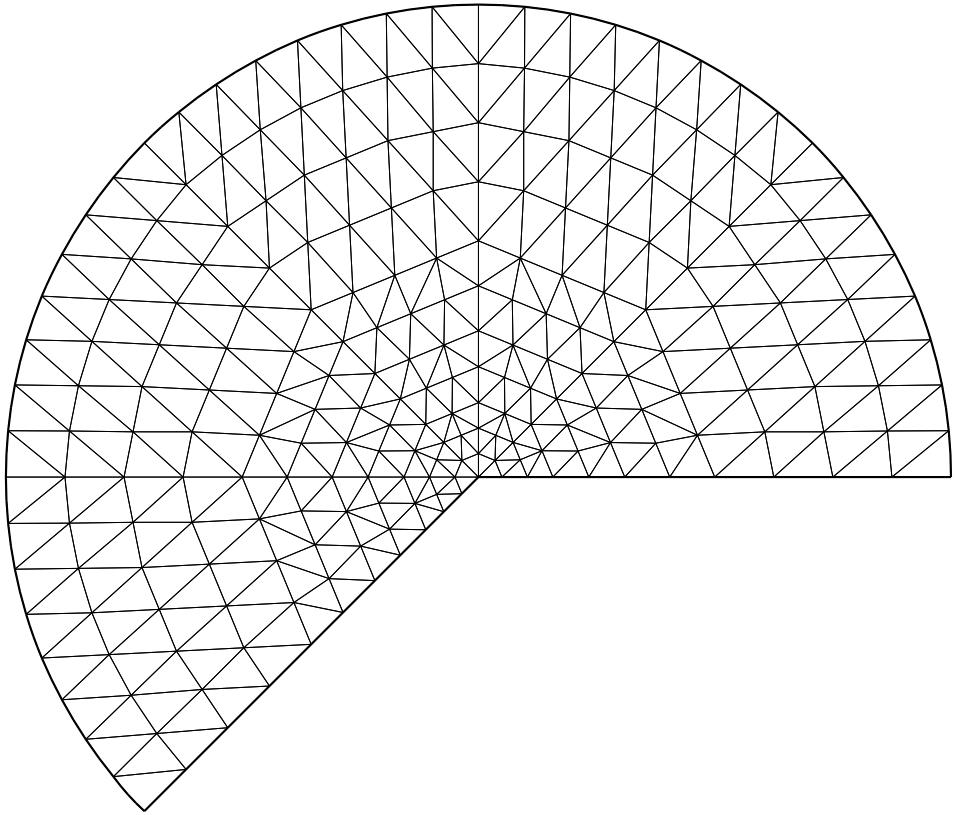
Vernetzung mit krummlinig begrenzten Elementen



$\overline{\Omega}_h = \overline{\Omega}$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

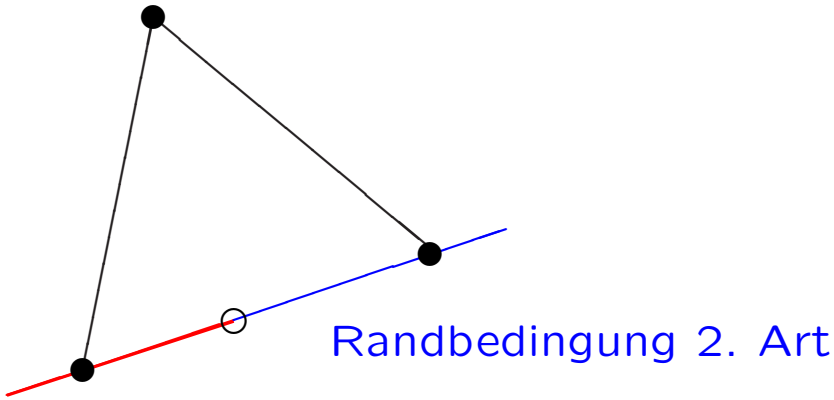
Vernetzung bei überstumpfer Ecke im Gebietsrand



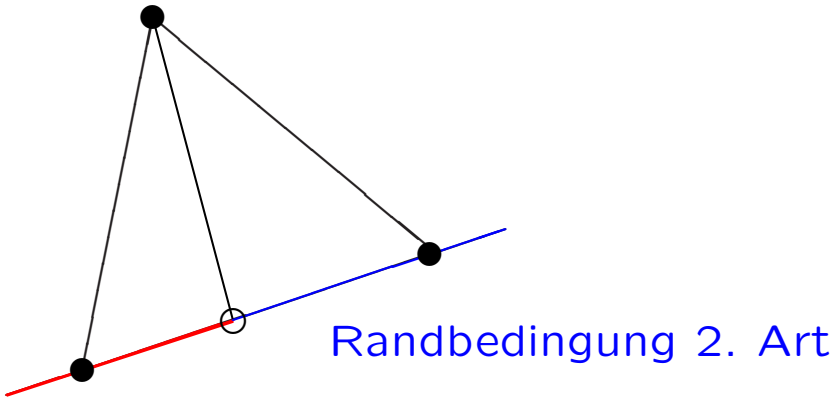
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Beachtung gemischter Randbedingungen

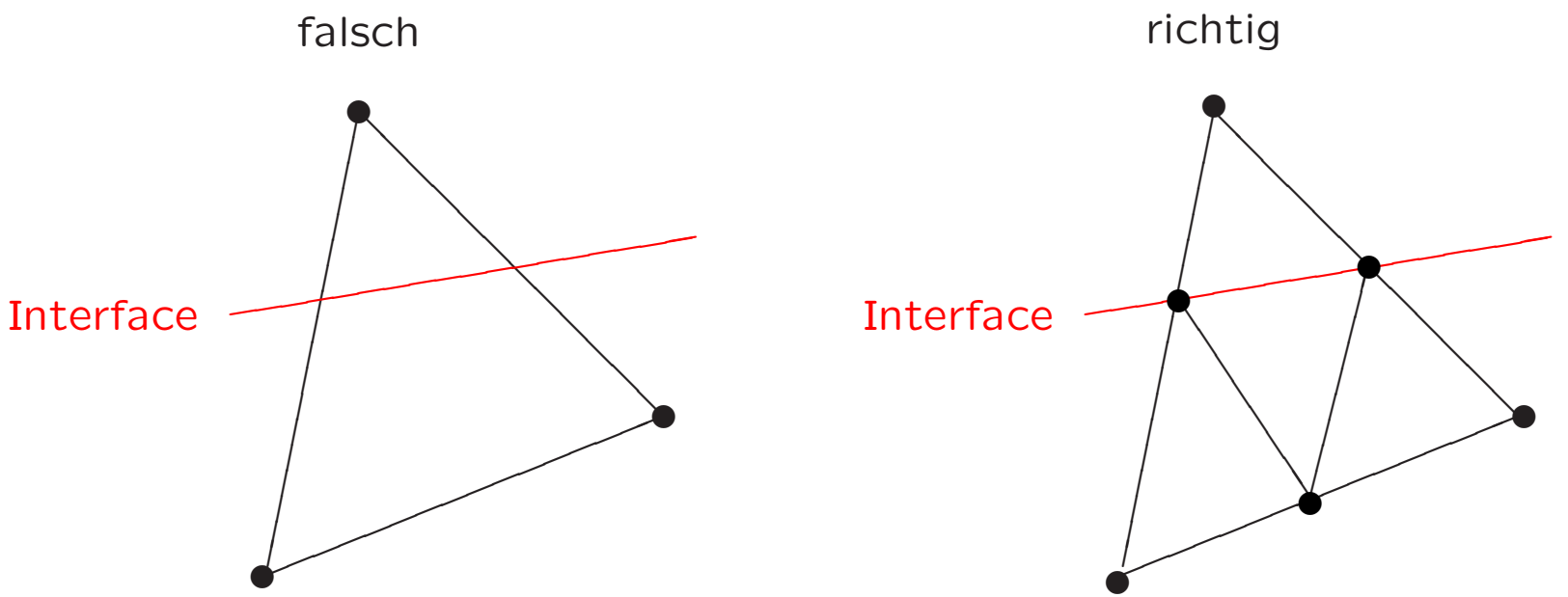
falsch



richtig

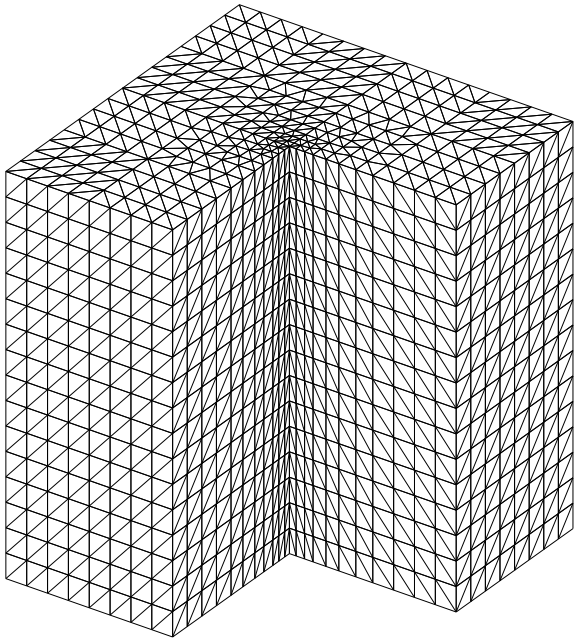


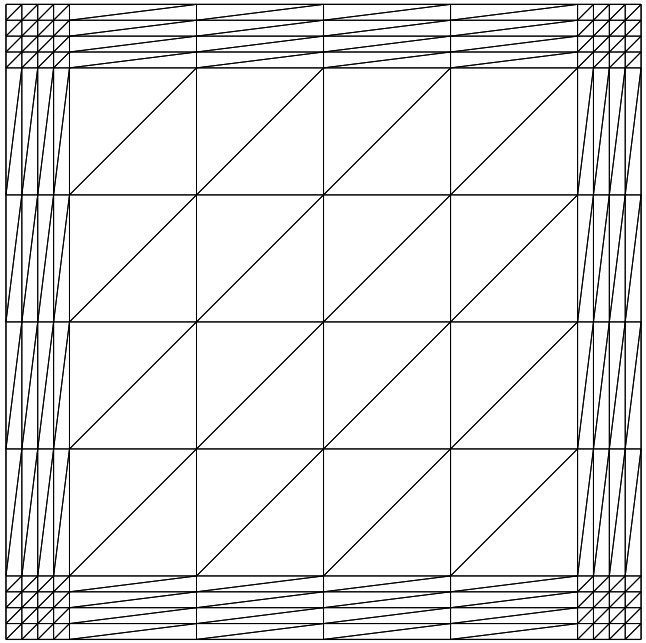
Beachtung von Interfacelinien



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Anisotrope Vernetzungen

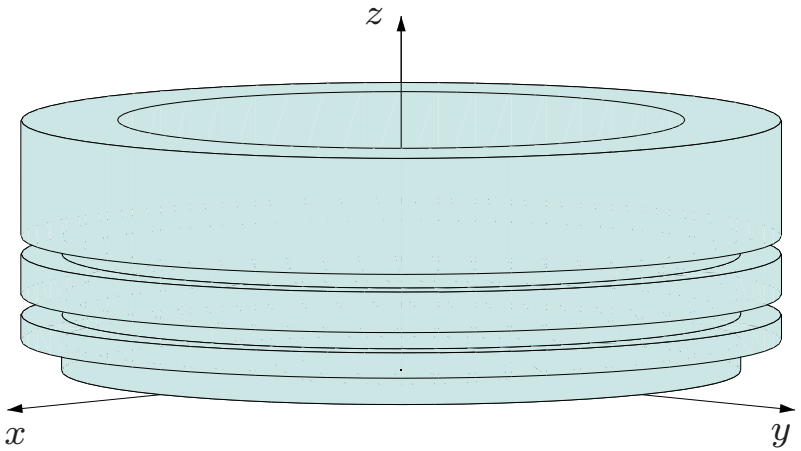




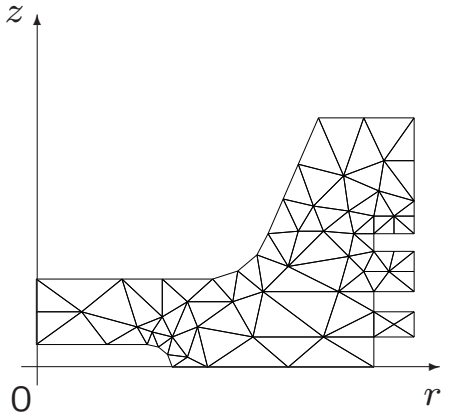
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzgenerierung mittels Produktmethoden

