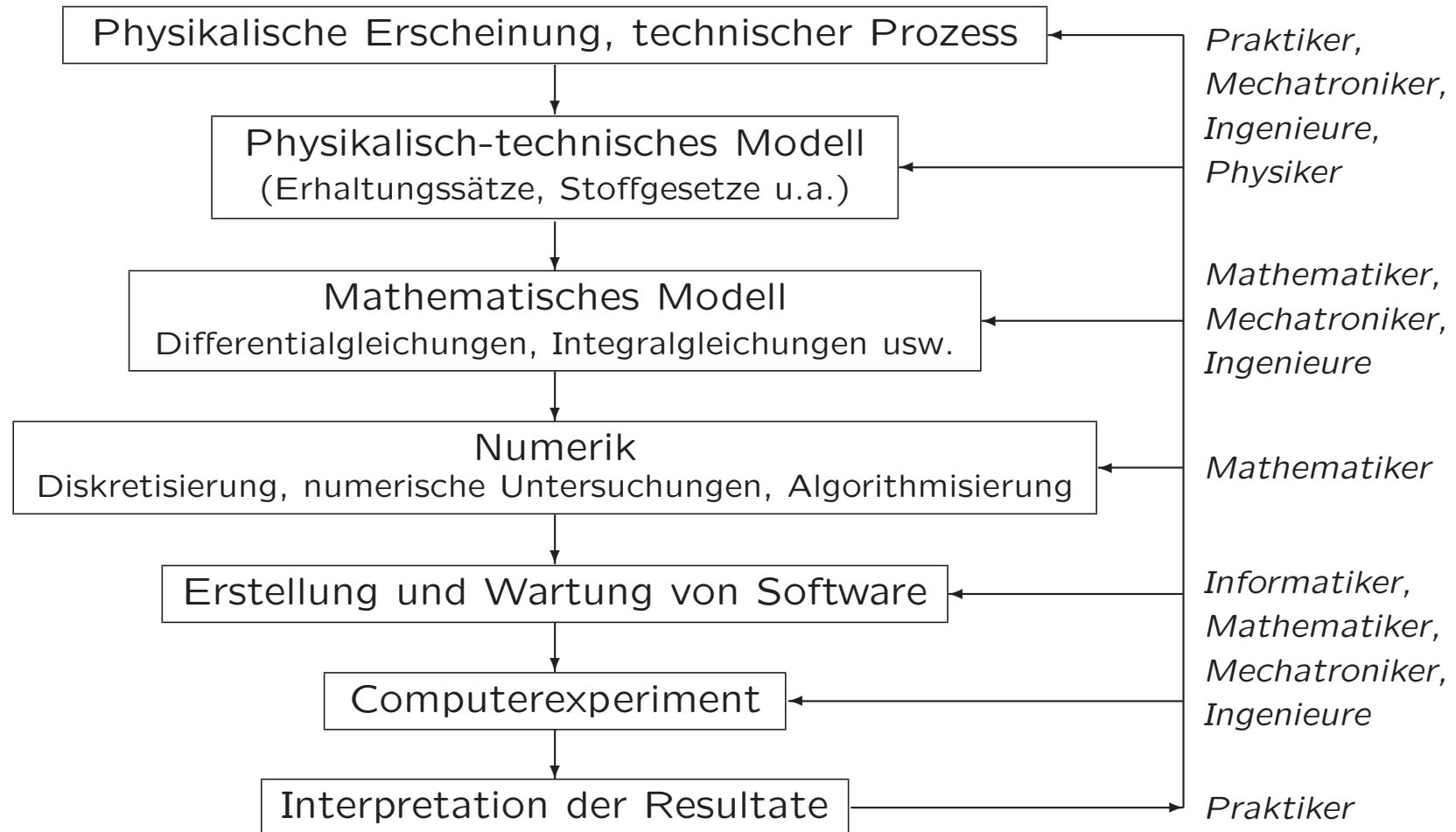


# Vom physikalisch-technischen Problem zur Computersimulation



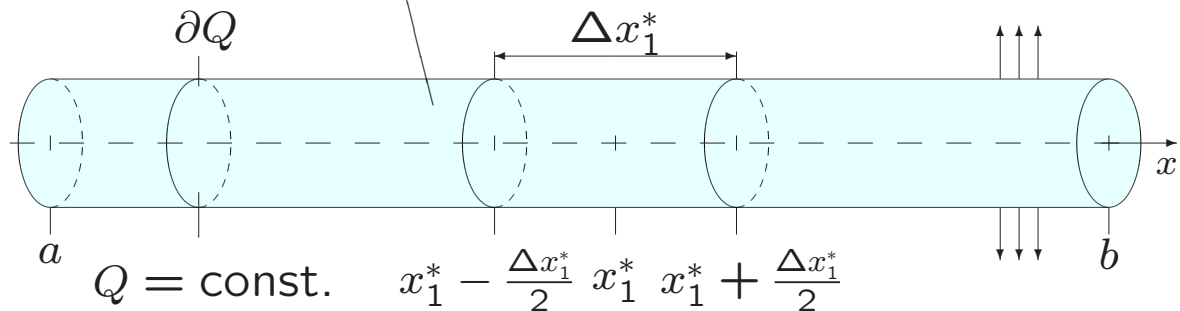
# Modellierung eines stationären 1D-Wärmeleitproblems

- Physikalisches Problem

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$  in einem hinreichend dünnen Stab der Länge  $\ell = b - a$  mit konstantem Querschnitt  $Q$ , wobei  $\ell$  viel größer ist als der Durchmesser des Querschnitts.

Aufheizung (z.B. durch Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme)

z.B. Kreis:  $\text{meas}(\partial Q) = 2\pi r$



Wärmeabgabe über den Mantel

z.B. Kreis:  $\text{meas}(Q) = \pi r^2$

$$u(a) = g_a$$

Temperatur im linken  
Randpunkt

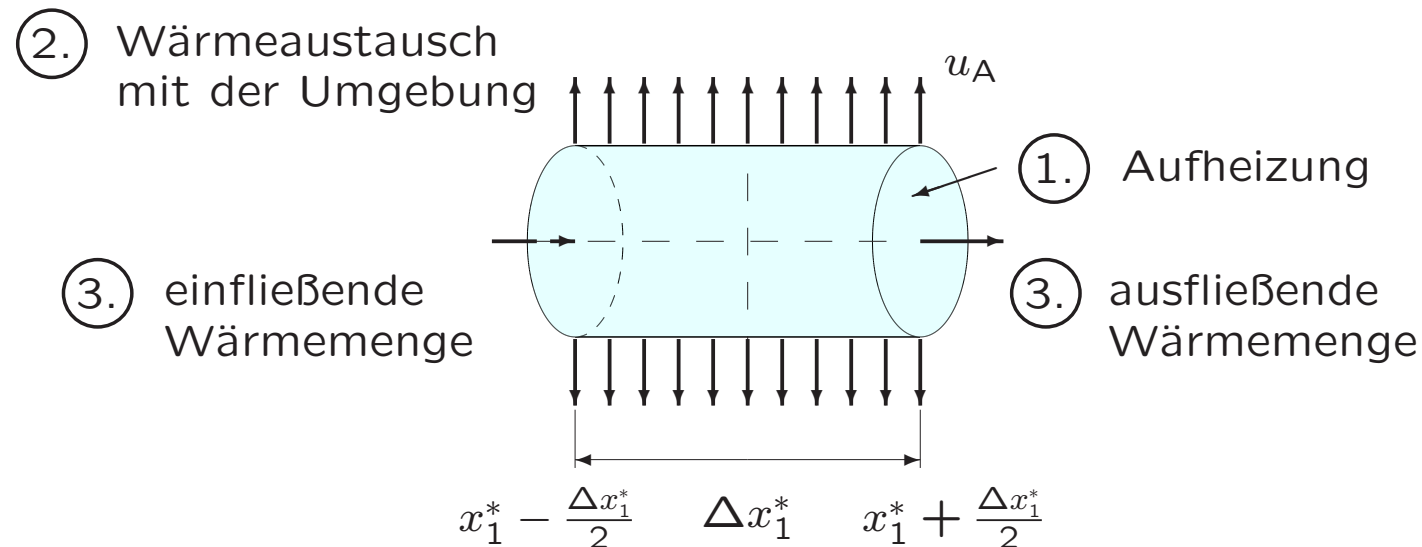
$$u_A = u_A(x_1)$$

Umgebungs-  
temperatur

$$u(b) = g_b$$

Temperatur im rechten  
Randpunkt

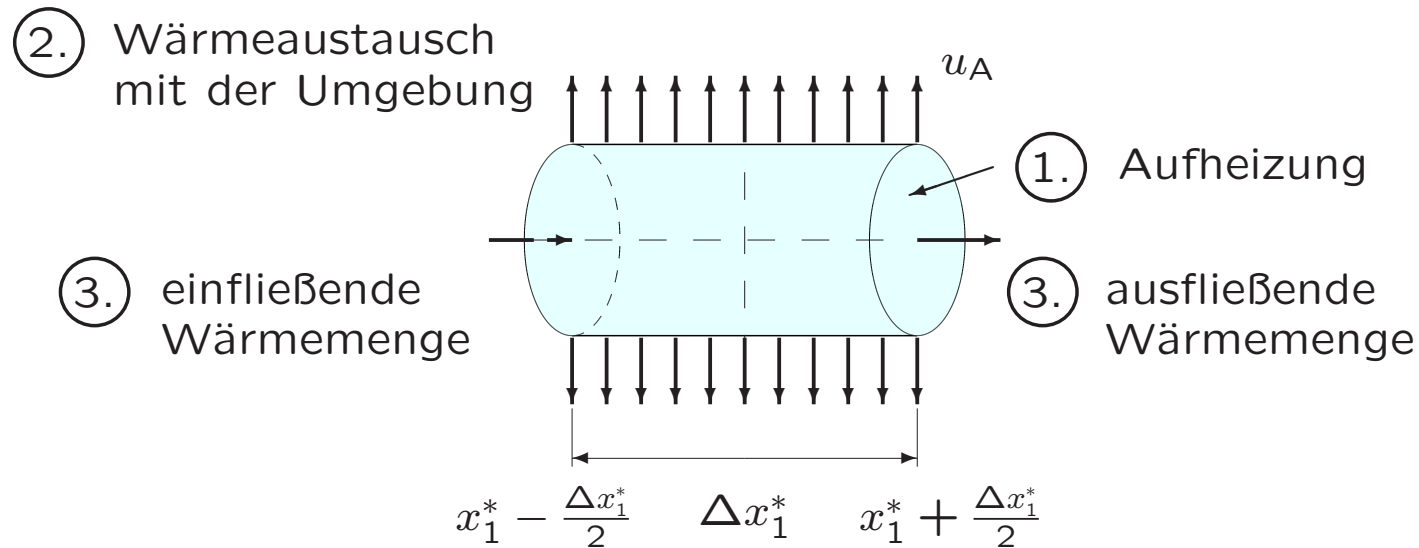
- Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge  $\Delta x_1^*$



1. Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht:

$$W_H = \int_S f(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 = \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1) dx_1$$

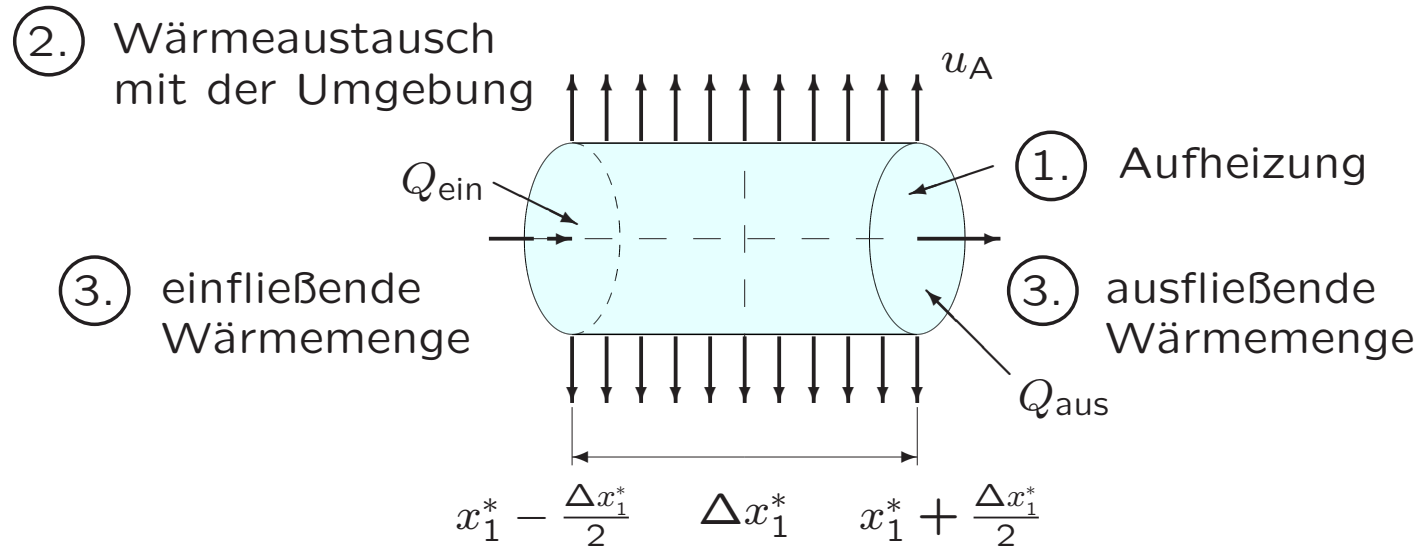
Die Funktion  $f$  charakterisiert die Intensität der Wärmequelle.  
Der Flächeninhalt von  $Q$  ist mit  $\text{meas}(Q)$  bezeichnet.



2. Transportierte Wärmemenge beim Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel:

$$\begin{aligned}
 W_A &= \int_{\partial Q \times [x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}]} q(x_1) (u(x_1) - u_A(x_1)) dO \\
 &= \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1) (u(x_1) - u_A(x_1)) dx_1, \quad \bar{q}(x_1) = \frac{\text{meas}(\partial Q)}{\text{meas}(Q)} q(x_1)
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $q$  wird als Wärmeaustauschkoeffizient bezeichnet und ist eine materialabhängige Größe.



3. Wärmemenge, die am linken Rand einfließt bzw. am rechten Rand ausfließt:

*Fouriersches Erfahrungsgesetz der Wärmeleitung:* Wärmefluss  $\sigma(x_1)$  ist proportional zu  $-u'(x_1)$ . Mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(x_1)$  als Proportionalitätsfaktor gilt  $\sigma(x_1) = -\lambda(x_1) u'(x_1)$ .