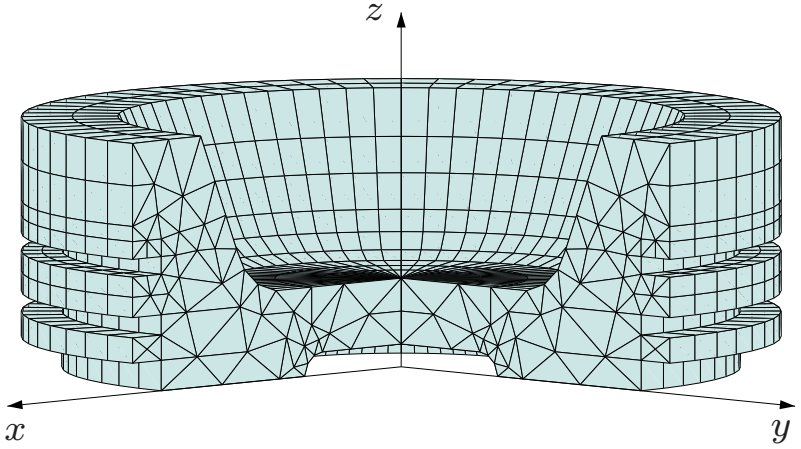
rotationssymmetrisches Gebiet

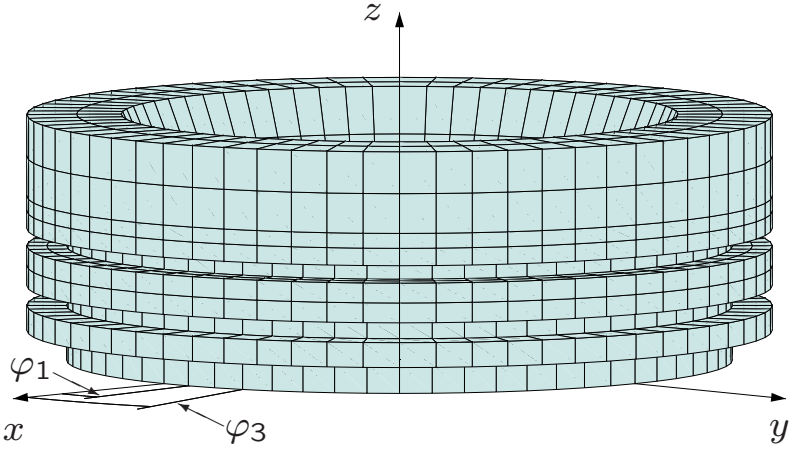


Vernetzung der Meridianebene



Vernetzung des rotationssymmetrischen Gebietes



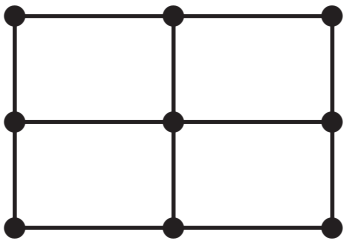


M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

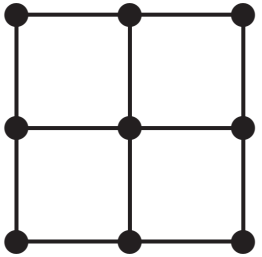
Netzgenerierung mittels Abbildungstechnik

Ω_i – Rechteck

$= w_{\text{lin}}$(Quadrat)

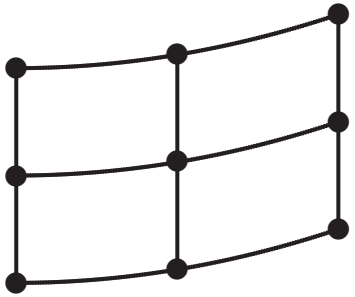


w_{lin}



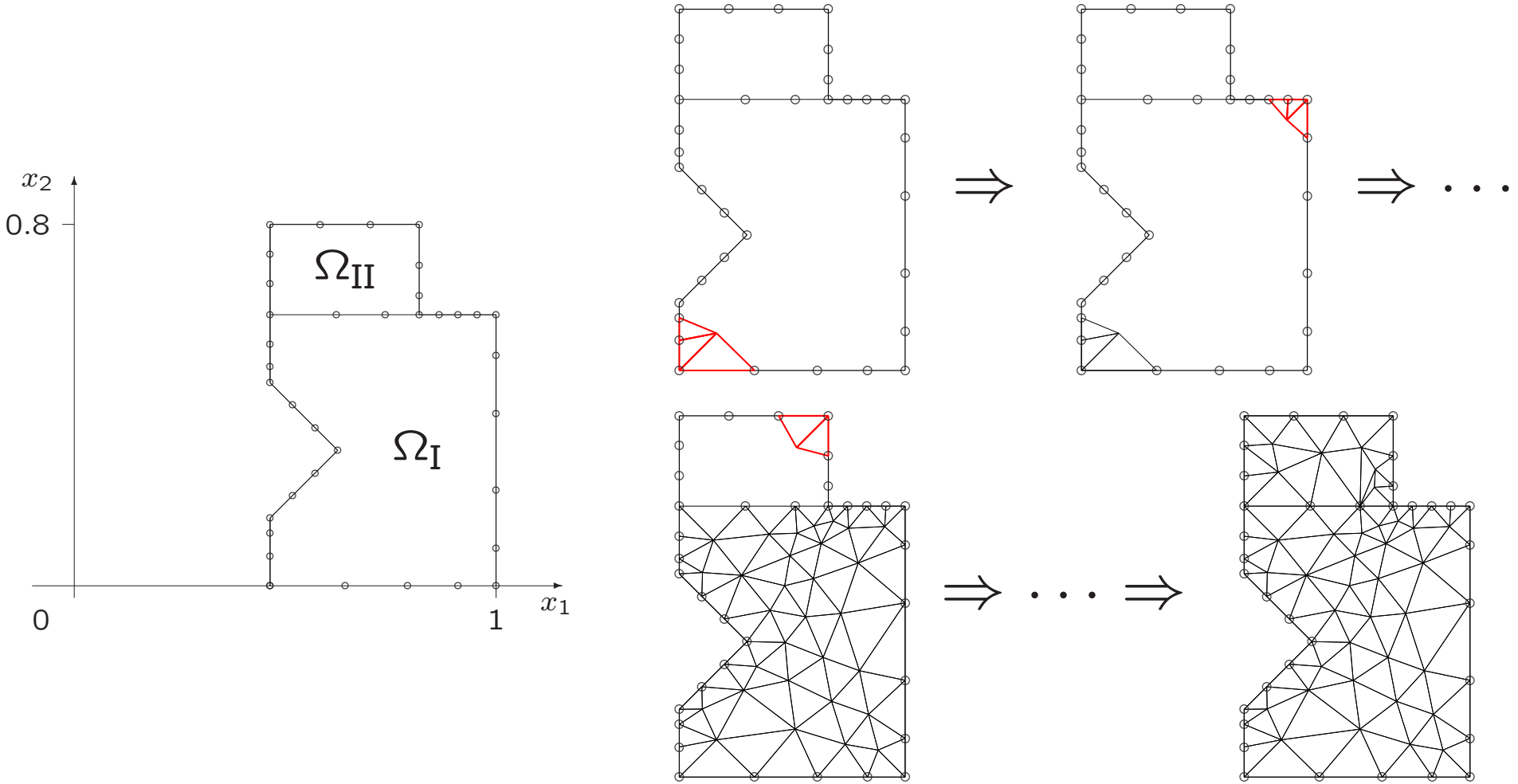
Ω_i – krummliniges Rechteck

$= w_{\text{nlin}}$(Quadrat)



w_{nlin}

Advancing-Front-Algorithmus

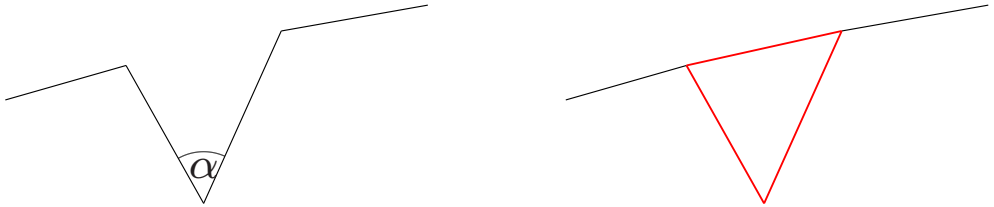


M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

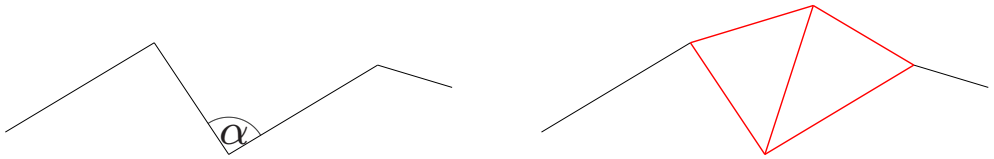
Advancing-Front-Algorithmus

Definition neuer Dreiecke und Knoten

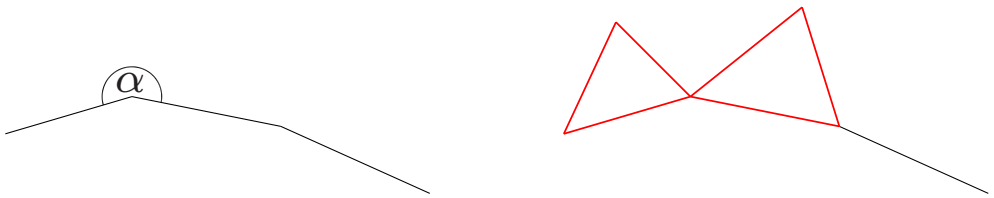
$\alpha < \frac{1}{2}\pi$: Die beiden Segmente bilden die Kanten eines neuen Dreiecks



$\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$: Definition eines inneren Punktes und Generierung von zwei Dreiecken



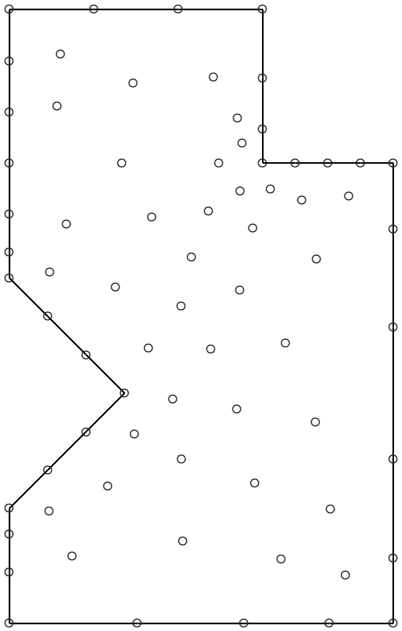
$\frac{2}{3}\pi < \alpha$: Generierung von zwei Dreiecken, die jeweils eines der beiden Segmente als Kante haben



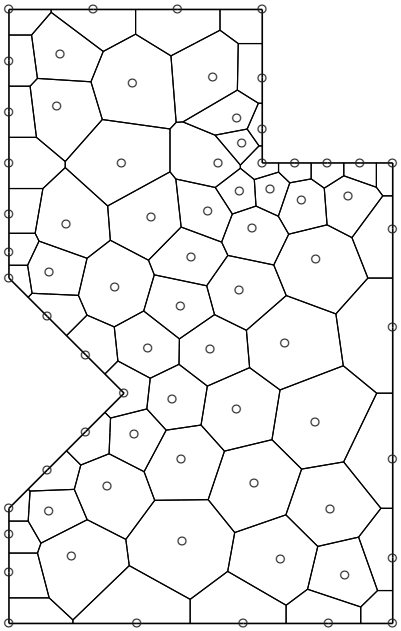
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Delaunay-Vernetzung

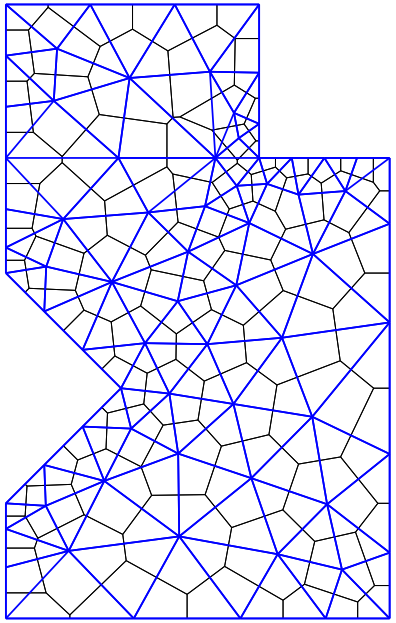
Punktmenge

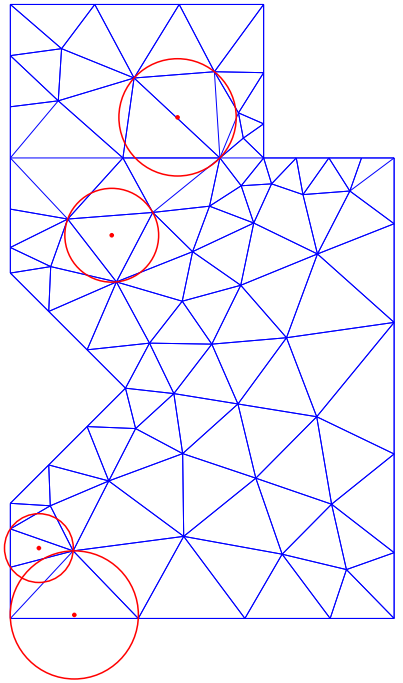


Voronoi-Zellen



Delaunay-Vernetzung

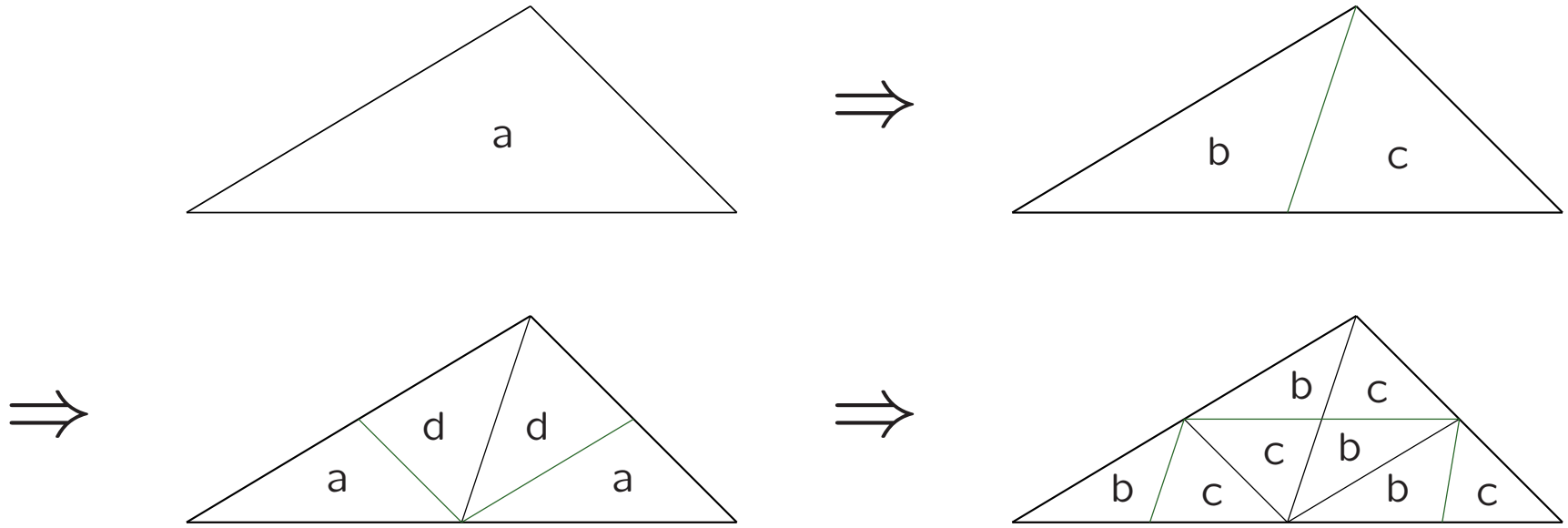




M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverfeinerung bei Dreiecksnetzen

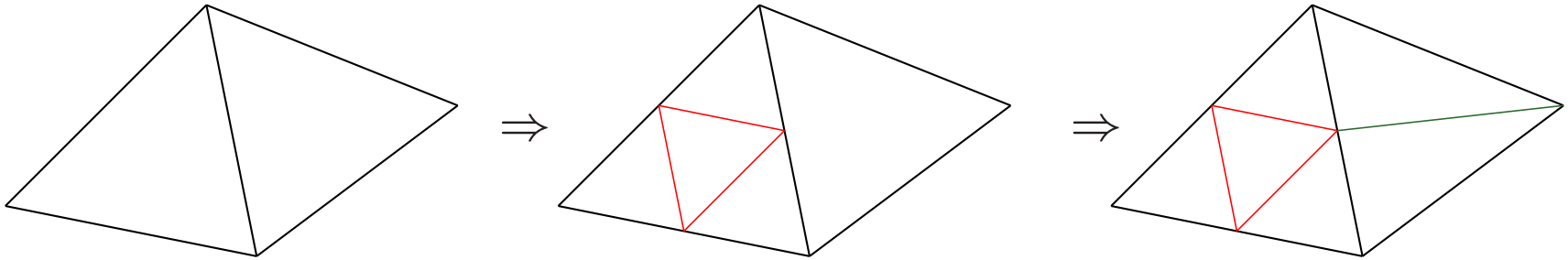
Bisektion



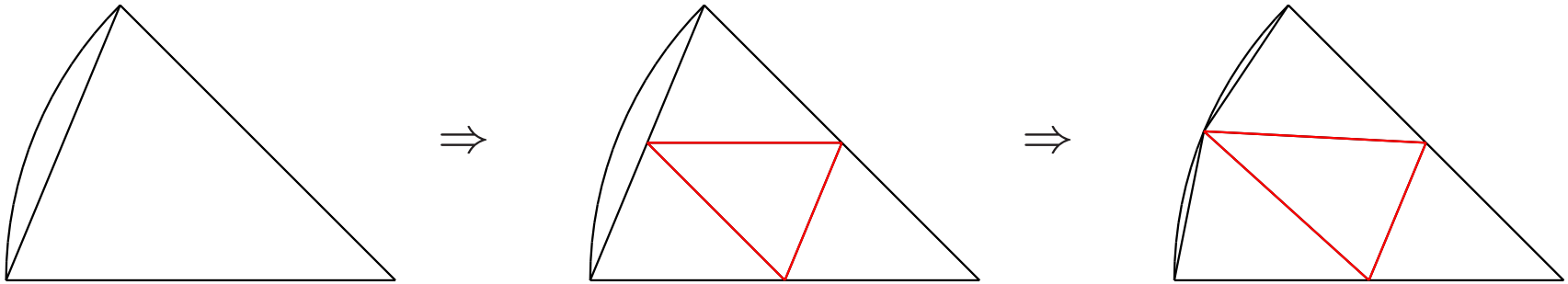
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverfeinerung bei Dreiecksnetzen

Dreiecksviertelung



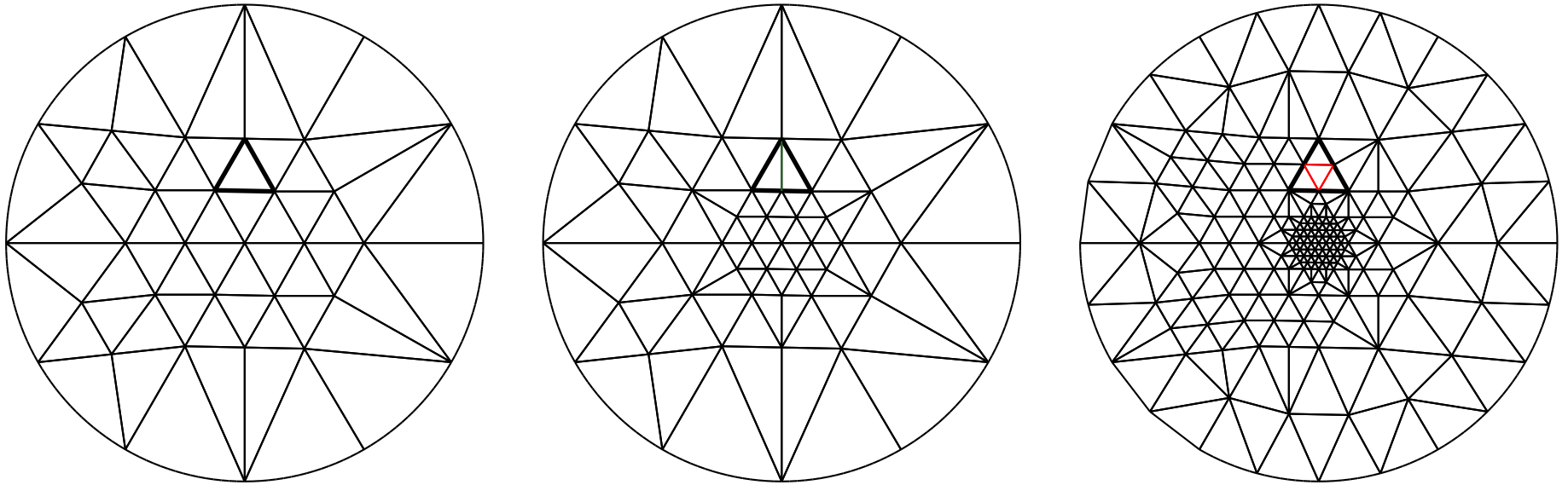
Netzverfeinerung am krummlinigen Rand



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverfeinerung bei Dreiecksnetzen

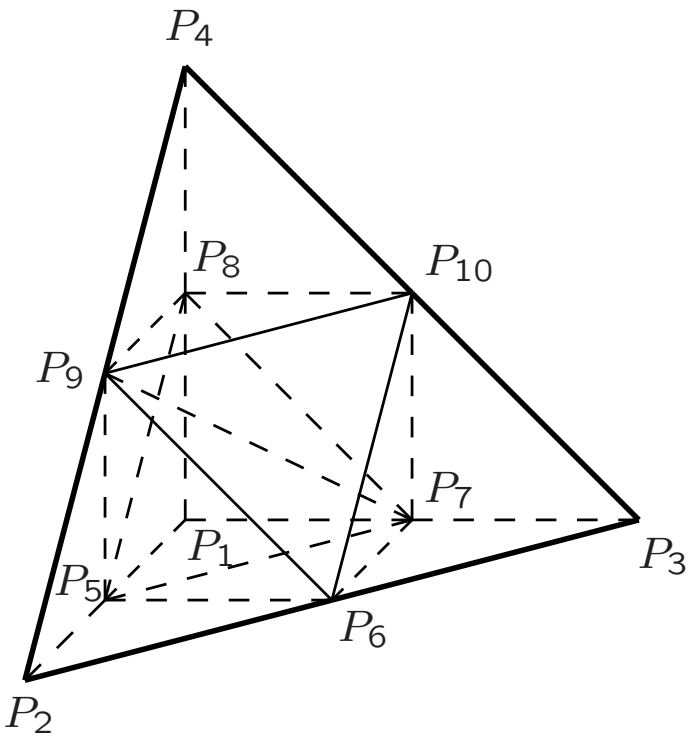
Auflösung einer „grünen“ Verfeinerung



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverfeinerung bei Tetraedernetzen

Reguläre Verfeinerung eines Tetraeders



Tetraeder $T_0 = \Delta P_1 P_2 P_3 P_4$ mit den Eckknoten P_1, P_2, P_3, P_4

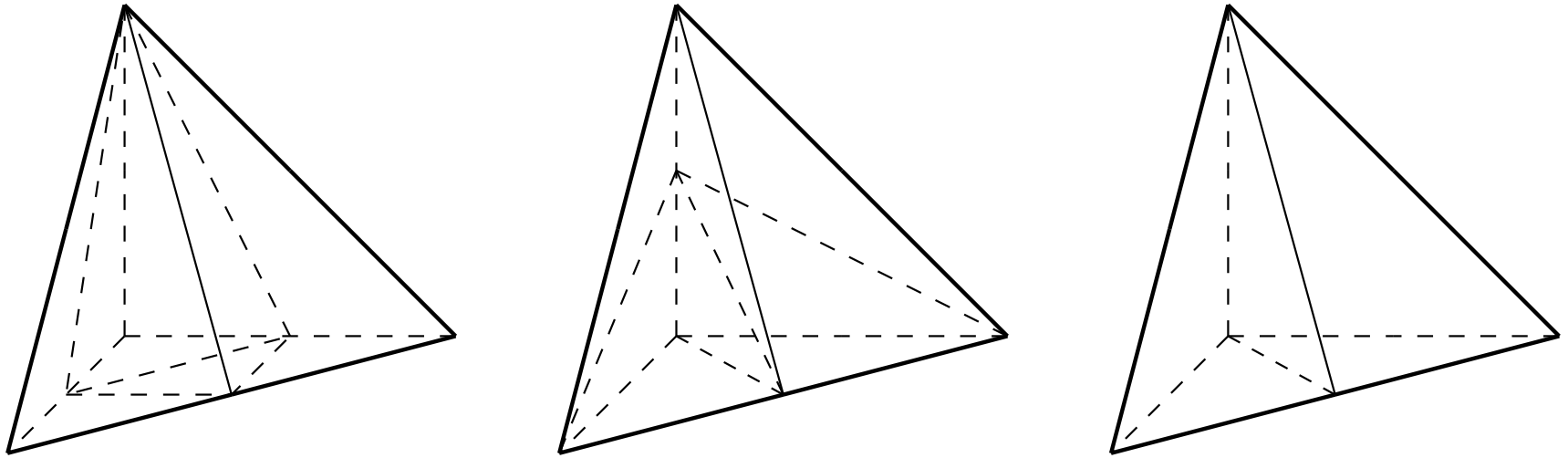
Teiltetraeder

$$T_1 = \Delta P_1 P_5 P_7 P_8 \qquad T_2 = \Delta P_5 P_2 P_6 P_9$$
$$T_3 = \Delta P_7 P_6 P_3 P_{10} \qquad T_4 = \Delta P_8 P_9 P_{10} P_4$$
$$T_5 = \Delta P_5 P_7 P_8 P_9 \qquad T_6 = \Delta P_5 P_7 P_6 P_9$$
$$T_7 = \Delta P_7 P_6 P_9 P_{10} \qquad T_8 = \Delta P_7 P_8 P_9 P_{10}$$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverfeinerung bei Tetraedernetzen