→ einfließende (ausfließende) Wärmemenge

$$\begin{aligned}
 W(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}) &= \int_{Q_{\text{ein}}(Q_{\text{aus}})} -\lambda(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}) dx_2 dx_3 \\
 &= -\lambda(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* \mp \frac{\Delta x_1^*}{2}) \text{meas}(Q)
 \end{aligned}$$

Wärmemengebilanz:

Wärmemenge, die am linken Rand in „ $\Delta x_1^*$ “ hineinfließt – Wärmemenge, die am rechten Rand aus „ $\Delta x_1^*$ “ herausfließt – Wärmemenge, die über den Mantel abgegeben wird + Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht = 0

$$W\left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - W\left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - W_A + W_H = 0$$

Mit  $\Delta x_1^* \rightarrow 0$  erhalten wir die Randwertaufgabe:

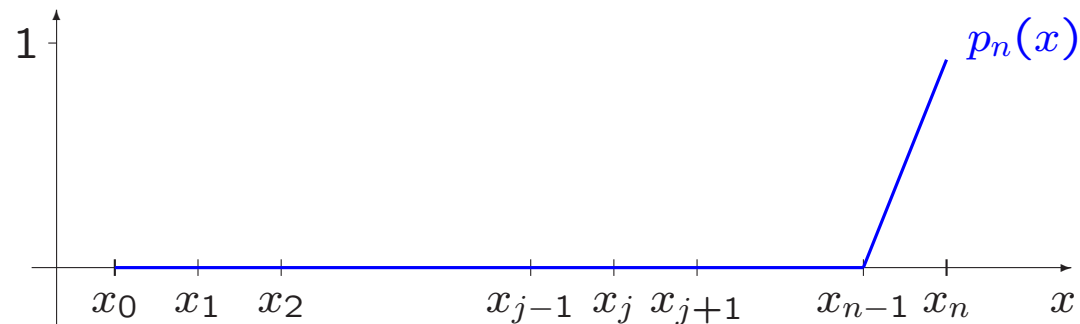
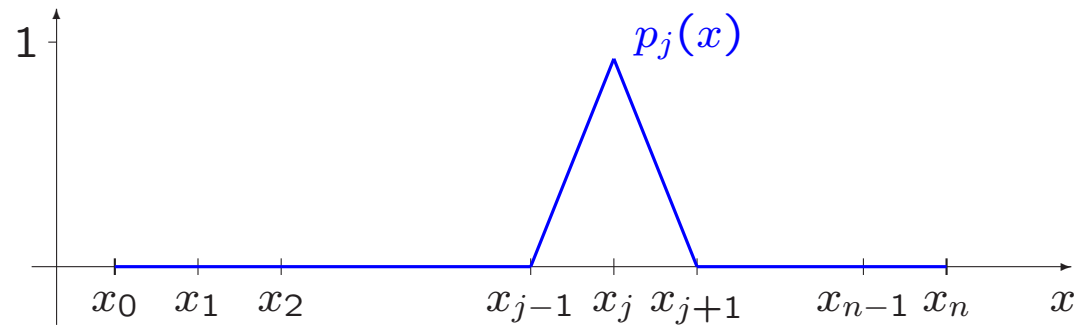
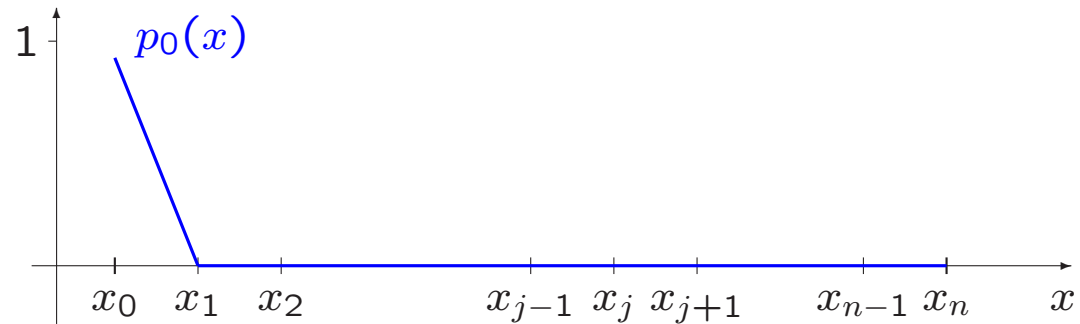
Gesucht ist die Funktion  $u$ , für die

$$-(\lambda(x_1)u'(x_1))' + \bar{q}(x_1)u(x_1) = f(x_1) + \bar{q}(x_1)u_A(x_1)$$

für alle  $x_1 \in (a, b)$  gilt.

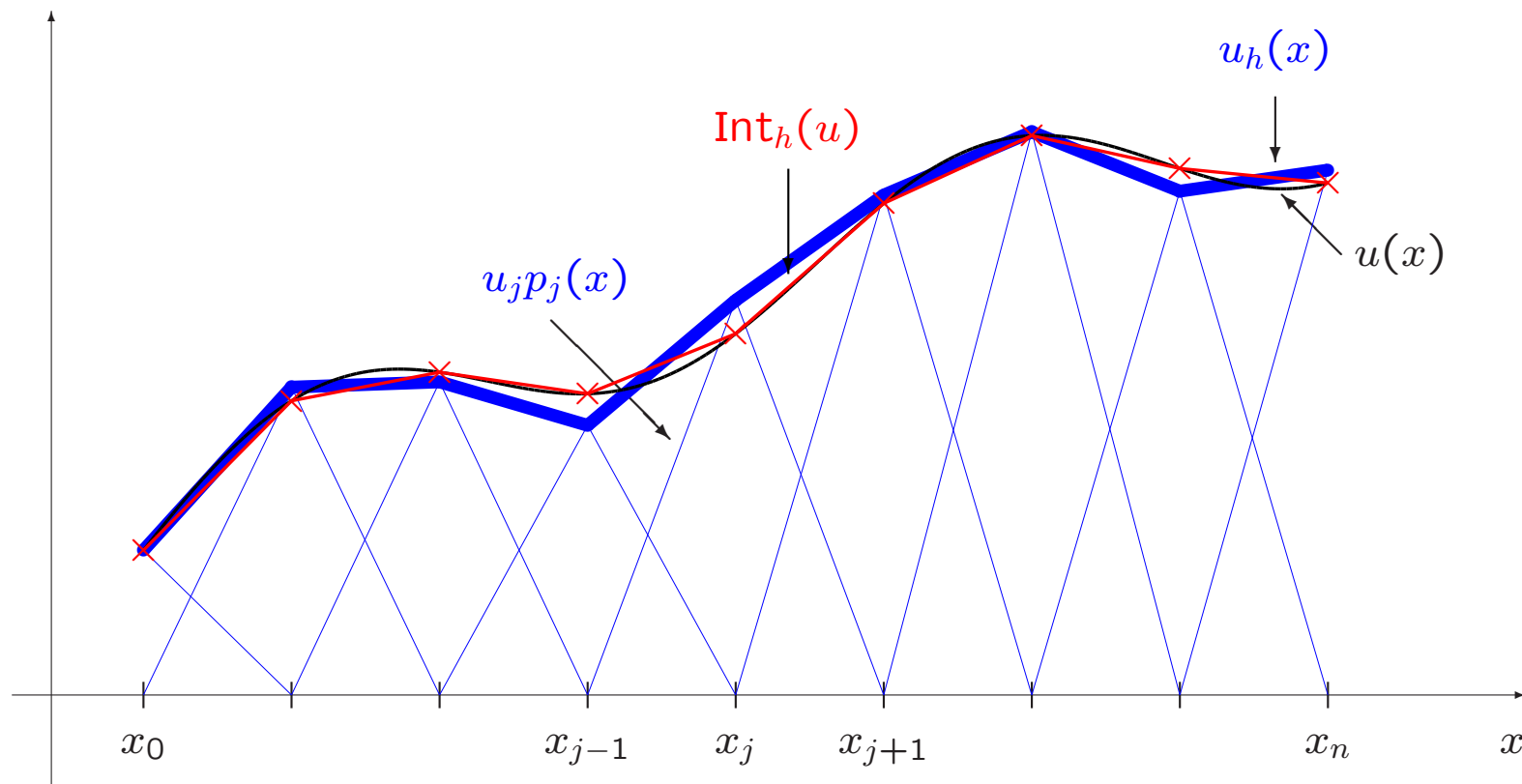
Zusätzlich sind die Randbedingungen  $u(a) = g_a$  und  $u(b) = g_b$  vorgegeben.

## Stückweise lineare Ansatzfunktionen



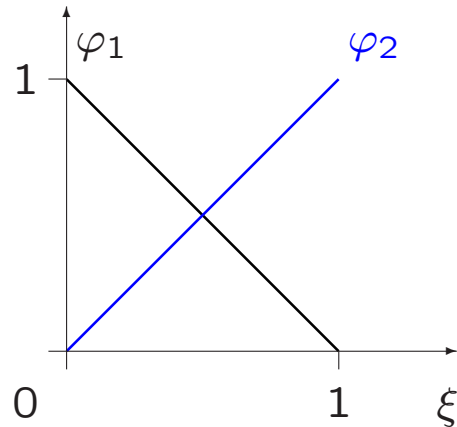
## Stückweise lineare Interpolation $\text{Int}_h(u)$ und Näherungslösung $u_h$

$$\text{Int}_h(u) = \sum_{j=0}^n u(x_j) p_j \quad \text{und} \quad u_h(x) = \sum_{j=0}^n u_j p_j(x), \quad u_j = u_h(x_j) \approx u(x_j)$$



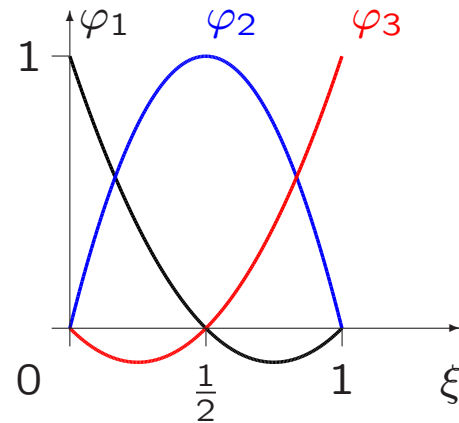


## Lineare, quadratische und kubische Formfunktionen



$$\varphi_1(\xi) = -\xi + 1$$

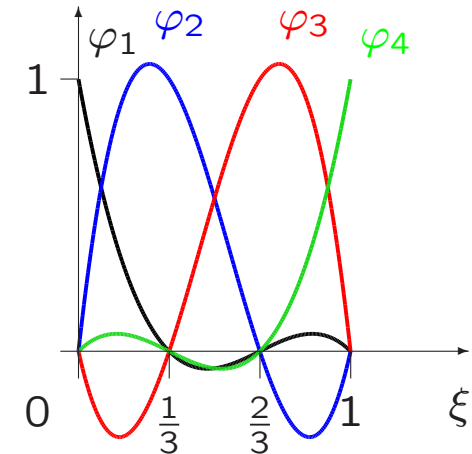
$$\varphi_2(\xi) = \xi$$



$$\varphi_1(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1$$

$$\varphi_2(\xi) = -4\xi^2 + 4\xi$$

$$\varphi_3(\xi) = 2\xi^2 - \xi$$



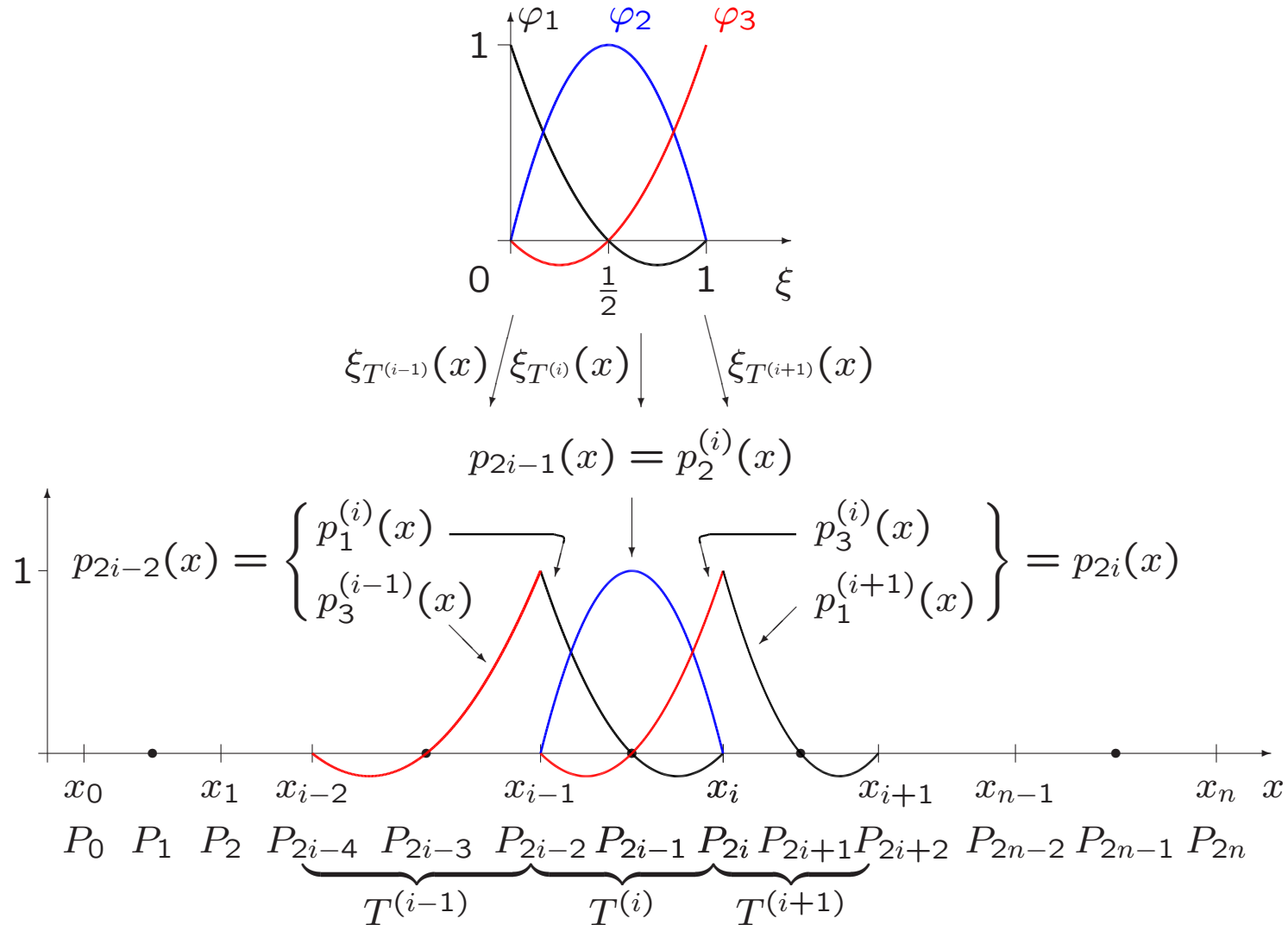
$$\varphi_1(\xi) = -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi$$

$$\varphi_3(\xi) = -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi$$

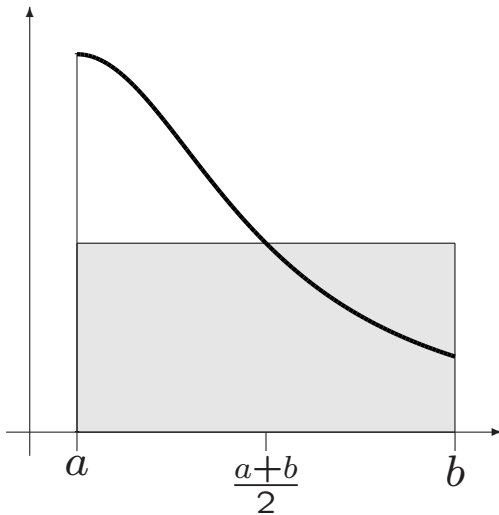
$$\varphi_4(\xi) = \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi$$