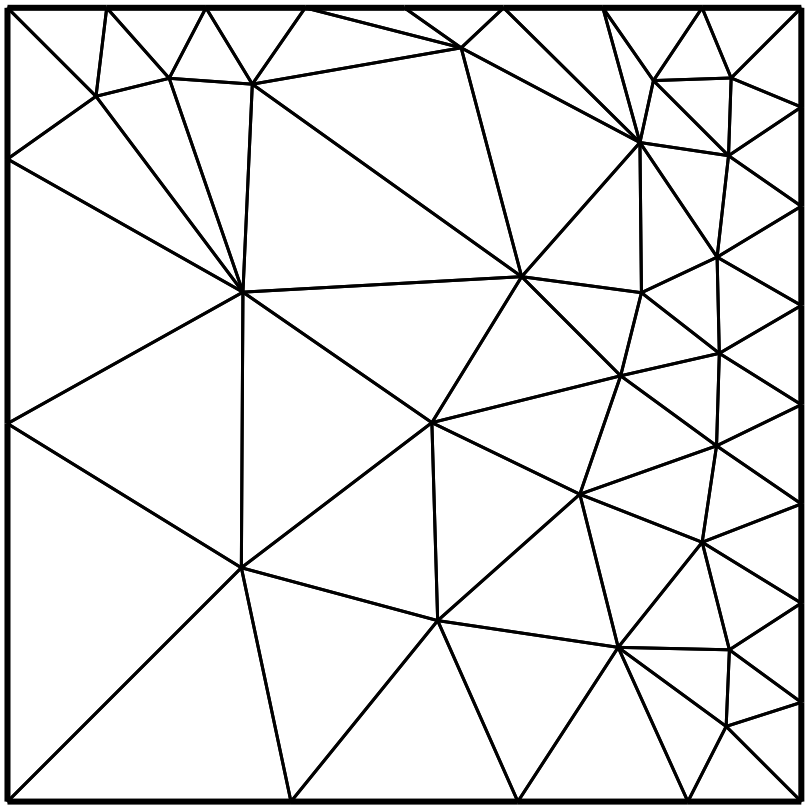
Irreguläre Verfeinerung eines Tetraeders



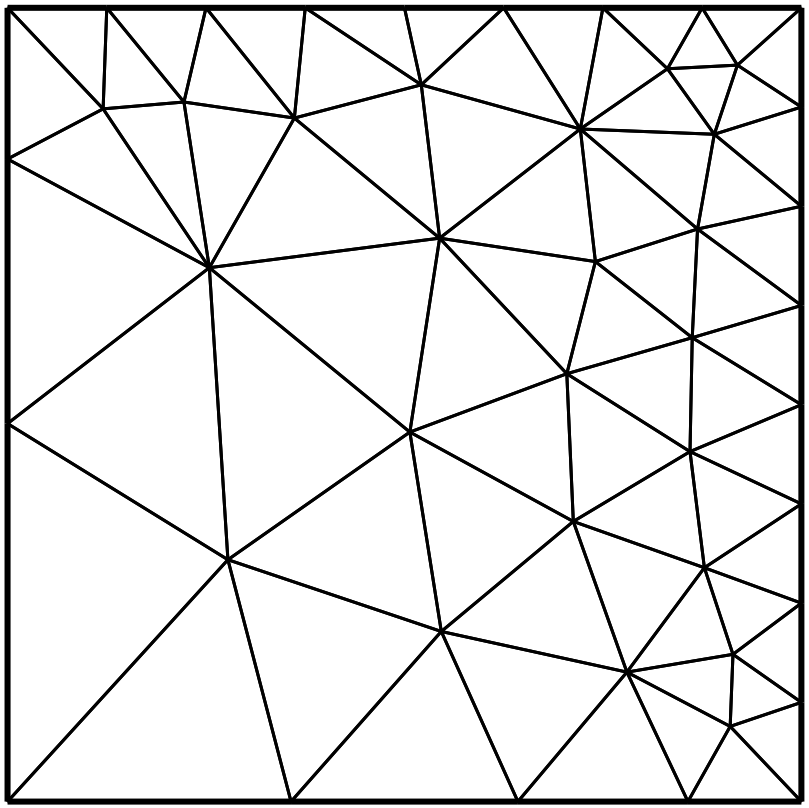
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverbesserung durch Glättung

Mittels Advancing-Front-Algorithmus erzeugte Vernetzung

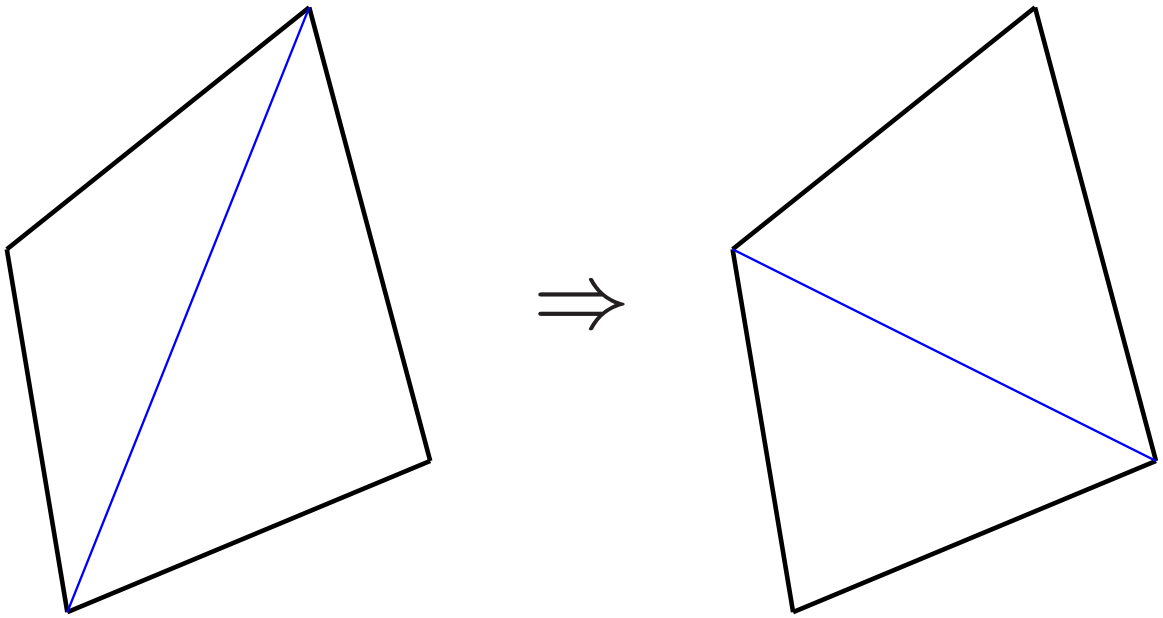


Netzverbesserung durch Netzglättung



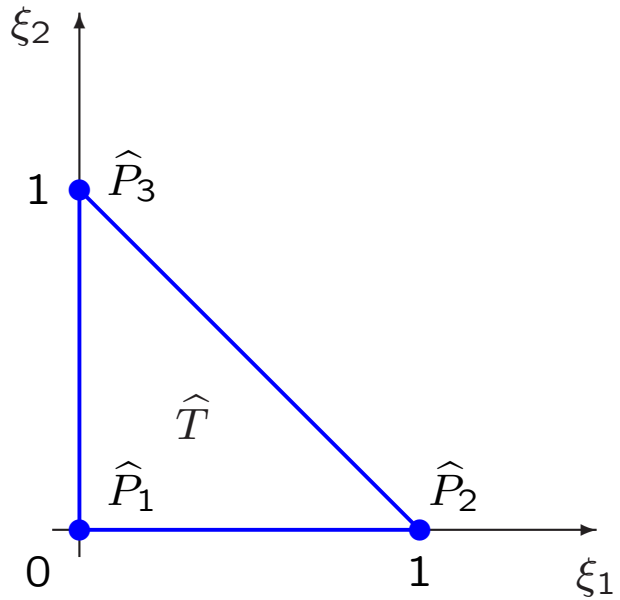
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Netzverbesserung durch Kantenvertauschung



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

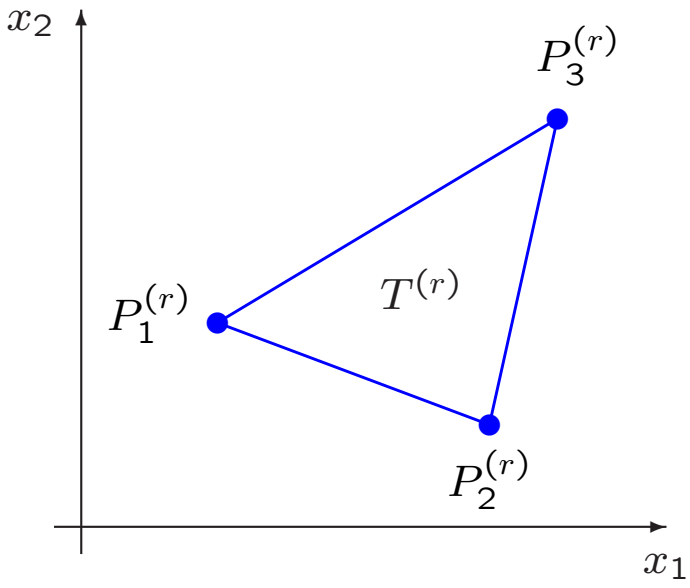
Abbildung Referenzdreieck $\widehat{T} \longleftrightarrow$ Dreieck $T^{(r)}$ der Vernetzung



Referenzdreieck $\widehat{T}$

$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

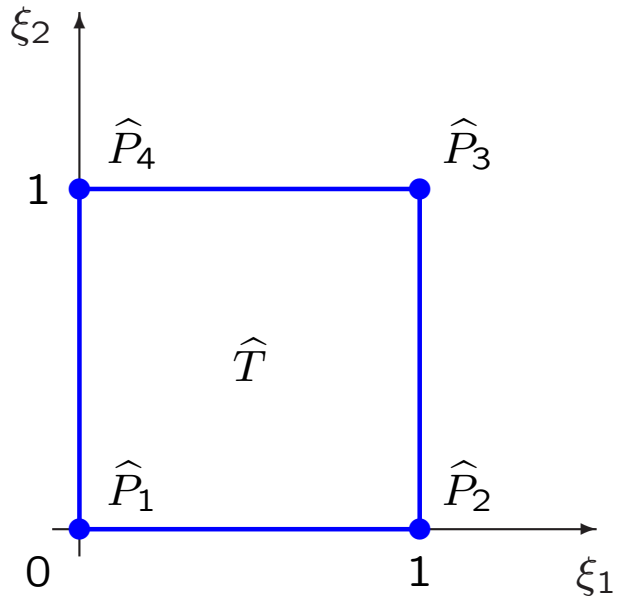
$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$



beliebiges Dreieck $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

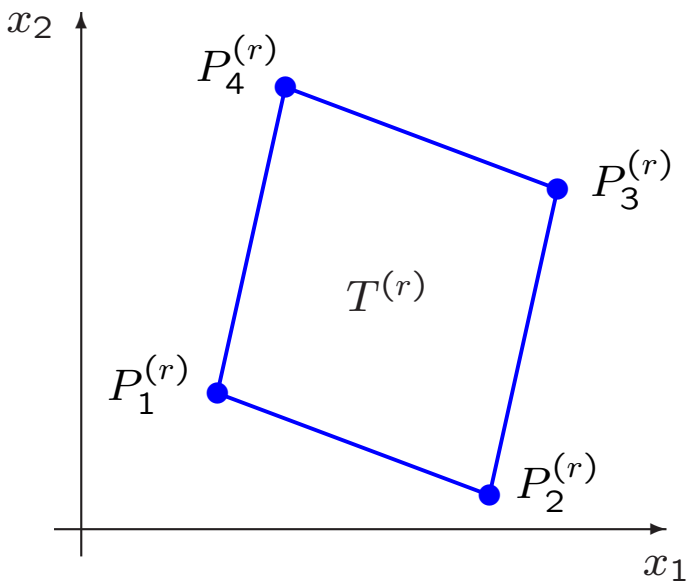
Abbildung Referenzviereck $\widehat{T} \longleftrightarrow$ Viereck $T^{(r)}$ der Vernetzung



Referenzviereck $\widehat{T}$

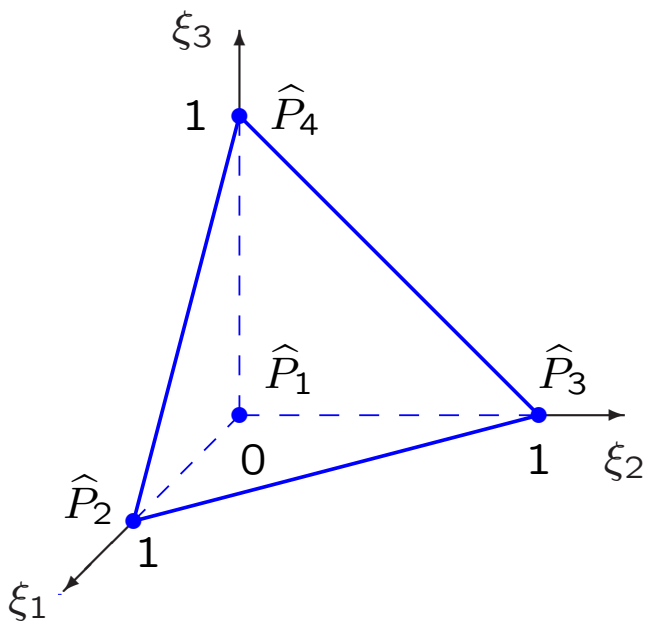
$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$



beliebiges Parallelogramm $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

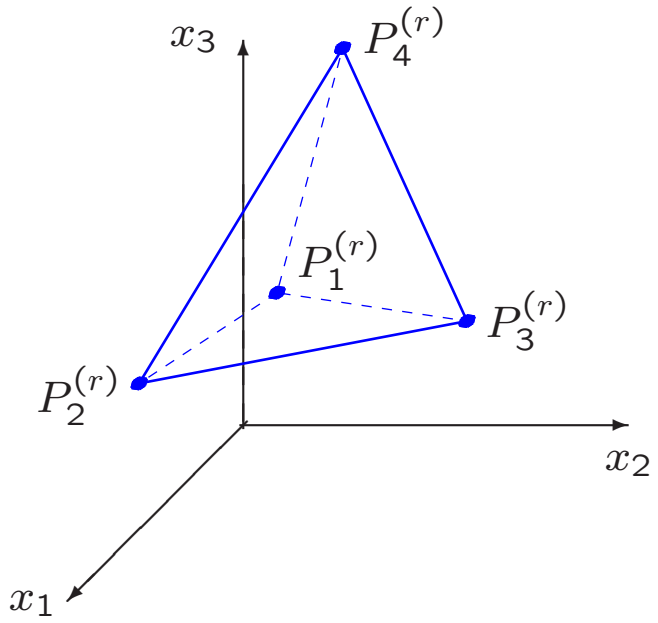
Abbildung Referenztetraeder $\widehat{T} \longleftrightarrow$ Tetraeder $T^{(r)}$ der Vernetzung



Referenztetraeder $\widehat{T}$

$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

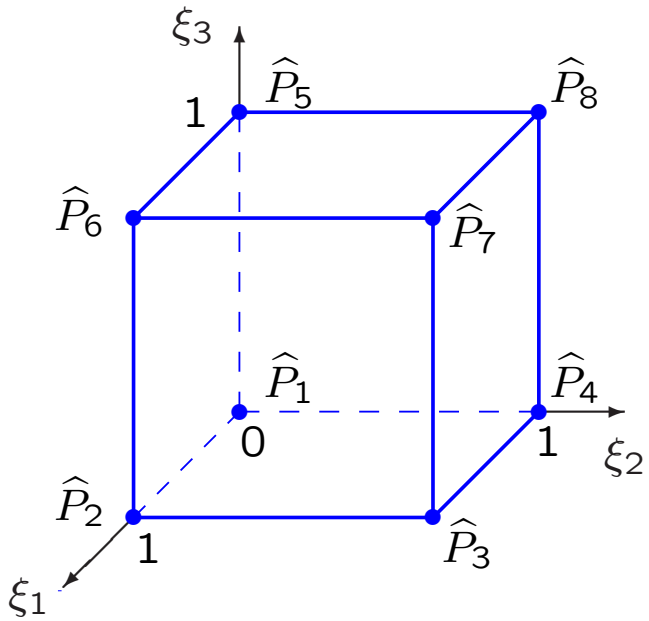
$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$



beliebiges Tetraeder $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

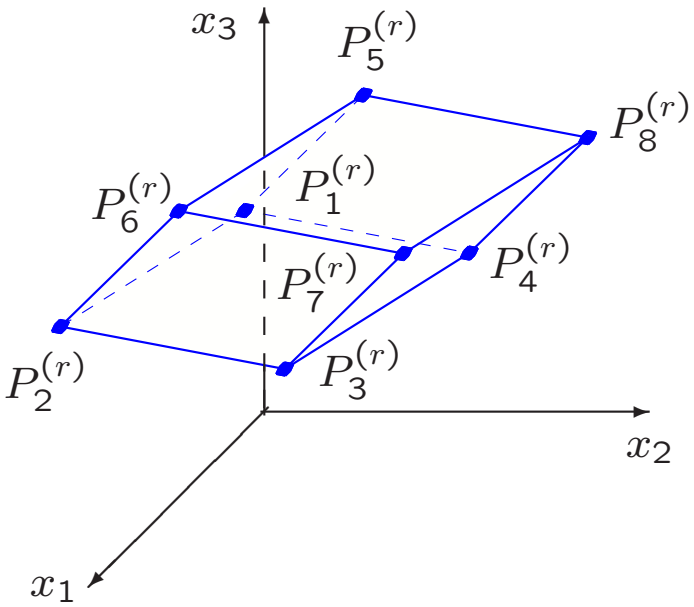
Abbildung Referenzhexaeder $\widehat{T} \longleftrightarrow$ Hexaeder $T^{(r)}$ der Vernetzung



Referenzhexaeder $\widehat{T}$

$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

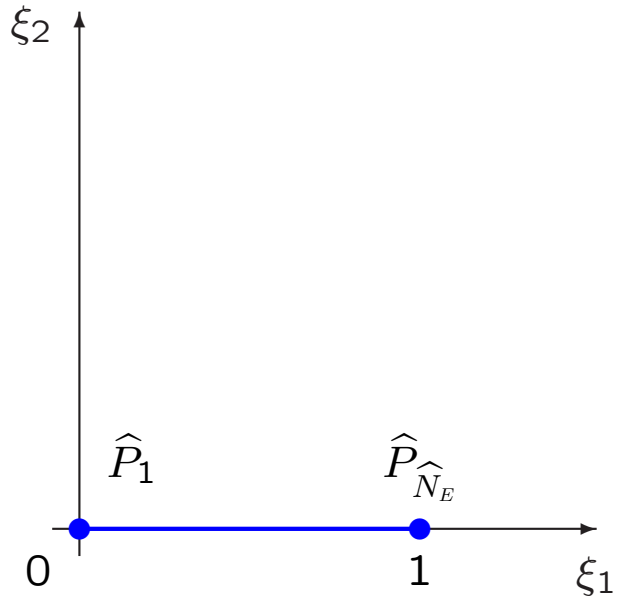
$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$



beliebiges Parallelepiped $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

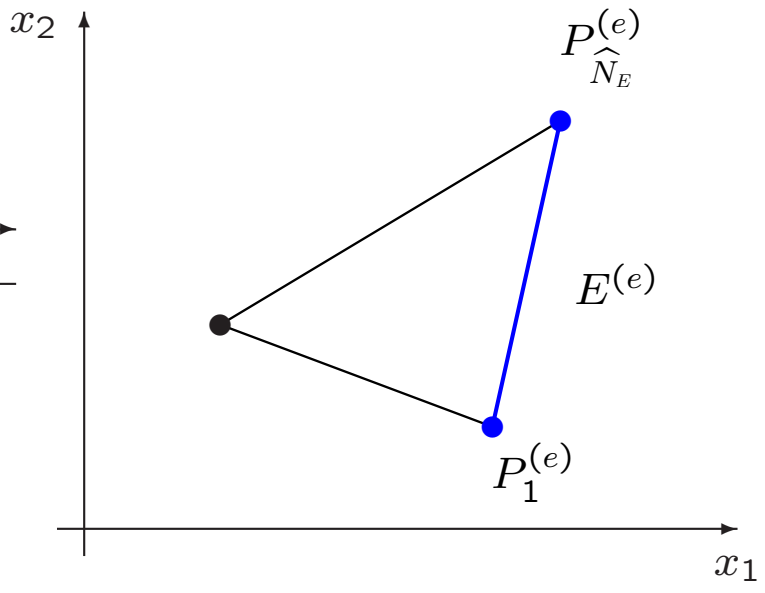
Abbildung Referenzintervall $\longleftrightarrow$ Dreiecks- bzw. Viereckseite



Referenzintervall $[0,1]$

$$x = x_{E^{(e)}}(\xi_1)$$

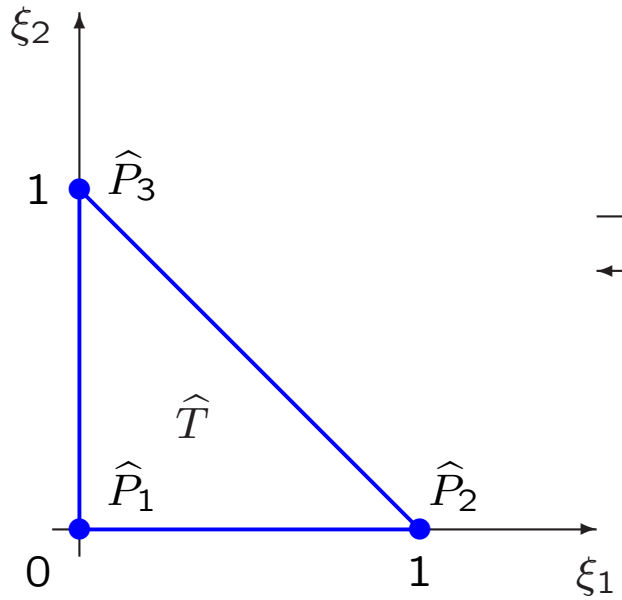
$$\xi_1 = \xi_{1,E^{(e)}}(x)$$



beliebige Dreiecksseite $E^{(e)}$ auf Γ

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

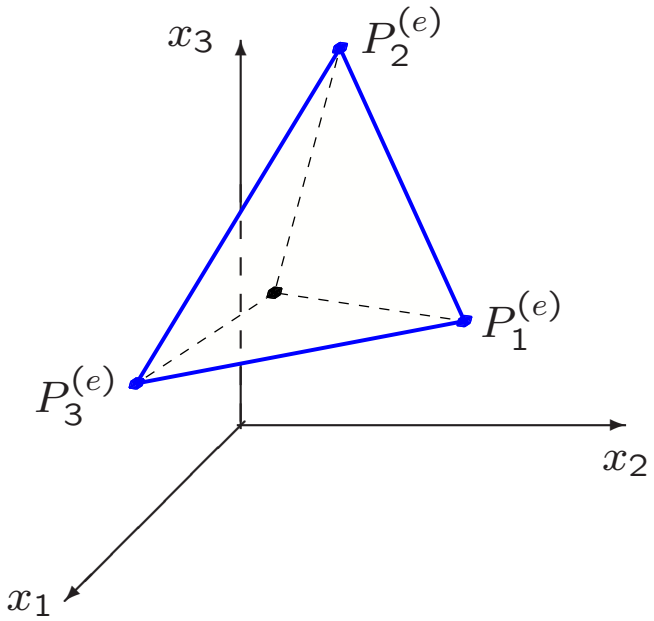
Abbildung Referenzdreieck $\longleftrightarrow$ Dreiecksfläche auf dem Rand