# Definition der Ansatzfunktionen mittels Formfunktionen



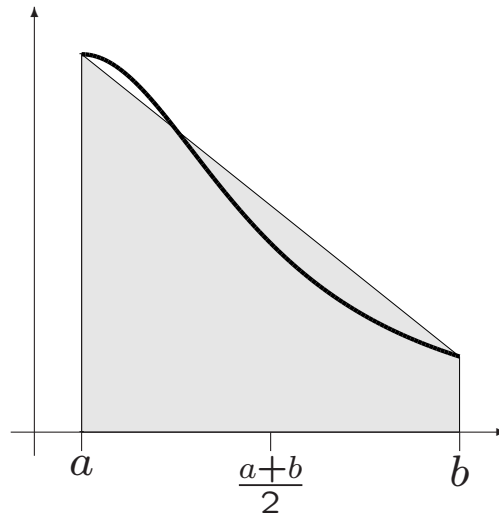
## Quadraturformeln

$$\int_a^b w(x) dx \approx Q(w) = \sum_{i=1}^m \alpha_i w(x_i)$$



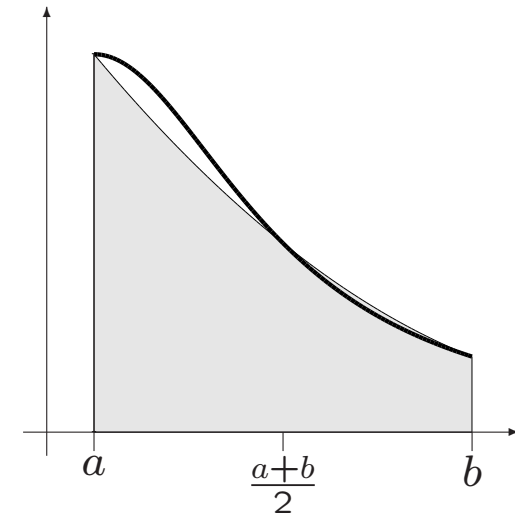
Mittelpunktsregel

$$Q_{MR} = (b - a)w\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



Trapezregel







$$Q_{TR} = \frac{b-a}{2}(w(a) + w(b))$$



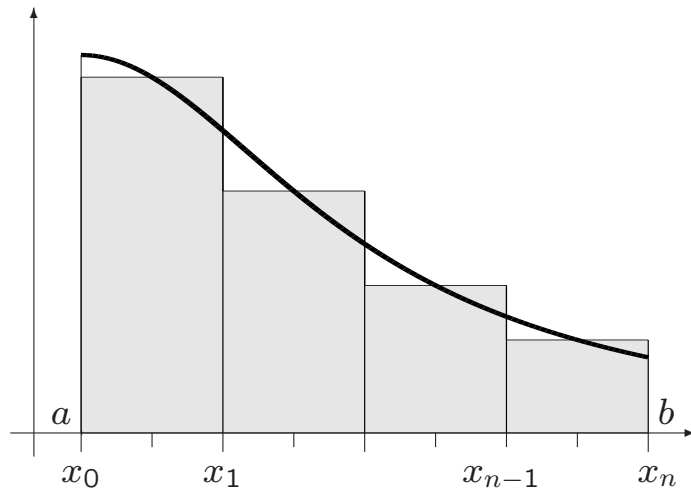
Simpsonsche Regel

$$Q_{SR} = \frac{b-a}{6}(w(a) + 4w\left(\frac{a+b}{2}\right) + w(b))$$

## Quadraturformeln über dem Referenzintervall $[0, 1]$

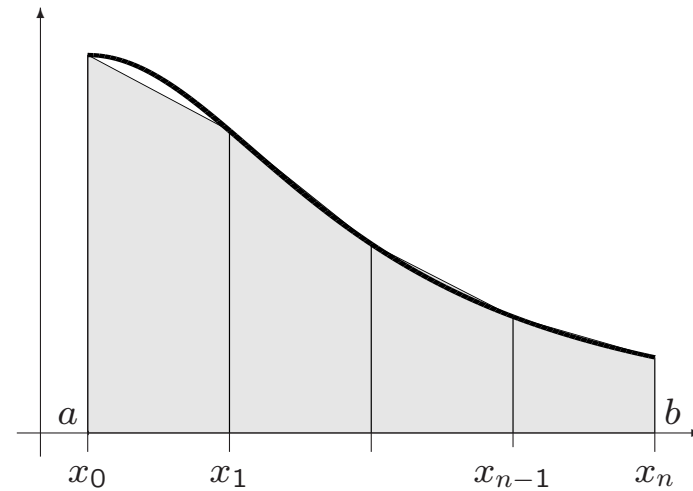
Formel	Lage der Stützstellen	Stützstellen $x_i$	Gewichte $\alpha_i$	exakt für Polynome vom Grad $k$
Newton-Cotes-Formel vom offenen Typ: $\int_0^1 w(x) dx \approx \sum_{i=2}^m \alpha_i w(x_i)$				
Mittelpunktsregel (Gauß 1)		$\frac{1}{2}$	1	$k = 1$
Newton-Cotes-Formeln vom geschlossenen Typ: $\int_0^1 w(x) dx \approx \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i w(x_i)$				
Trapezregel		0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$k = 1$
Simpson-Regel		$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$k = 3$
Newtonsche $\frac{3}{8}$ -Regel		$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$k = 3$
Gaußsche Formeln: $\int_0^1 w(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i w(x_i)$				
Gauß 2		$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$k = 3$
Gauß 3		$\frac{5 - \sqrt{15}}{10}, \frac{1}{2}, \frac{5 + \sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{18}, \frac{8}{18}, \frac{5}{18}$	$k = 5$

## Summierte Quadraturformeln



summierte Mittelpunktsregel

$$\int_a^b w(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n w\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$



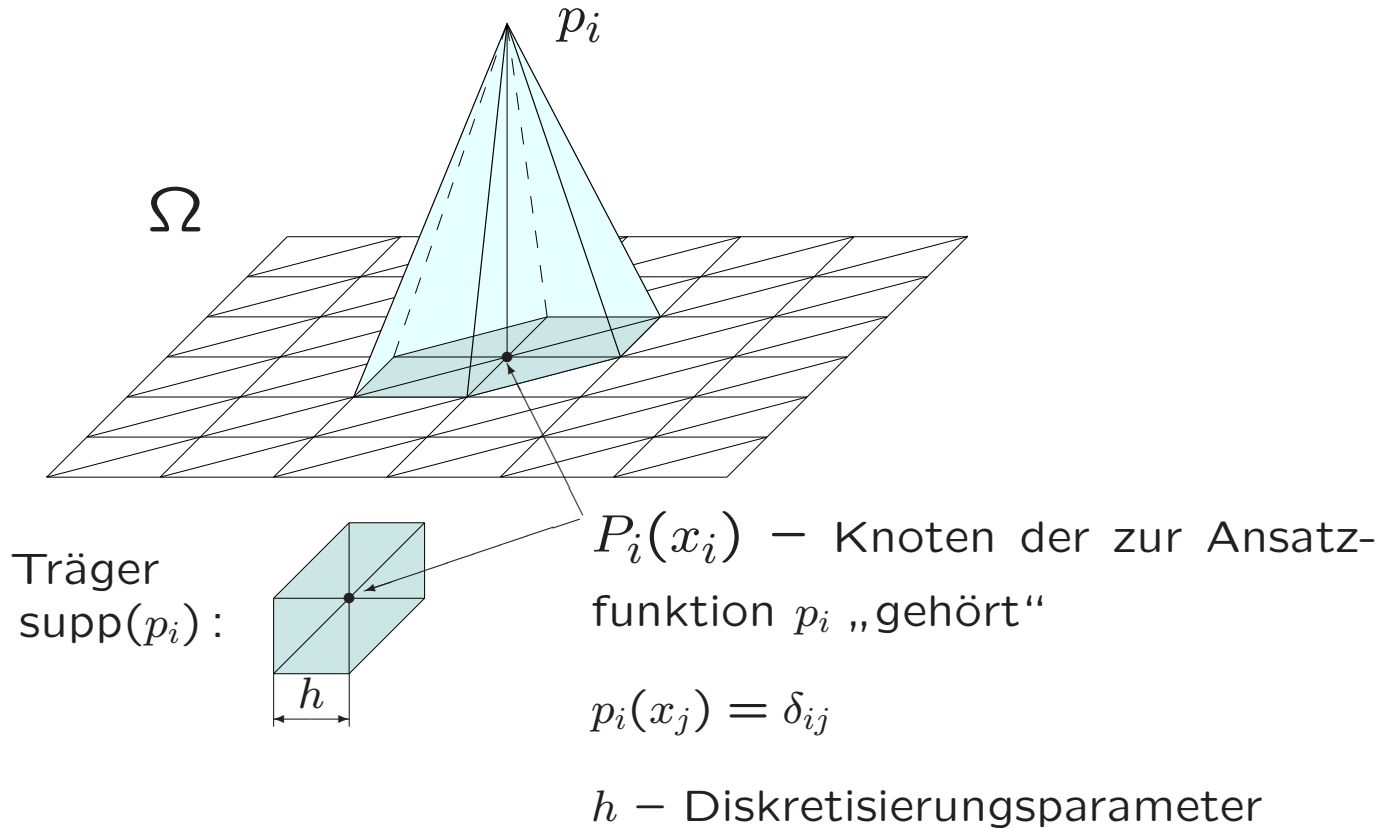
summierte Trapezregel

$$\int_a^b w(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (w(x_{i-1}) + w(x_i))$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$

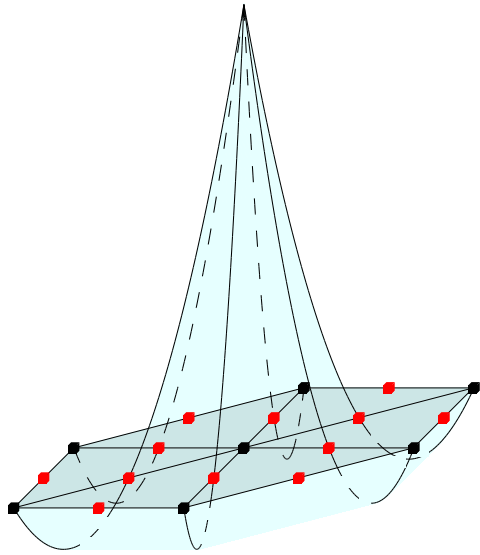
# Ansatzfunktionen

stückweise linear

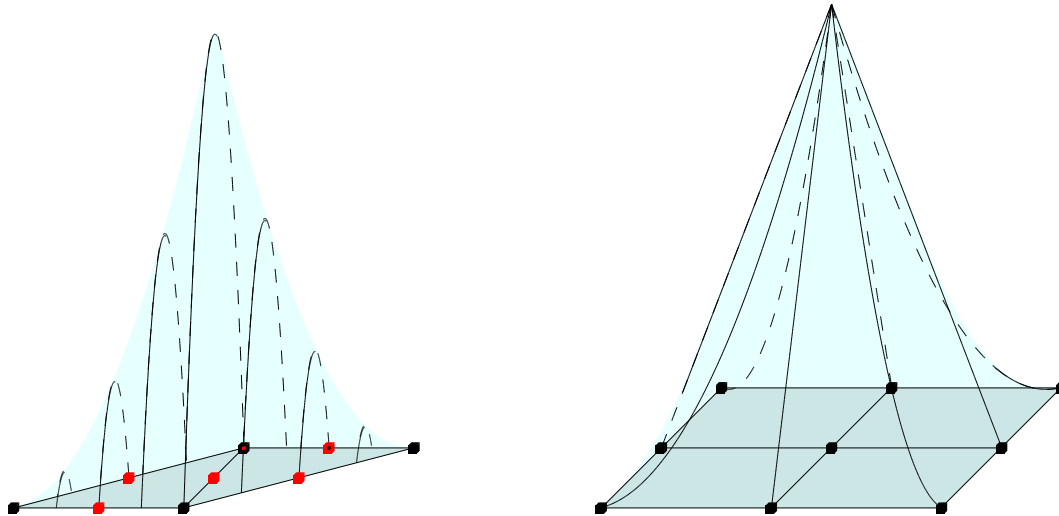


## Ansatzfunktionen

stückweise quadratisch



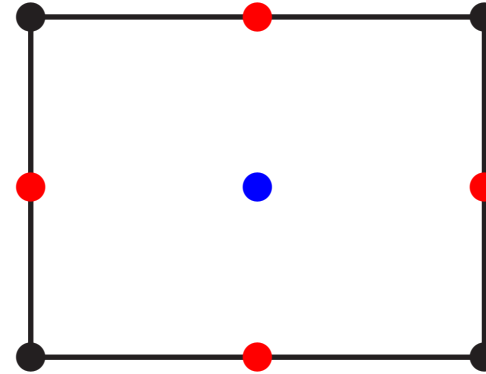
stückweise bilinear



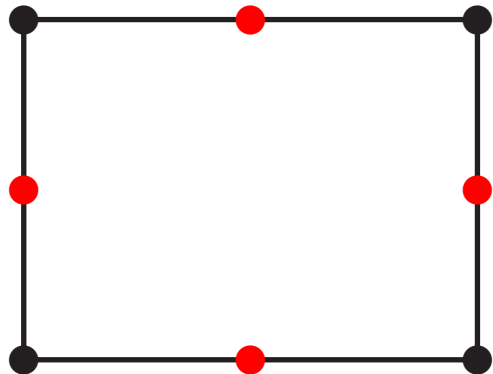
## Viereckselemente



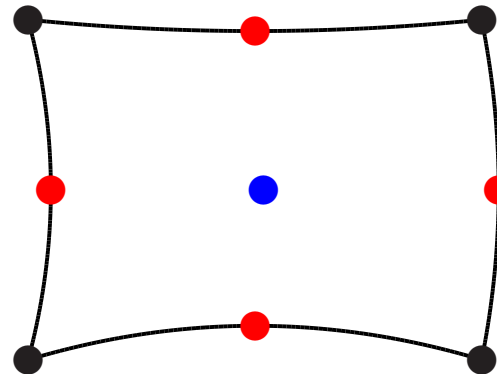
bilineares Element



9-Knoten-Element



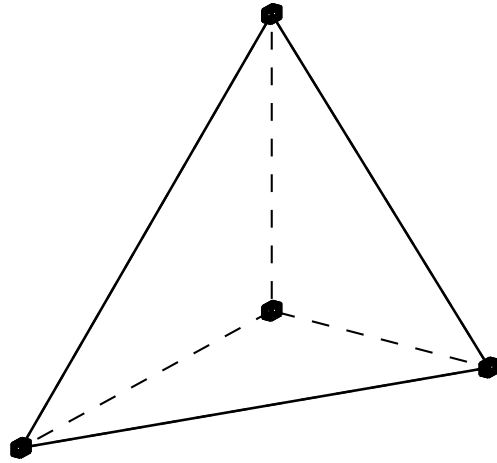
Serendipity-Element  
(2. Ordnung)