Referenzdreieck $\widehat{T}$

$$x = x_{E^{(e)}}(\xi)$$

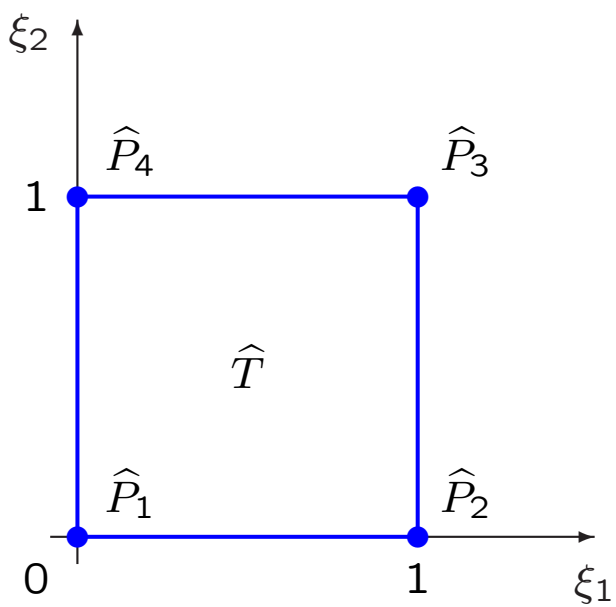
$$\xi = \xi_{E^{(e)}}(x)$$



beliebige Dreiecksfläche $E^{(e)}$ auf Γ

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

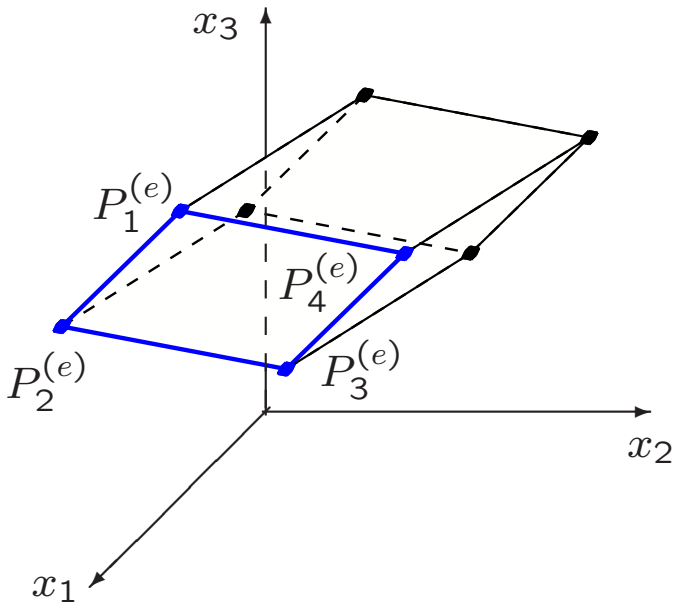
Abbildung Referenzviereck $\longleftrightarrow$ Viereckfläche auf dem Rand



Referenzviereck $\widehat{T}$

$$x = x_{E^{(e)}}(\xi)$$

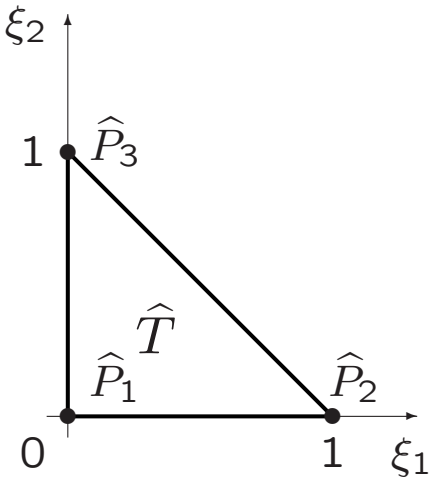
$$\xi = \xi_{E^{(e)}}(x)$$



beliebige Viereckfläche $E^{(e)}$ auf Γ

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Definition stückweise linearer Ansatzfunktionen



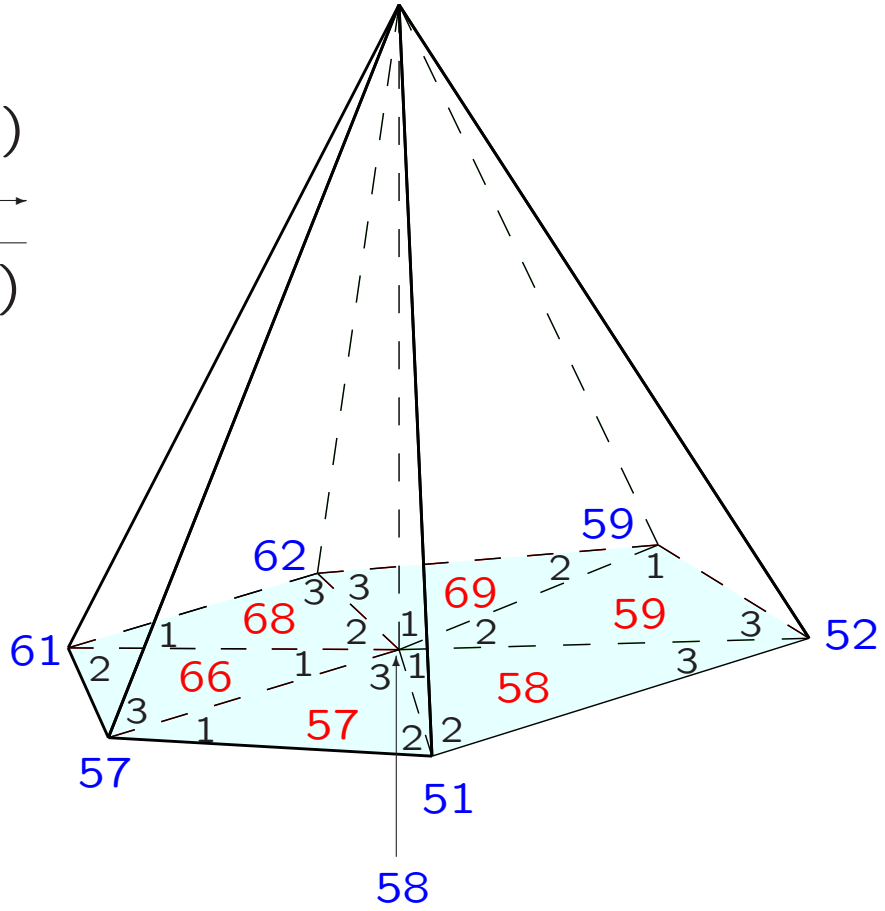
$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

$$\varphi_2(\xi) = \xi_1$$

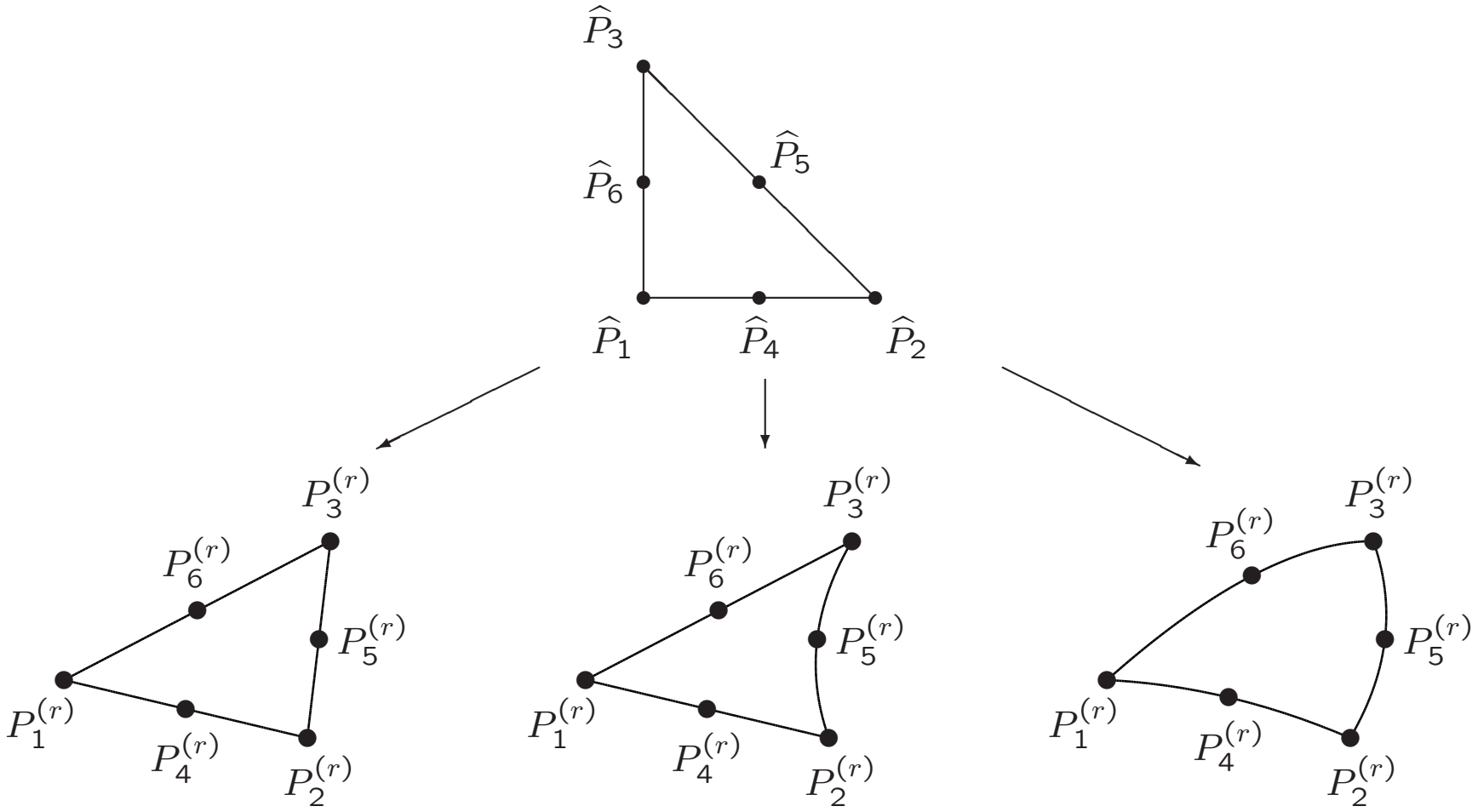
$$\varphi_3(\xi) = \xi_2$$



$$p_{58}(x)\big|_{T^{(59)}} = p_2^{(59)}(x) = \varphi_2(\xi_{T^{(59)}}(x))$$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Isoparametrische Dreieckselemente



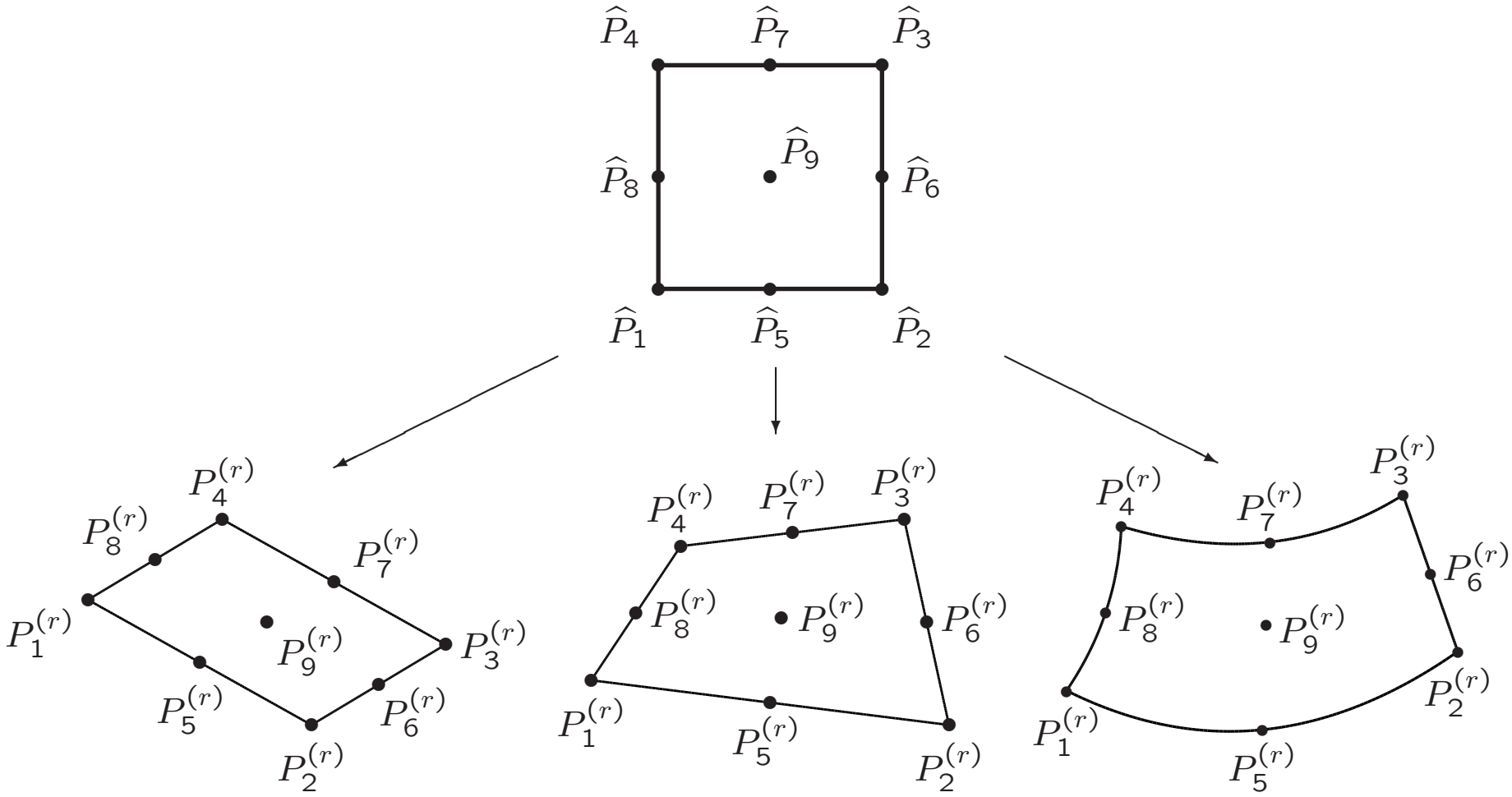
affin linearer Fall

isoparametrischer Fall mit einer krummlinigen Seite

allgemeiner isoparametrischer Fall

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Isoparametrische Viereckselemente



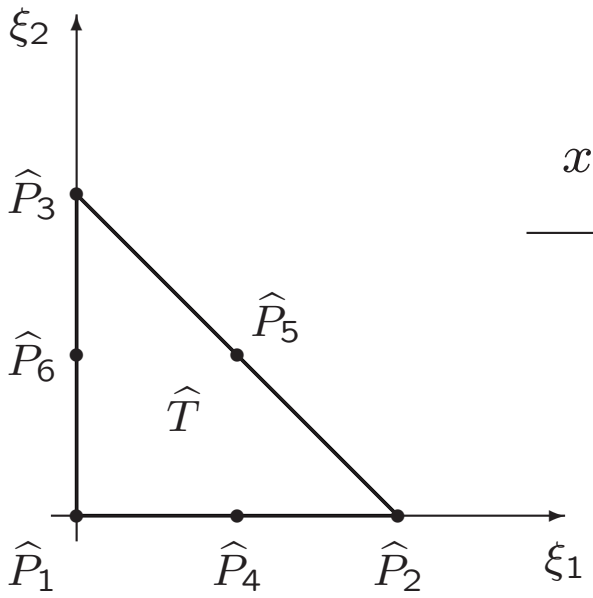
affin linearer Fall

bilinearer Fall

allgemeiner isoparametrischer Fall

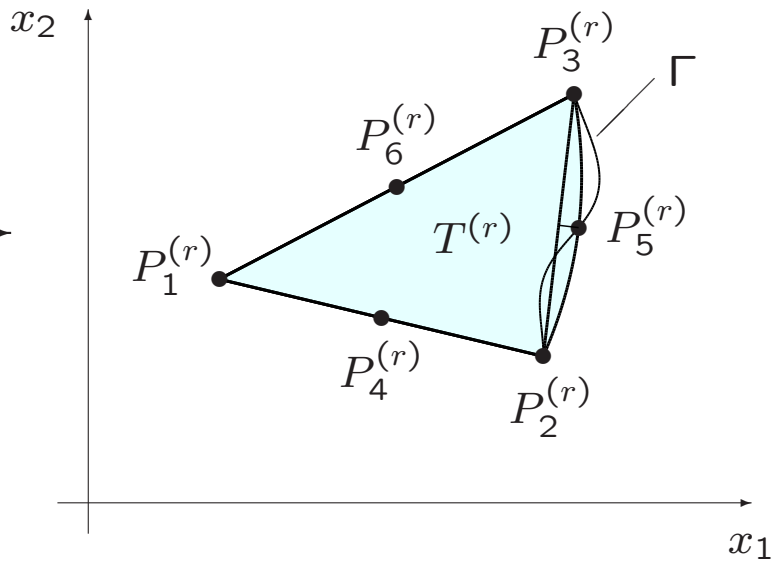
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Randapproximation mittels isoparametrischer Dreiecke



Referenzdreieck $\widehat{T}$

$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$



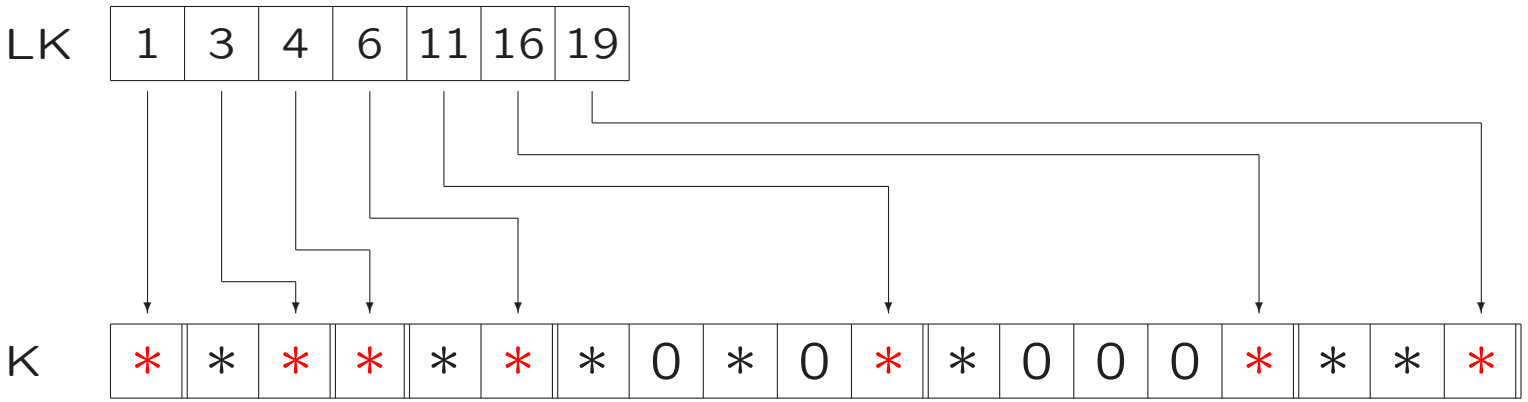
Dreieck mit einer krummlinigen Seite

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Speichertechnik für dünnbesetzte Matrizen

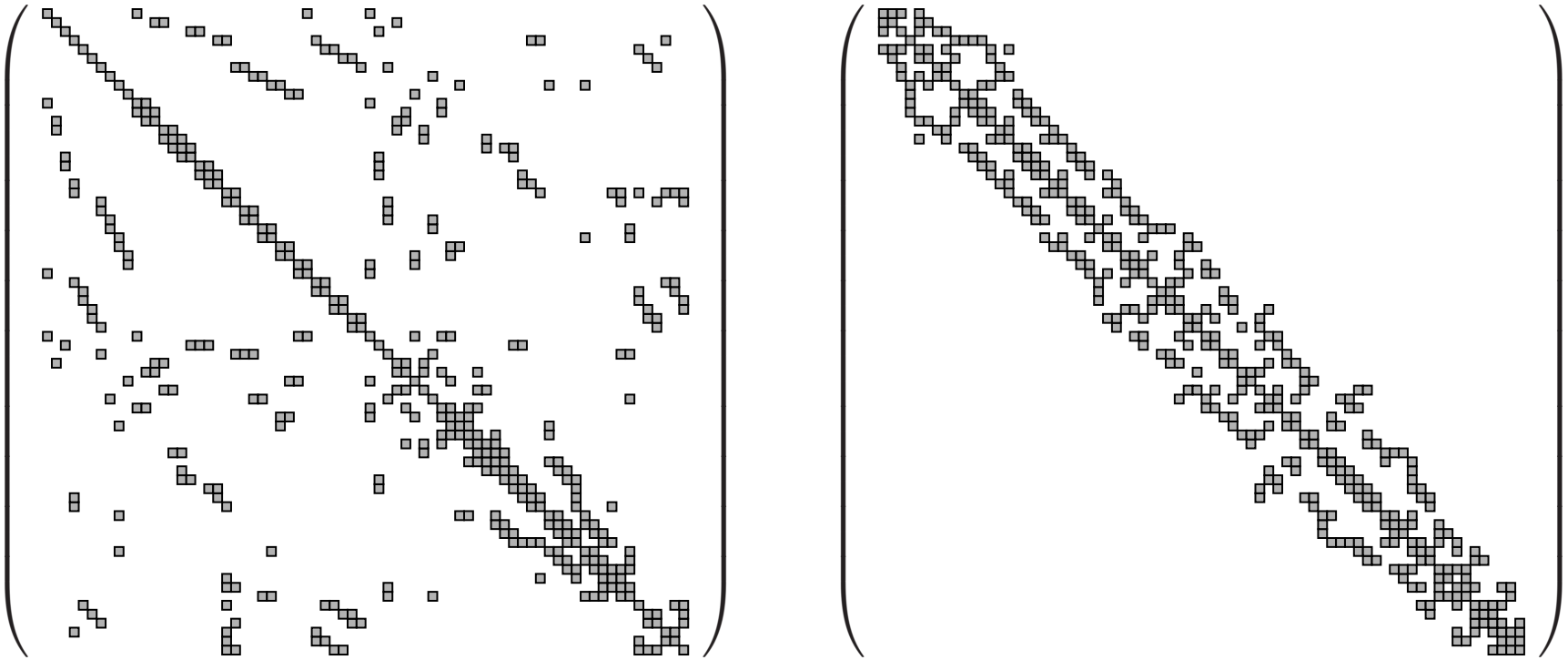
Variable Bandweite spaltenweise - Skyline-Speichertechnik

$$K = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Besetzheitsstruktur einer Steifigkeitsmatrix vor und nach Knotenumnummerierung



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

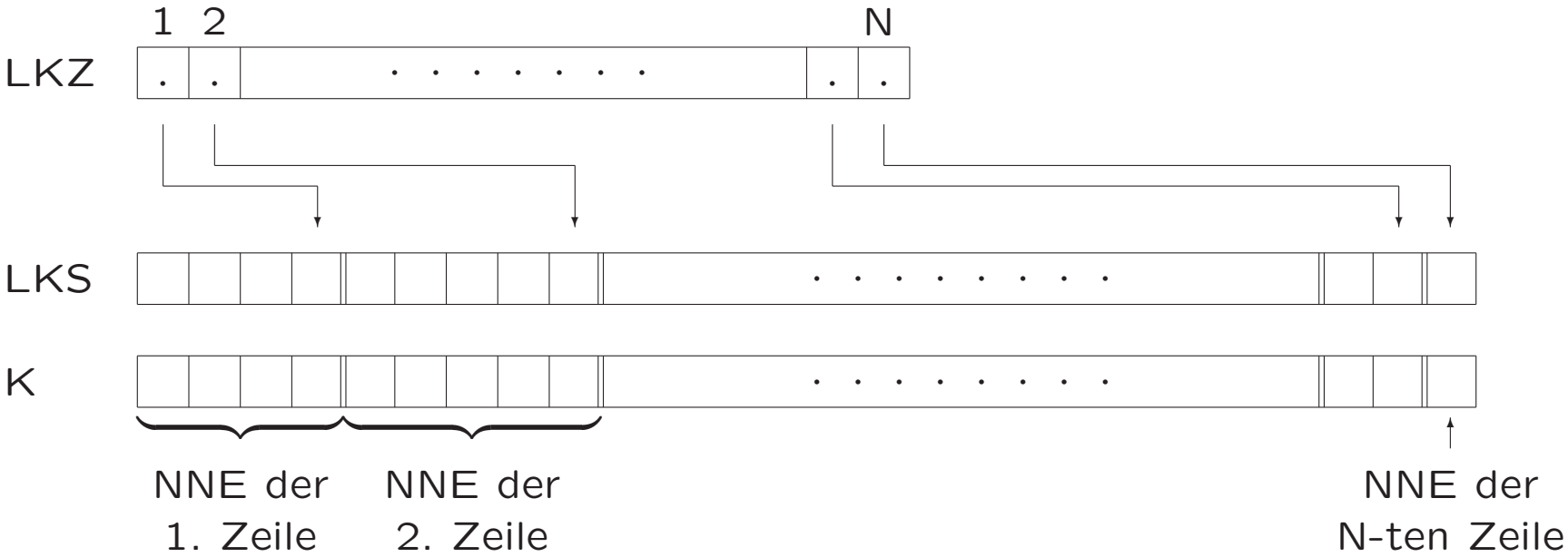
Speichertechnik für dünnbesetzte Matrizen

Kompaktliste zeilenweise (compressed row storage scheme)

K Vektor mit den Nicht-Null-Elementen (NNE) im oberen Dreieck einer symmetrischen Matrix K zeilenweise angeordnet