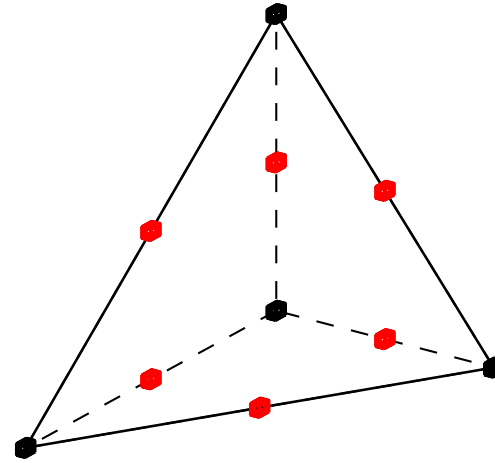
isoparametrisches  
Viereckselement



## Tetraederelemente

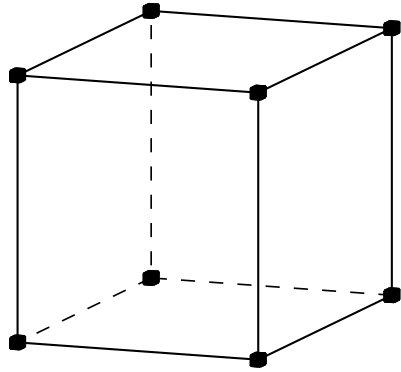


lineares Element

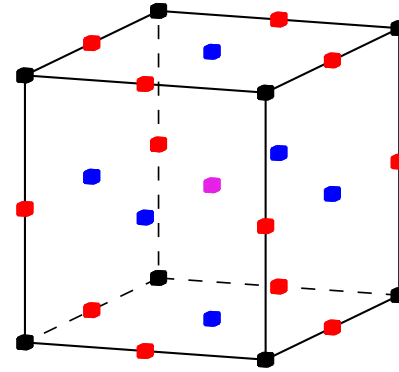


quadratisches Element

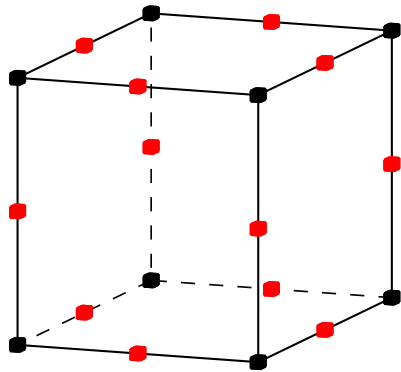
## Hexaederelemente



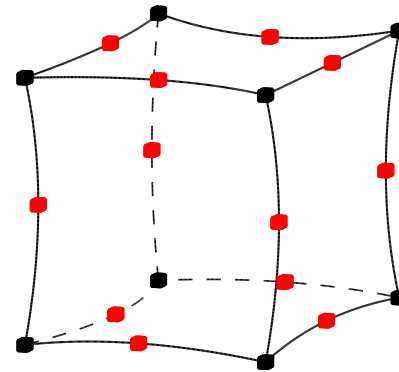
trilineares Element  
Quader HK 24



triquadratisches Element  
Quader

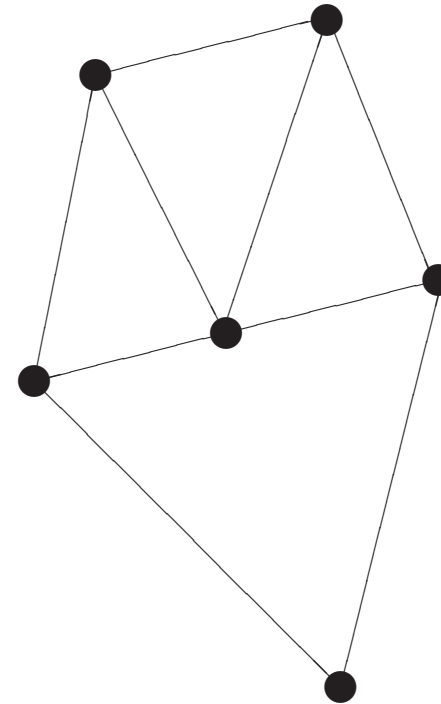
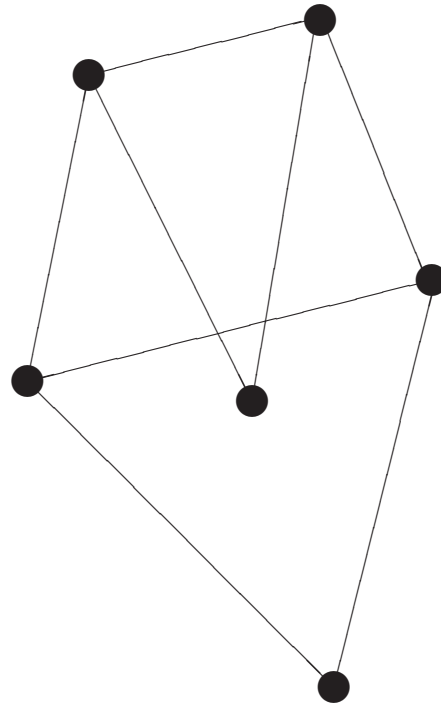


Serendipity-Element  
HK 60



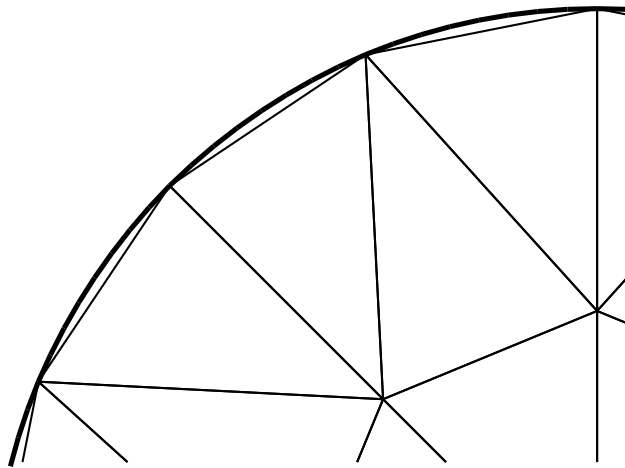
isoparametrisches Element

## Unzulässige Zerlegungen



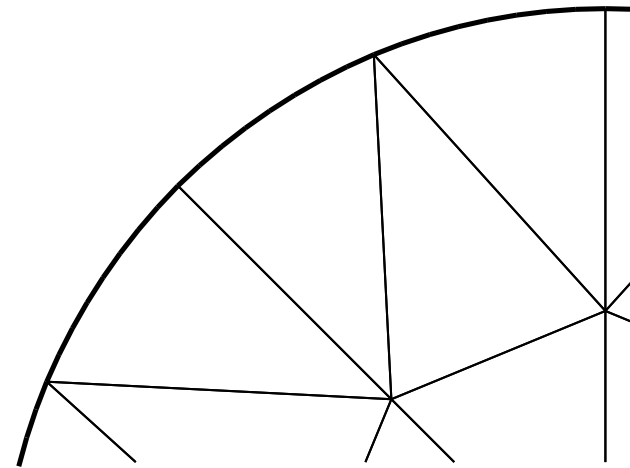
## Vernetzungen bei krummlinigem Gebietsrand