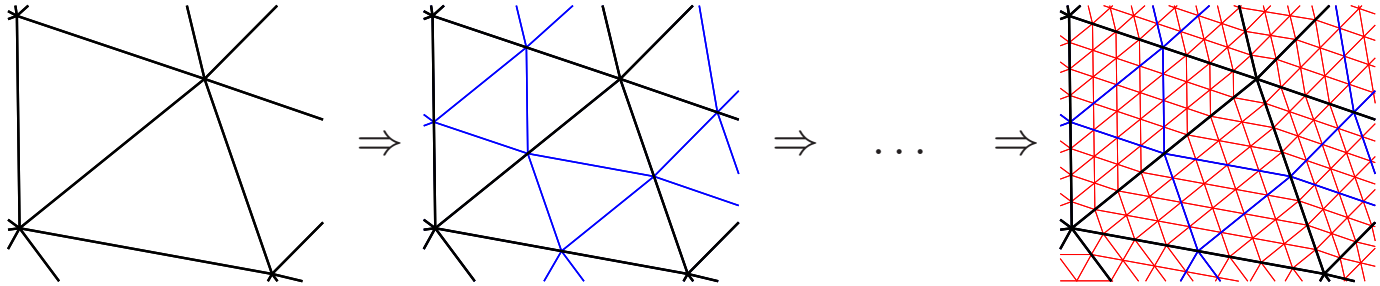
LKZ Zeiger auf die Position des jeweiligen letzten Nicht-Null-Elementes einer Zeile der Matrix K im Vektor K

LKS Vektor der Spaltenindizes



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Vernetzungsfolge für Mehrgitterverfahren

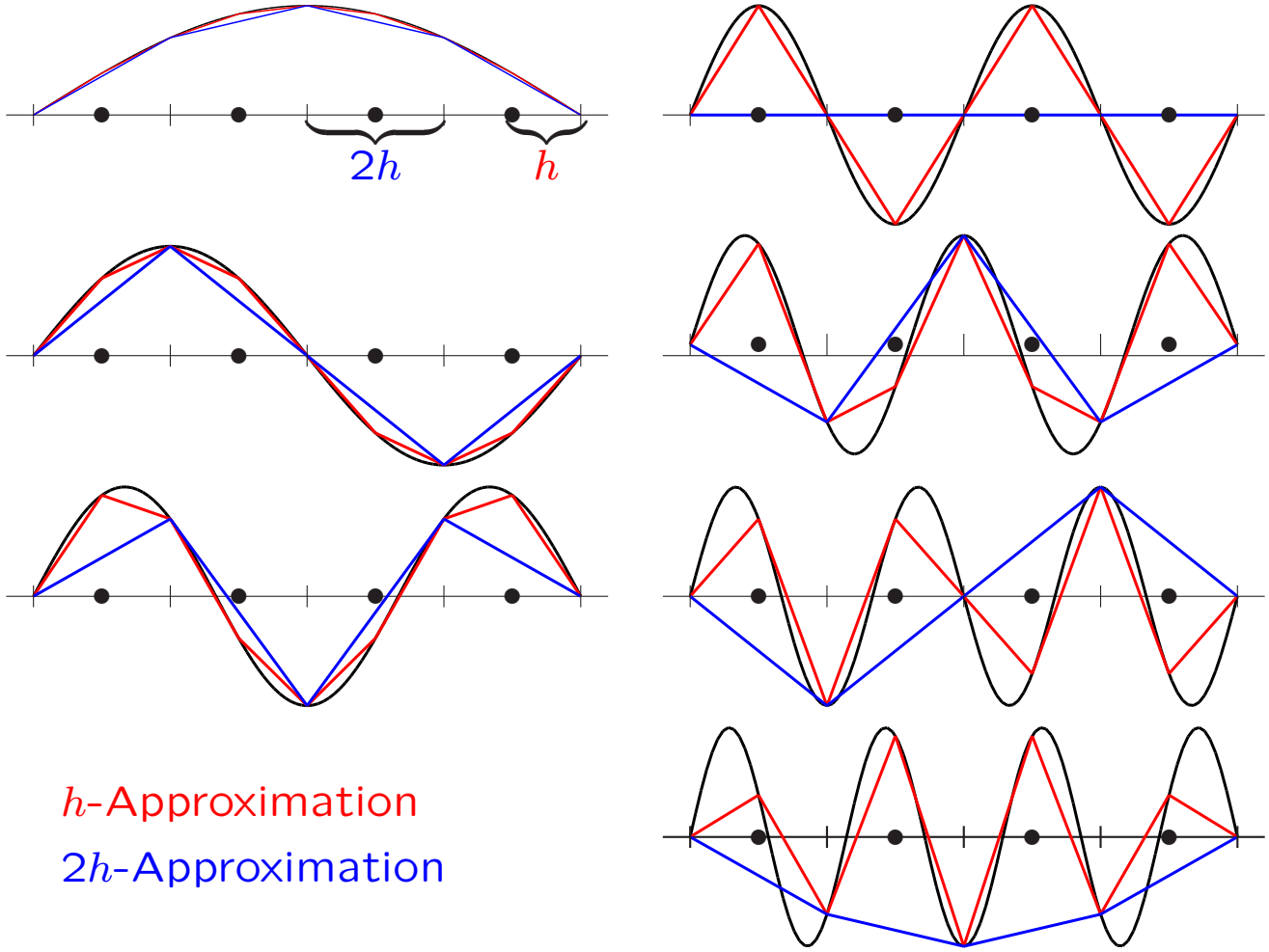


Vernetzung	$\mathcal{T}_{h_1}$		$\mathcal{T}_{h_2}$				$\mathcal{T}_{h_\ell}$
Schritt-weite	h_1	$>$	h_2	$>$	$\ldots$	$>$	h_ℓ
Knoten-anzahl	$\bar{N}_1$	$<$	$\bar{N}_2$	$<$	$\ldots$	$<$	$\bar{N}_\ell$

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Niedrig- und hochfrequente Eigenfunktionen

Approximation der Funktionen $\sqrt{2}\sin(k\pi x)$, $k = 1, 2, \ldots, 7$



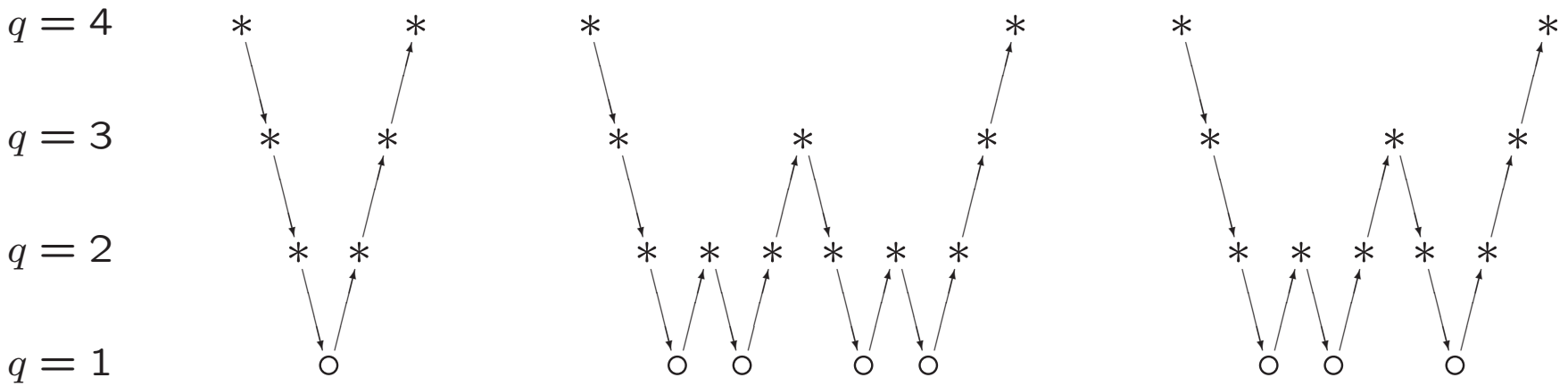
M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

Zyklenarten in Mehrgitterverfahren

Seien mit

- $*$ die Durchführung der Glättung,
- $\circ$ die Lösung des Gleichungssystems auf dem gröbsten Gitter,
- $\searrow$ die Restriktion und
- $\nearrow$ die Interpolation

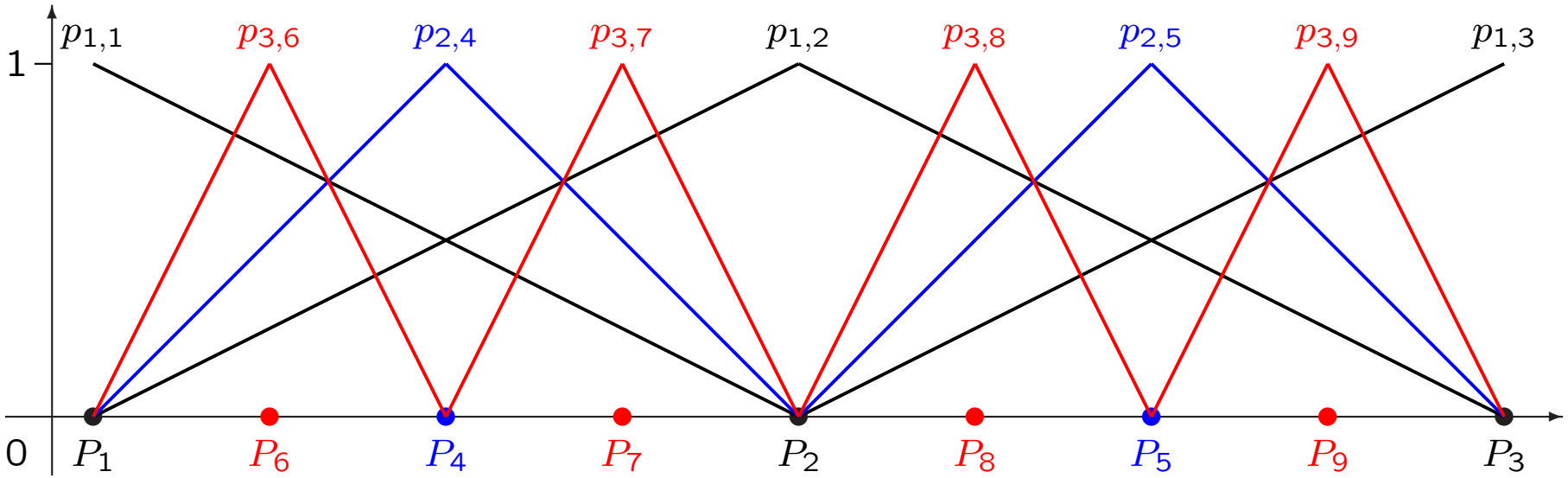
bezeichnet.



V–Zyklus W–Zyklus F–Zyklus

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

h-hierarchische Basis mittels stückweise linearer Ansatzfunktionen



M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013

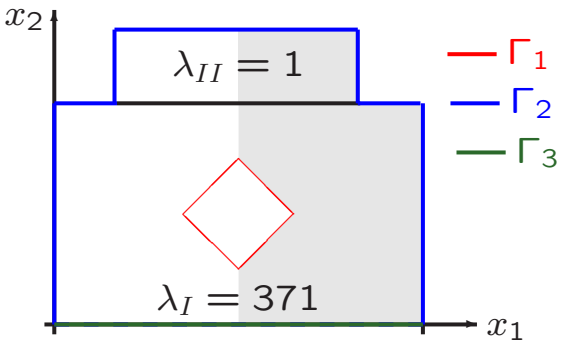
Vergleich verschiedener Auflösungsverfahren anhand eines Wärmeleitproblems

Diskretisierung: Dreieckselemente,
stückweise lineare Ansatzfunktionen

$\Rightarrow$ FE-Gleichungssystem $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$

Startvektor für die Iterationsverfahren:
$\underline{u}_h^{(0)} = (500, 500, \ldots, 500)^T$

Abbruch der Iteration bei $\|\underline{r}_h^{(k)}\| \leq 10^{-5} \|\underline{r}_h^{(0)}\|$, $\underline{r}_h^{(k)} = K_h \underline{u}_h^{(k)} - \underline{f}_h$



#Unbekannte	933		3593		14097		55841		222273	
Lösungsverf.	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]
Direktes Verf.										
Faktorisierung		0.00		0.02		0.12		1.64		48.62
Lösung		0.00		0.00		0.01		0.08		0.59
Jacobi	1323857	24.89	5285232	462.78	20994731	11681.05				
Gauß-Seidel	628039	14.25	2402169	220.56	9148812	5837.63				
SOR	2231	0.06	4487	0.46	9014	5.82	18217	46.89	36723	380.47
CG	1206	0.03	3697	0.43	9605	9.99	21711	108.37	46011	905.20
DIAG-PCG	153	0.00	326	0.04	672	0.83	1377	8.96	2790	72.96
SSOR-PCG	44	0.00	72	0.03	122	0.25	203	2.06	336	13.71
IC-PCG	38	0.00	72	0.02	145	0.26	295	2.62	584	21.15
MIC-PCG	19	0.00	27	0.00	44	0.08	69	0.64	113	4.21
HB-PCG	27	0.00	36	0.00	46	0.06	56	0.57	66	3.01
MG-F22	4	0.00	4	0.00	4	0.02	4	0.14	4	0.66
MG-PCG,V11	7	0.00	7	0.00	7	0.03	7	0.18	7	0.84
MDS-PCG	19	0.00	22	0.00	23	0.03	25	0.24	26	1.09

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013