Vernetzung mit geradlinig begrenzten Elementen



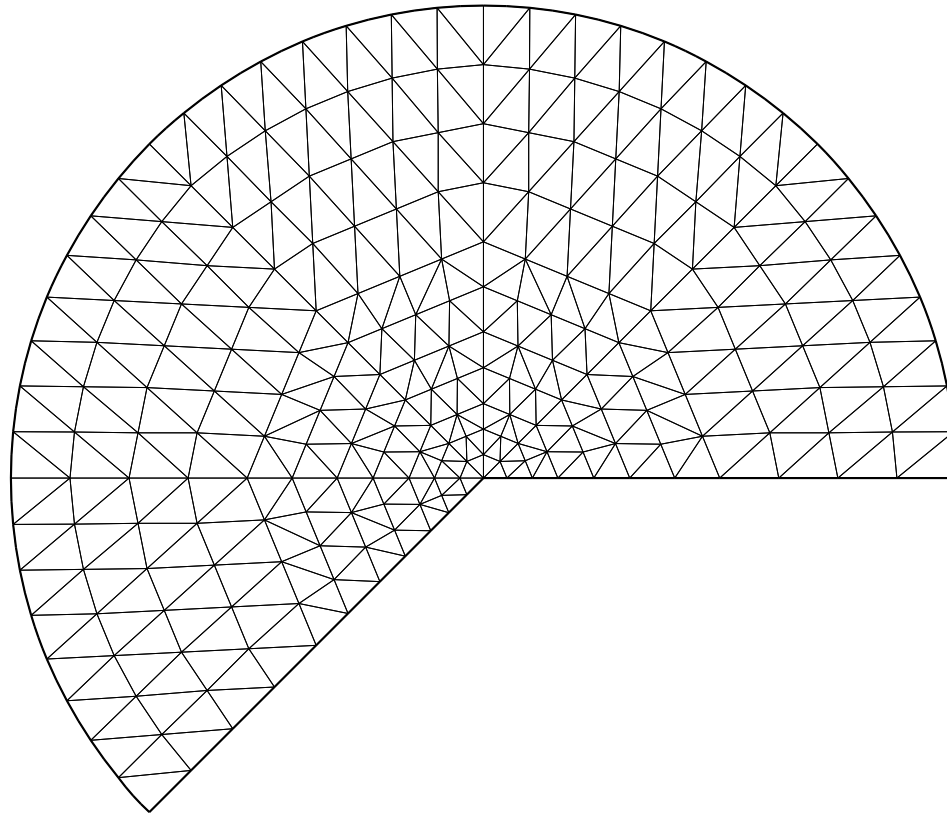
$$\bar{\Omega}_h \approx \bar{\Omega}$$

Vernetzung mit krummlinig begrenzten Elementen



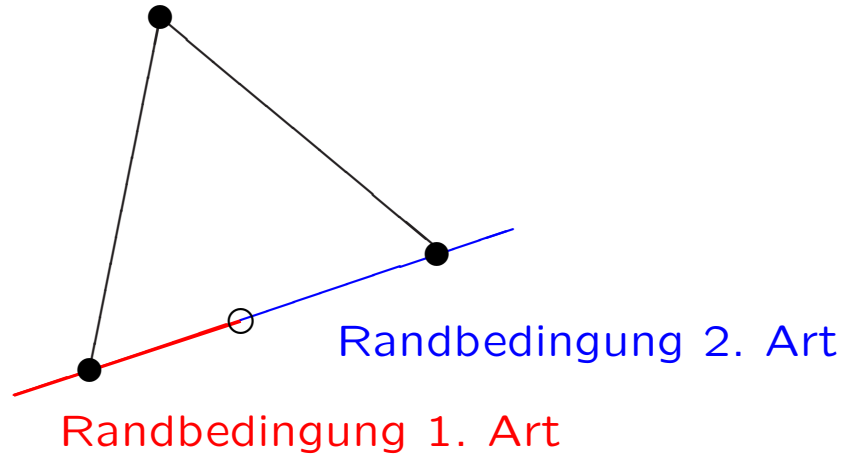
$$\bar{\Omega}_h = \bar{\Omega}$$

## Vernetzung bei überstumpfer Ecke im Gebietsrand

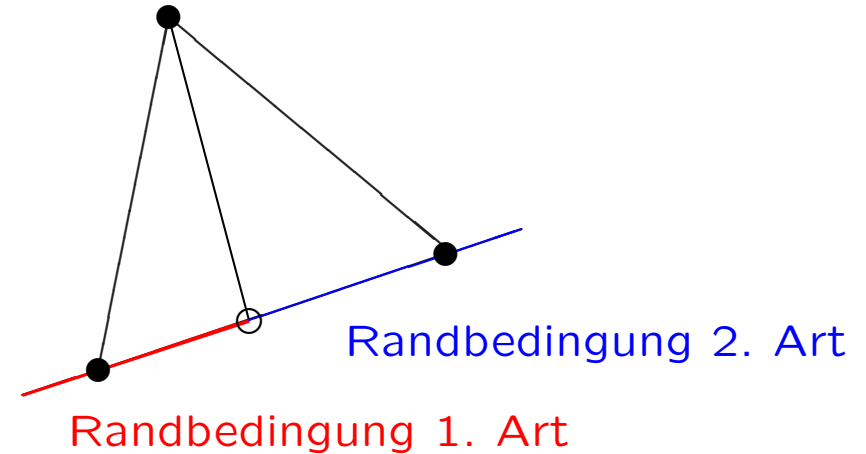


## Beachtung gemischter Randbedingungen

falsch

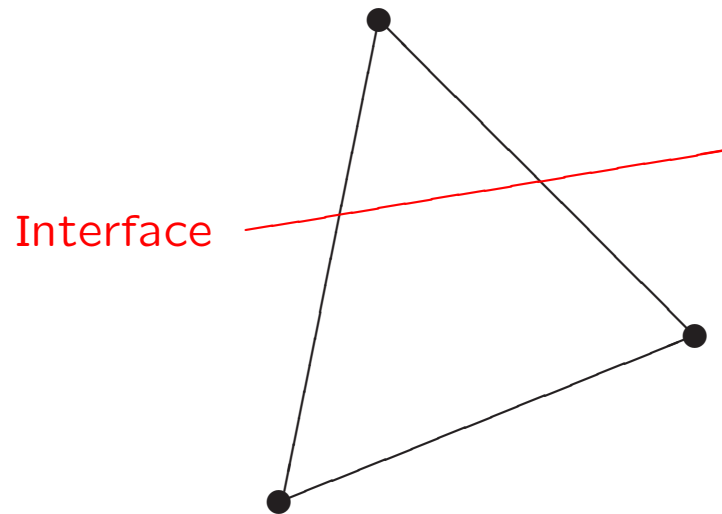


richtig

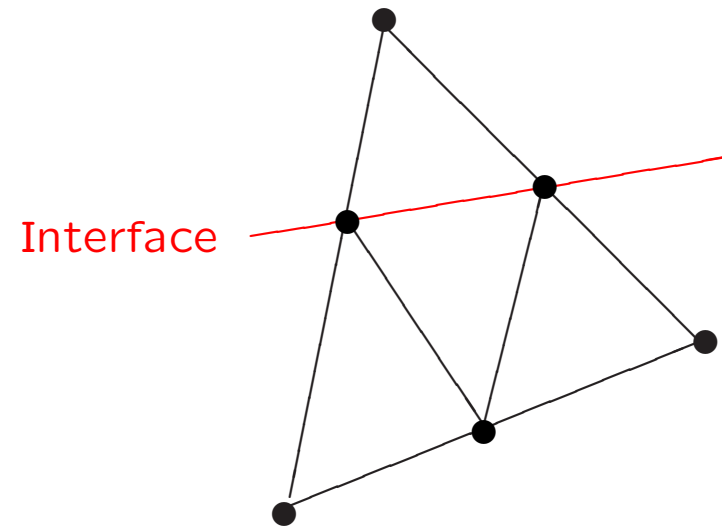


## Beachtung von Interfacelinien

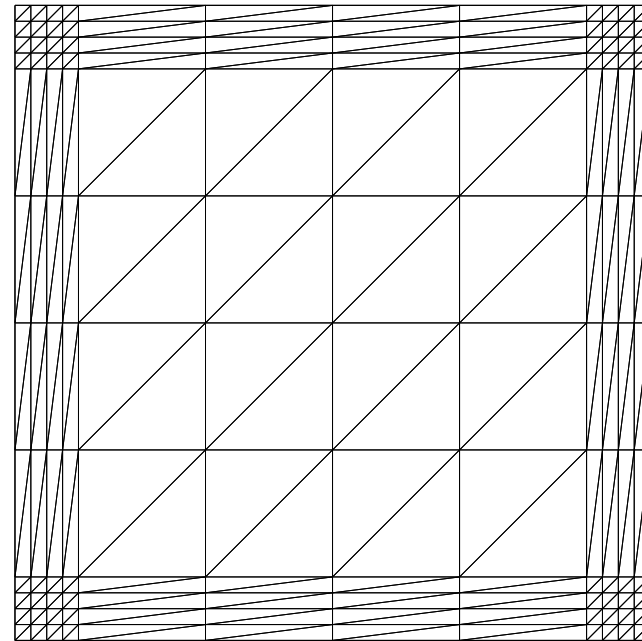
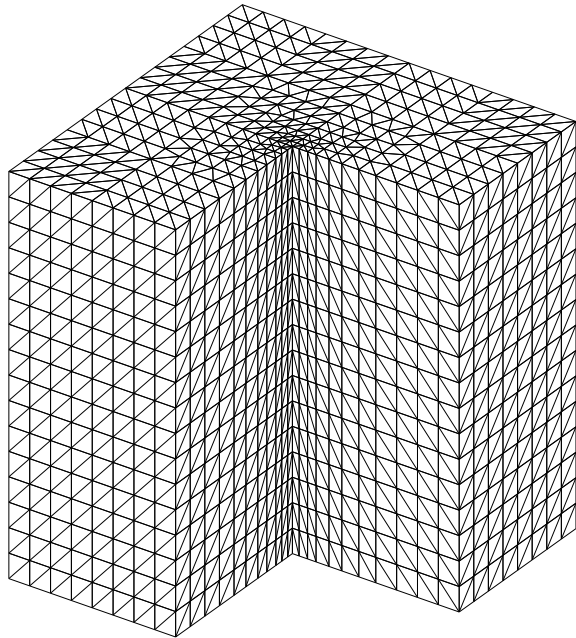
falsch



richtig



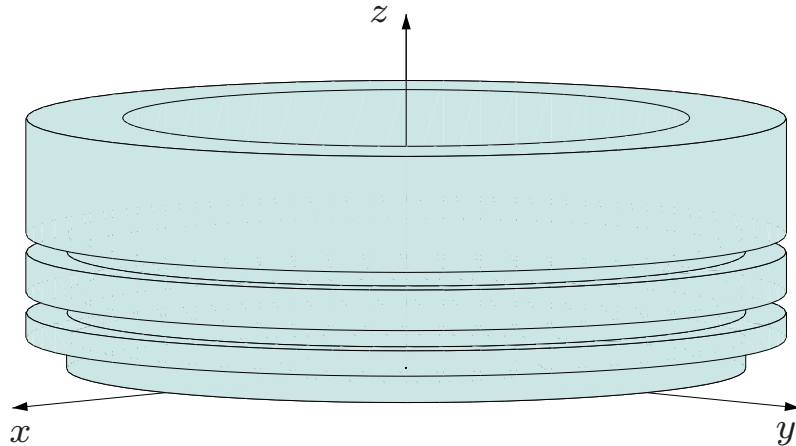
## Anisotrope Vernetzungen



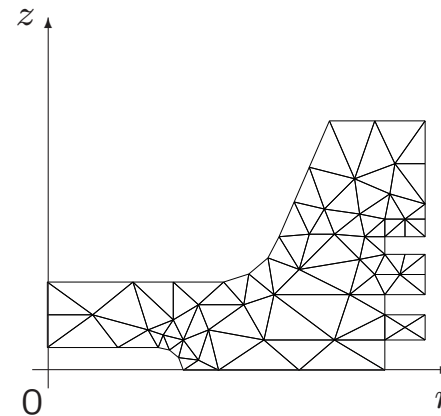


# Netzgenerierung mittels Produktmethoden

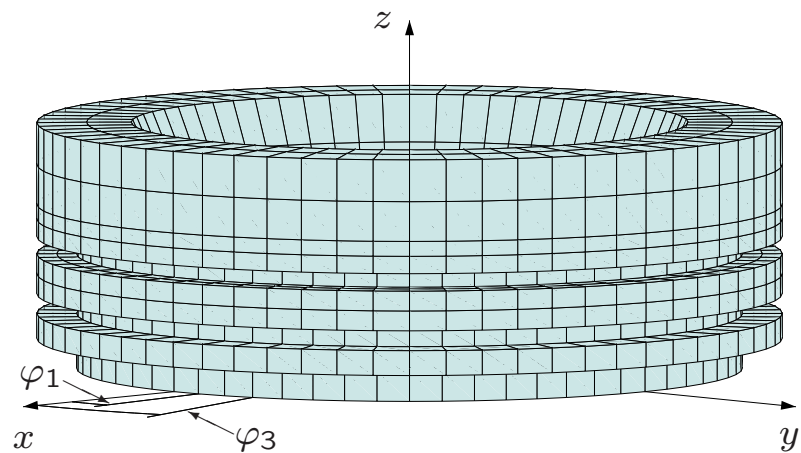
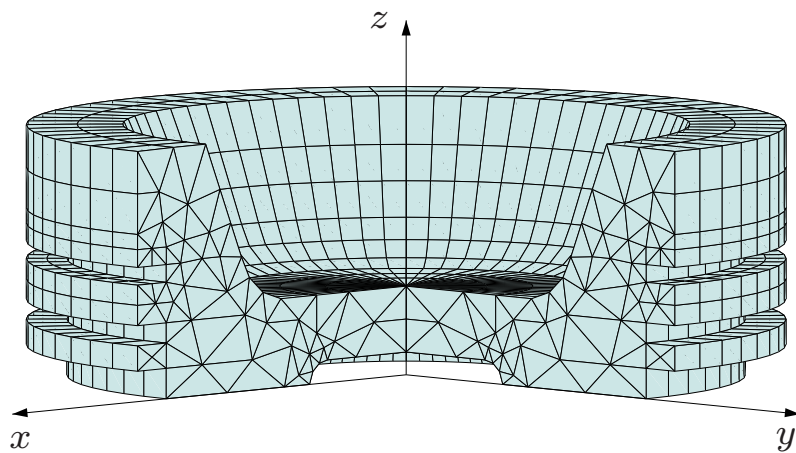
rotationssymmetrisches Gebiet



Vernetzung der Meridianebene

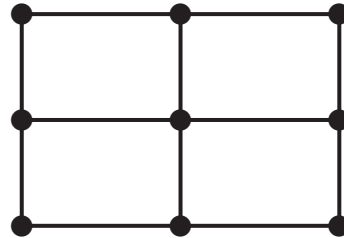


Vernetzung des rotationssymmetrischen Gebietes

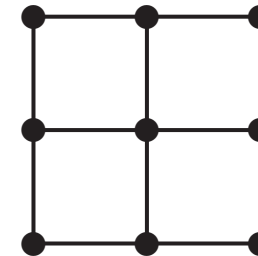


## Netzgenerierung mittels Abbildungstechnik

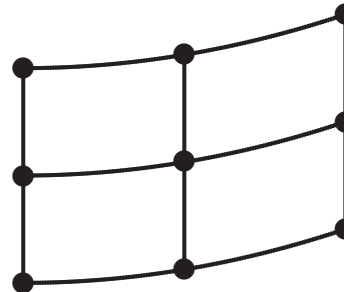
$\Omega_i$  – Rechteck  
 $= w_{\text{lin}}(\text{Quadrat})$



$w_{\text{lin}}$



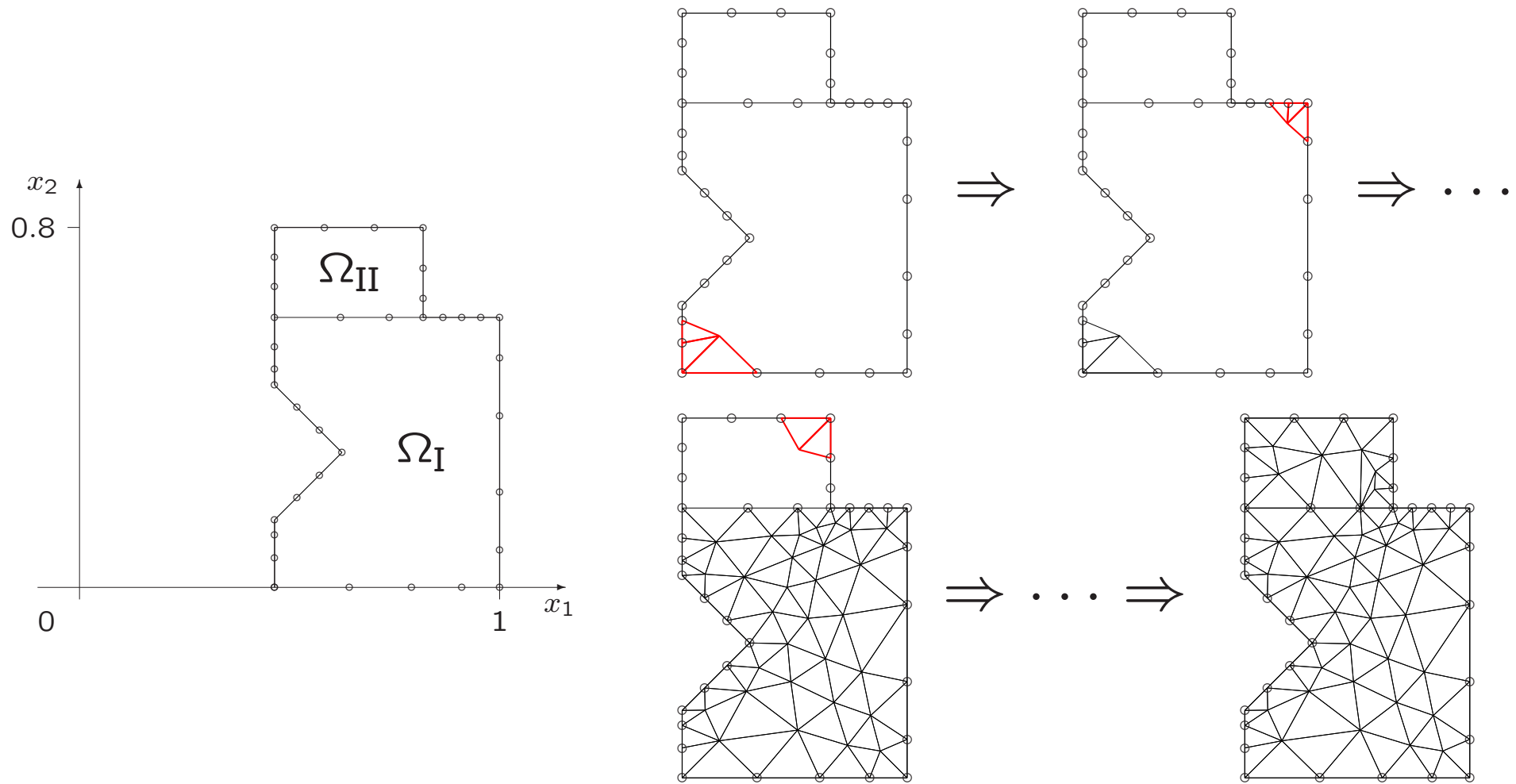
$\Omega_i$  – krummliniges  
Rechteck  
 $= w_{\text{nlin}}(\text{Quadrat})$



$w_{\text{nlin}}$



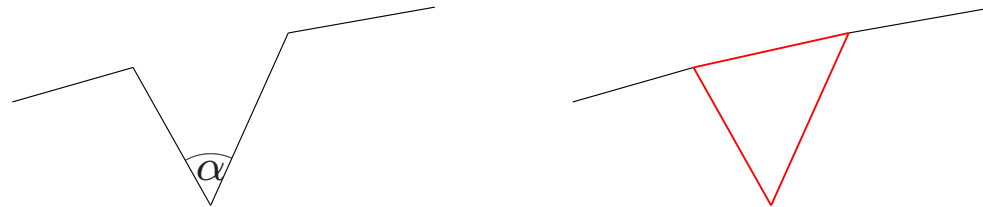
# Advancing-Front-Algorithmus



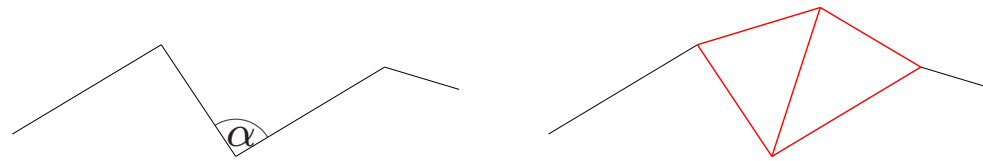
## Advancing-Front-Algorithmus

### Definition neuer Dreiecke und Knoten

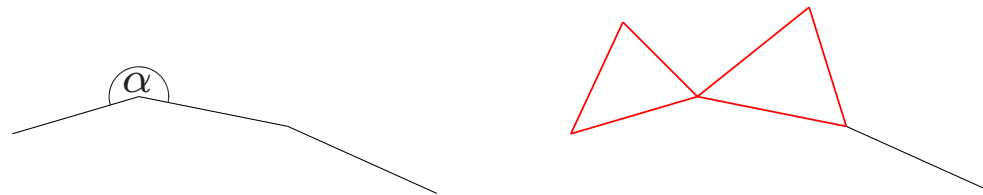
$\alpha < \frac{1}{2}\pi$ : Die beiden Segmente bilden die Kanten eines neuen Dreiecks



$\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$ : Definition eines inneren Punktes und Generierung von zwei Dreiecken

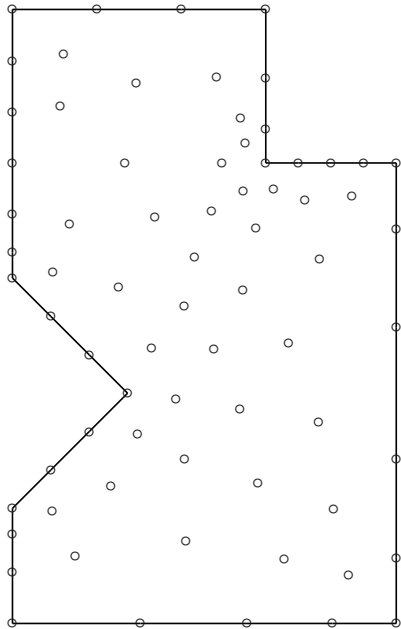


$\frac{2}{3}\pi < \alpha$ : Generierung von zwei Dreiecken, die jeweils eines der beiden Segmente als Kante haben

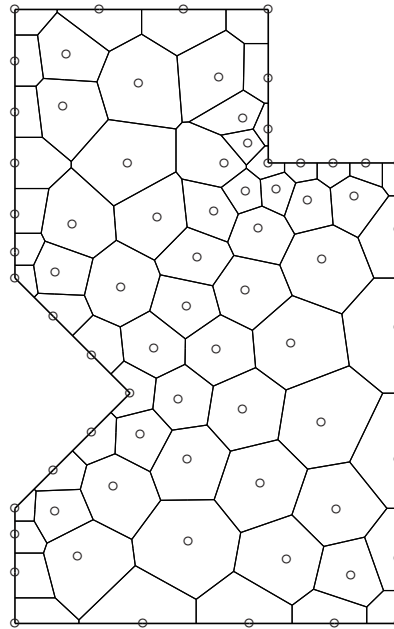


# Delaunay-Vernetzung

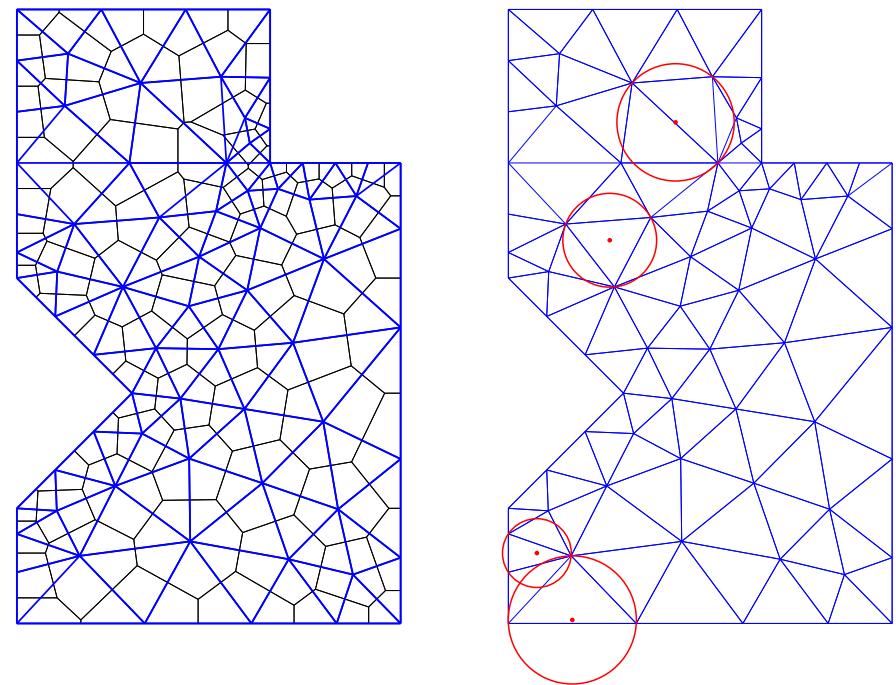
Punktmenge



Voronoi-Zellen

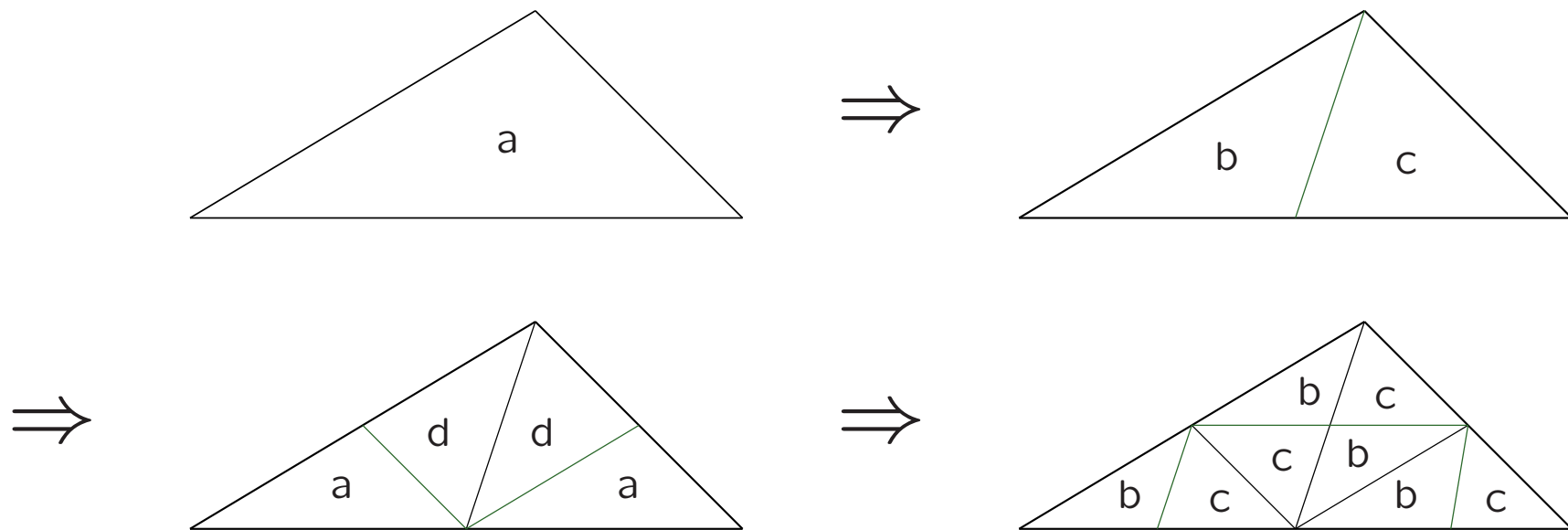


Delaunay-Vernetzung

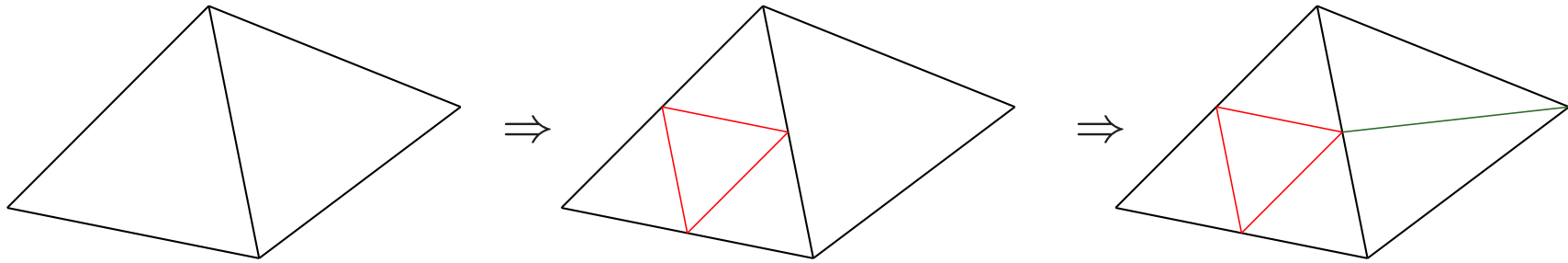


# Netzverfeinerung bei Dreiecksnetzen

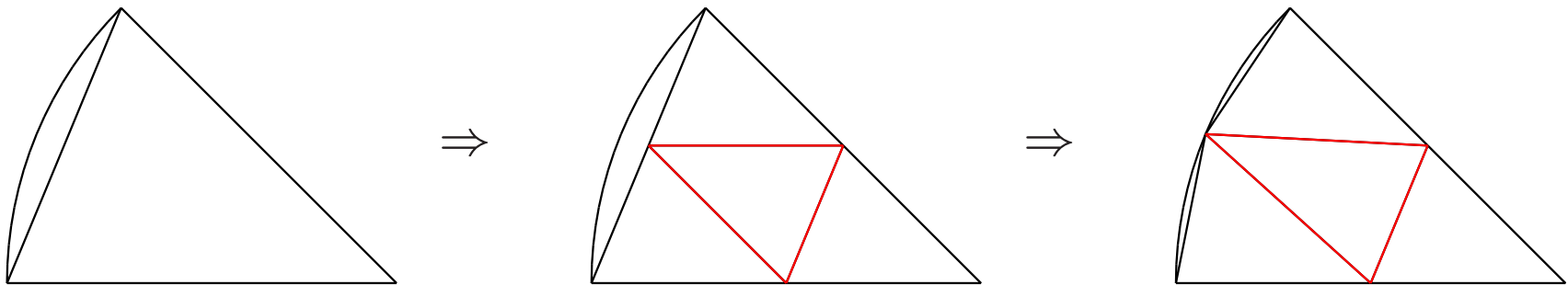
## Bisektion



## Netzverfeinerung bei Dreiecksnetzen Dreiecksviertelung

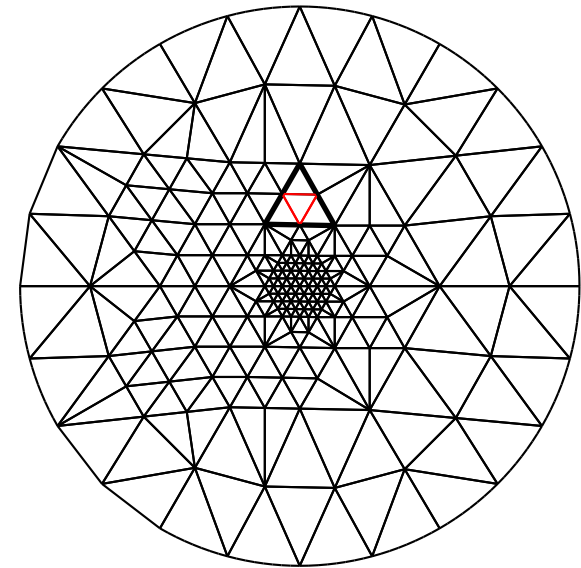
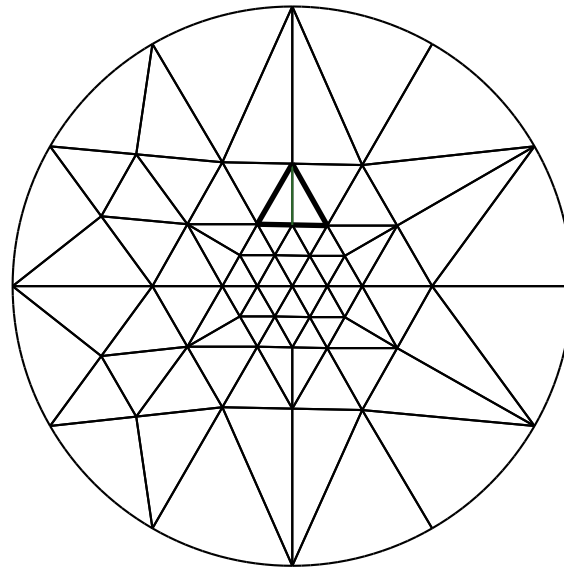
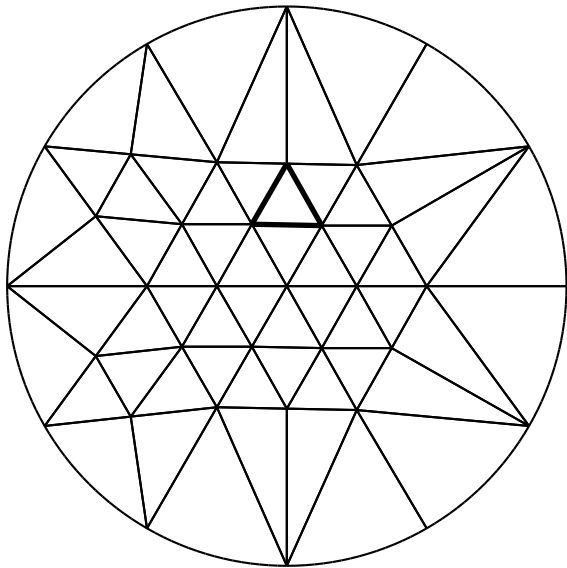


## Netzverfeinerung am krummlinigen Rand



## Netzverfeinerung bei Dreiecksnetzen

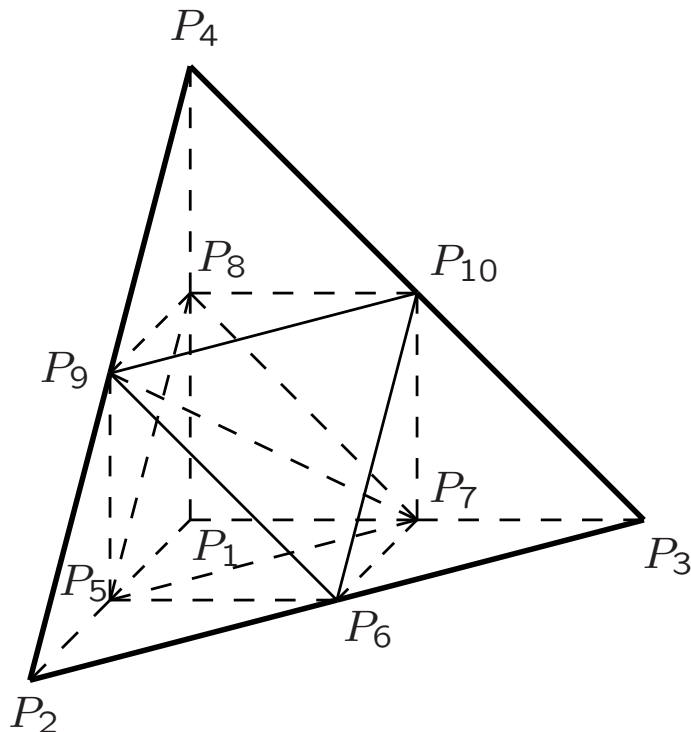
### Auflösung einer „grünen“ Verfeinerung





## Netzverfeinerung bei Tetraedernetzen

Reguläre Verfeinerung eines Tetraeders



Tetraeder  $T_0 = \Delta P_1 P_2 P_3 P_4$  mit den Eckknoten  $P_1, P_2, P_3, P_4$

Teiltetraeder

$$T_1 = \Delta P_1 P_5 P_7 P_8$$

$$T_2 = \Delta P_5 P_2 P_6 P_9$$

$$T_3 = \Delta P_7 P_6 P_3 P_{10}$$

$$T_4 = \Delta P_8 P_9 P_{10} P_4$$

$$T_5 = \Delta P_5 P_7 P_8 P_9$$

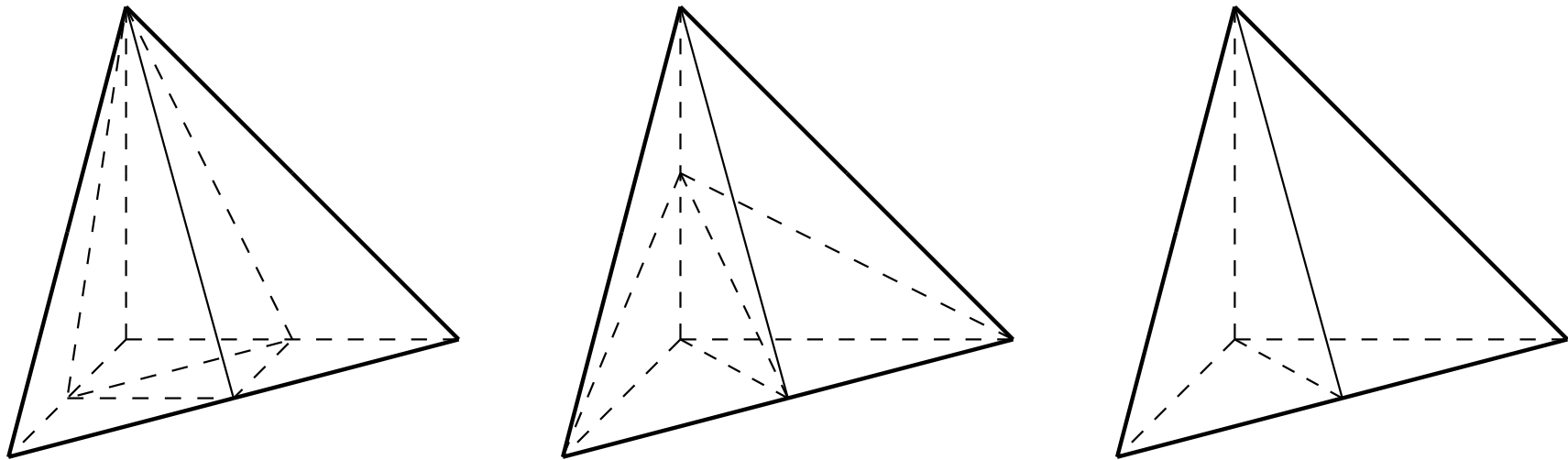
$$T_6 = \Delta P_5 P_7 P_6 P_9$$

$$T_7 = \Delta P_7 P_6 P_9 P_{10}$$

$$T_8 = \Delta P_7 P_8 P_9 P_{10}$$

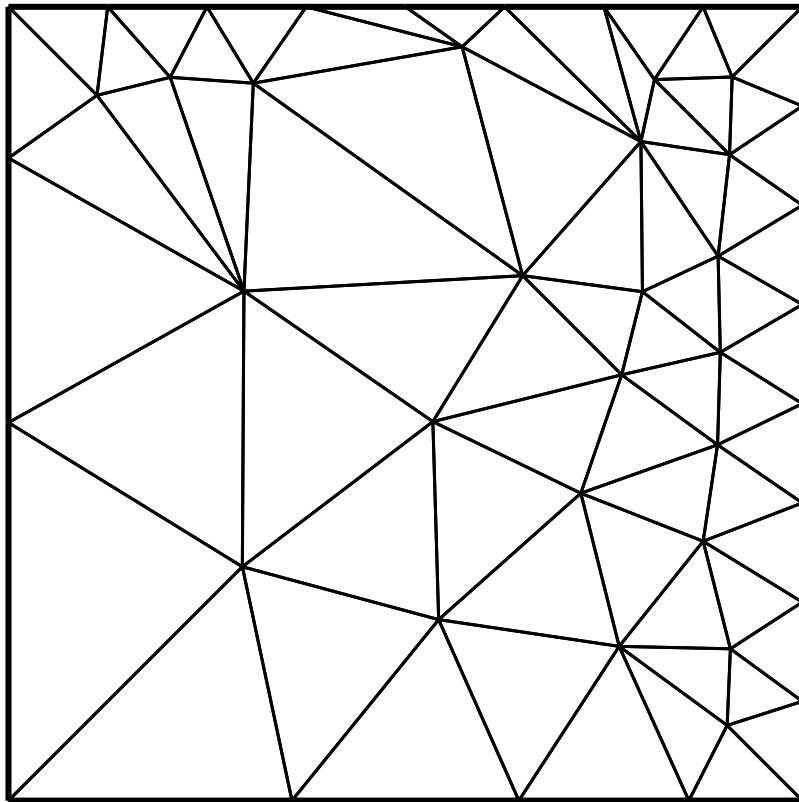
## Netzverfeinerung bei Tetraedernetzen

Irreguläre Verfeinerung eines Tetraeders

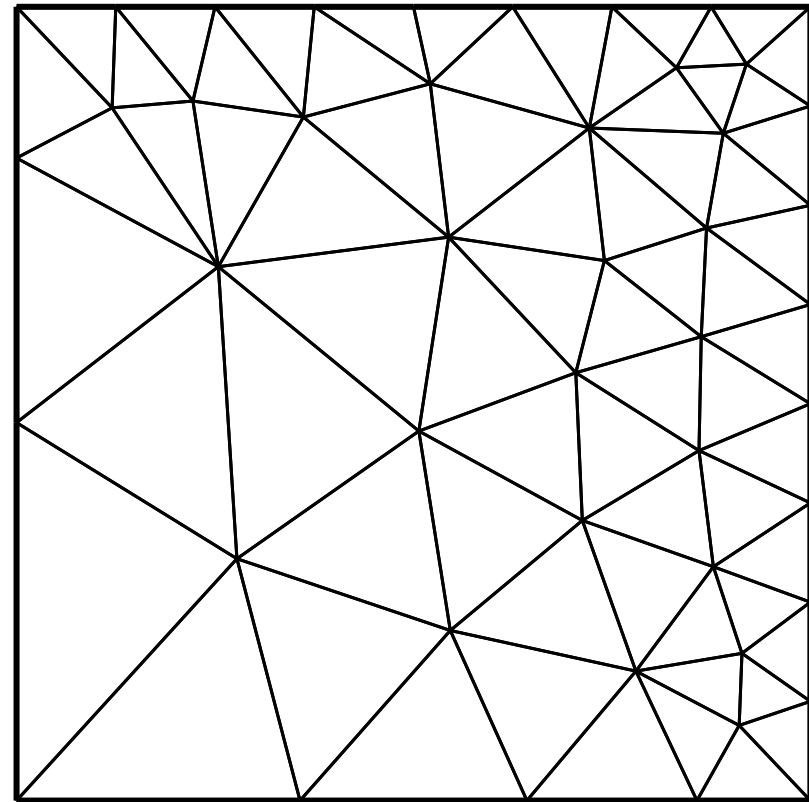


## Netzverbesserung durch Glättung

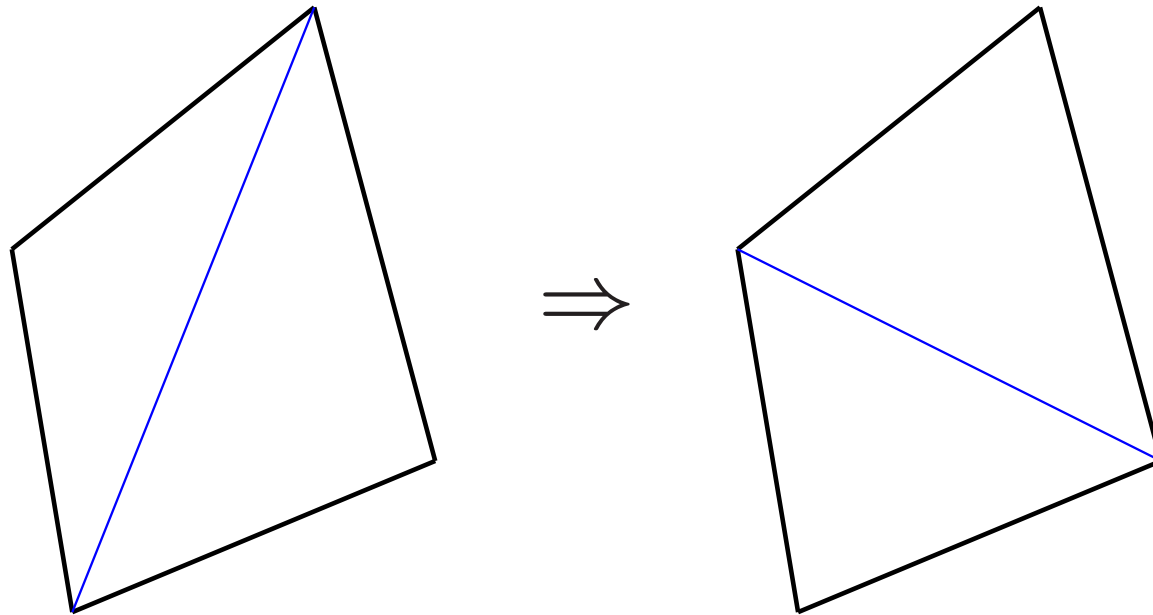
Mittels Advancing-Front-Algorithmus  
erzeugte Vernetzung



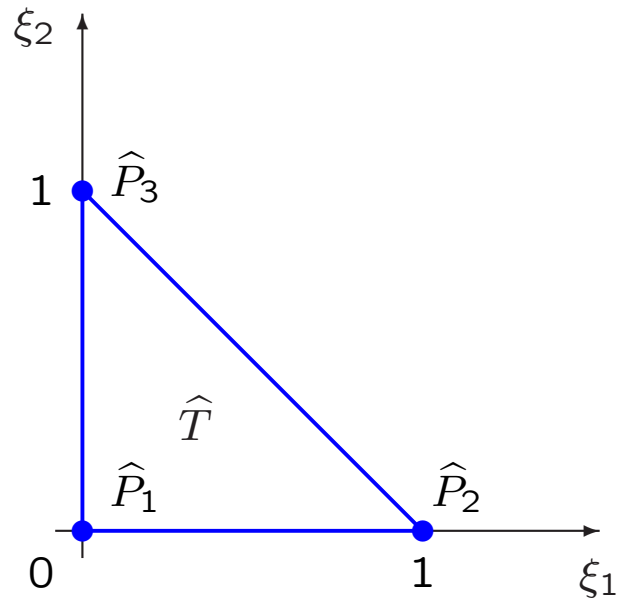
Netzverbesserung durch Netzglättung



## Netzverbesserung durch Kantenvertauschung

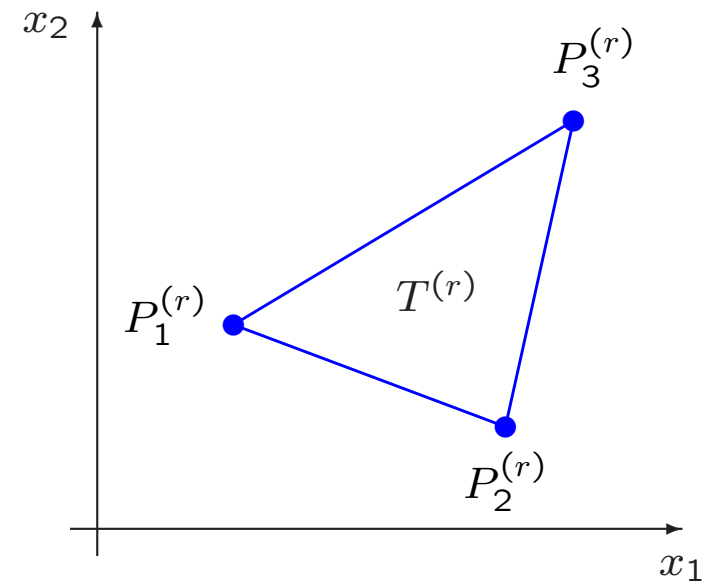


# Abbildung Referenzdreieck $\hat{T} \longleftrightarrow$ Dreieck $T^{(r)}$ der Vernetzung



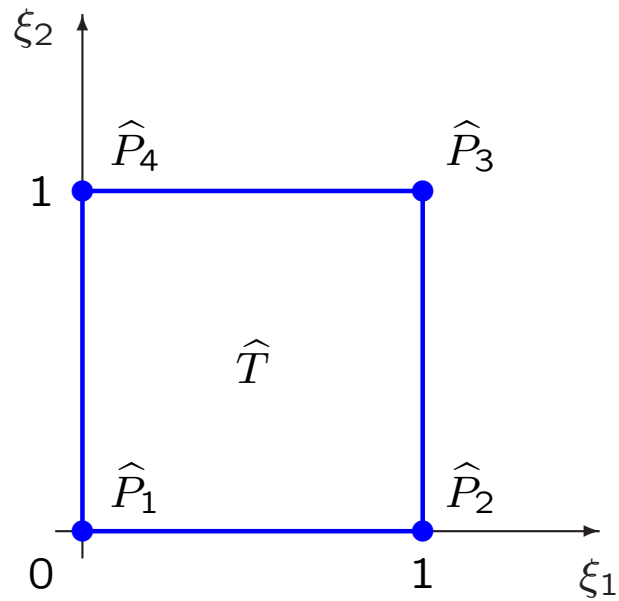
Referenzdreieck  $\hat{T}$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{x = x_{T^{(r)}}(\xi)} \\ & \xleftarrow{\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)} \end{aligned}$$



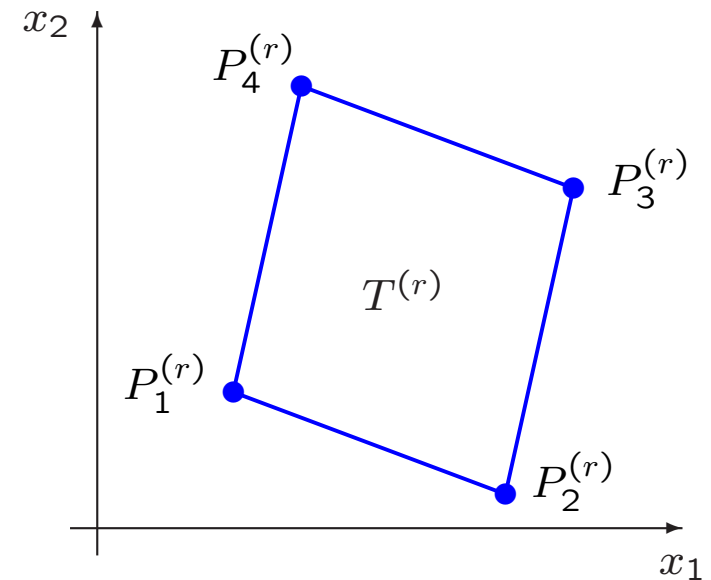
beliebiges Dreieck  $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

# Abbildung Referenzviereck $\hat{T} \longleftrightarrow$ Viereck $T^{(r)}$ der Vernetzung



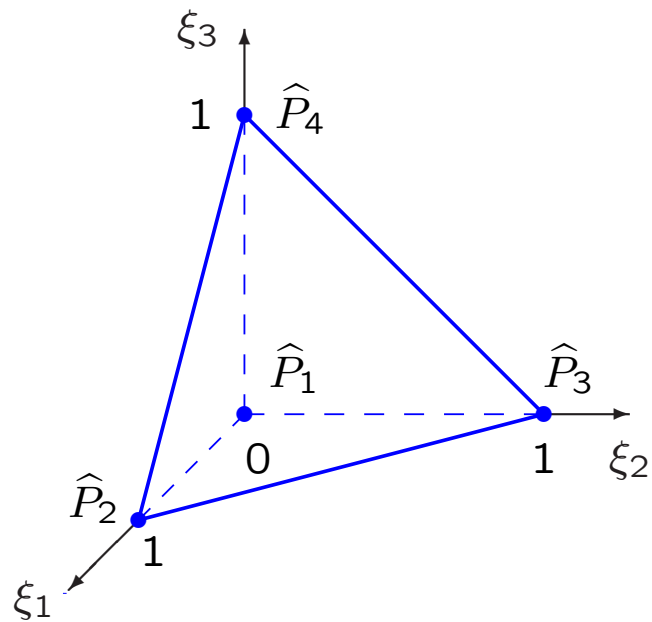
Referenzviereck  $\hat{T}$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{x = x_{T^{(r)}}(\xi)} \\ & \xleftarrow{\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)} \end{aligned}$$



beliebiges Parallelogramm  $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

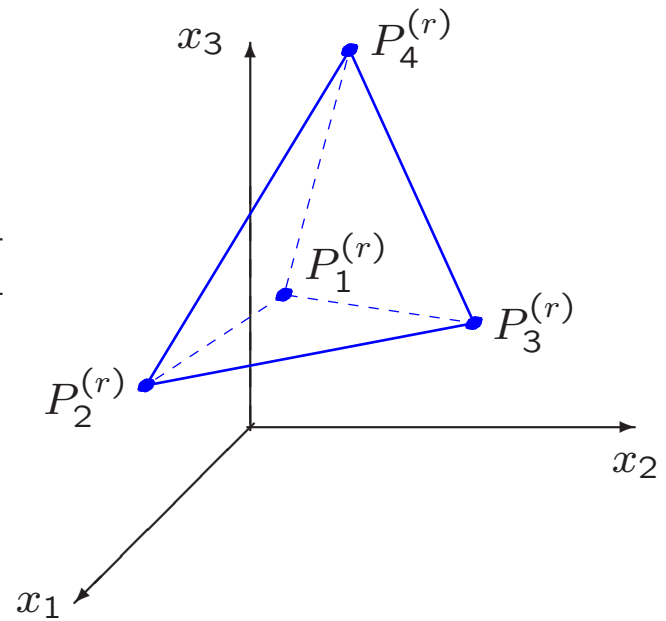
# Abbildung Referenztetraeder $\widehat{T} \leftrightarrow$ Tetraeder $T^{(r)}$ der Vernetzung



Referenztetraeder  $\widehat{T}$

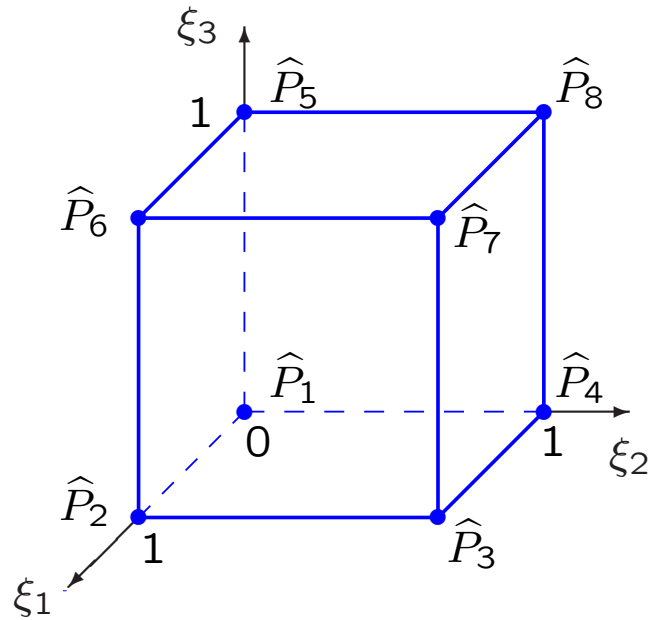
$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$



beliebiges Tetraeder  $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

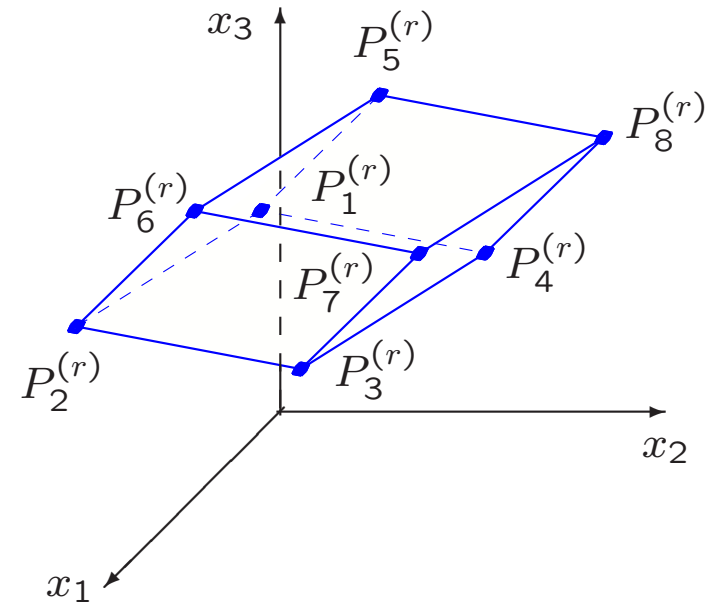
# Abbildung Referenzhexaeder $\widehat{T} \leftrightarrow$ Hexaeder $T^{(r)}$ der Vernetzung



Referenzhexaeder  $\widehat{T}$

$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

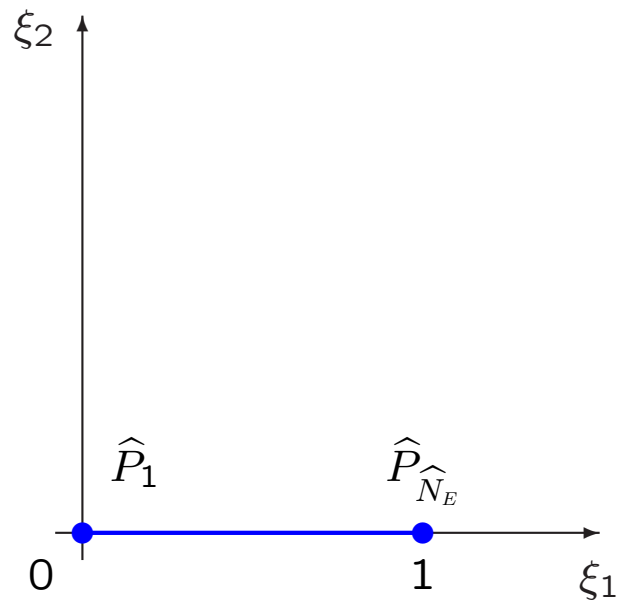
$$\xi = \xi_{T^{(r)}}(x)$$



beliebiges Parallelepipid  $T^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

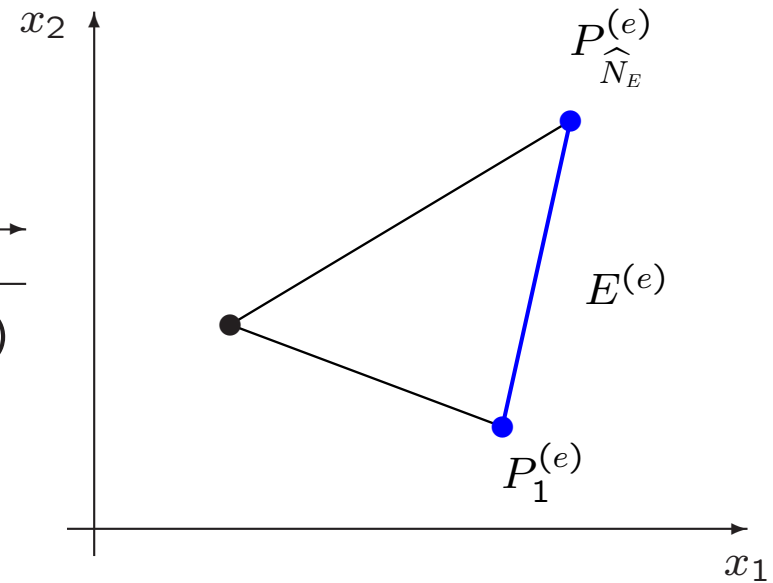


# Abbildung Referenzintervall $\leftrightarrow$ Dreiecks- bzw. Vierecksseite



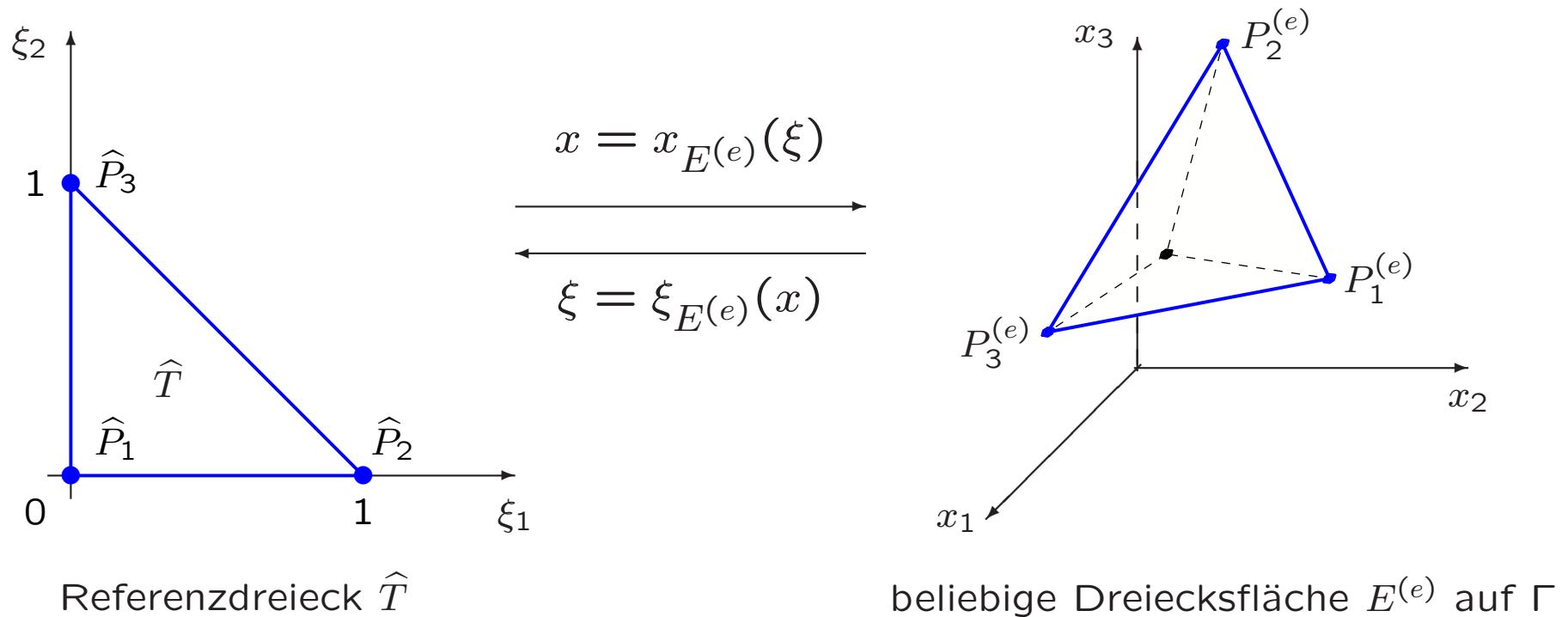
Referenzintervall  $[0, 1]$

$$x = x_{E(e)}(\xi_1)$$
$$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$$
$$\xleftarrow{\hspace{2cm}}$$
$$\xi_1 = \xi_{1,E(e)}(x)$$

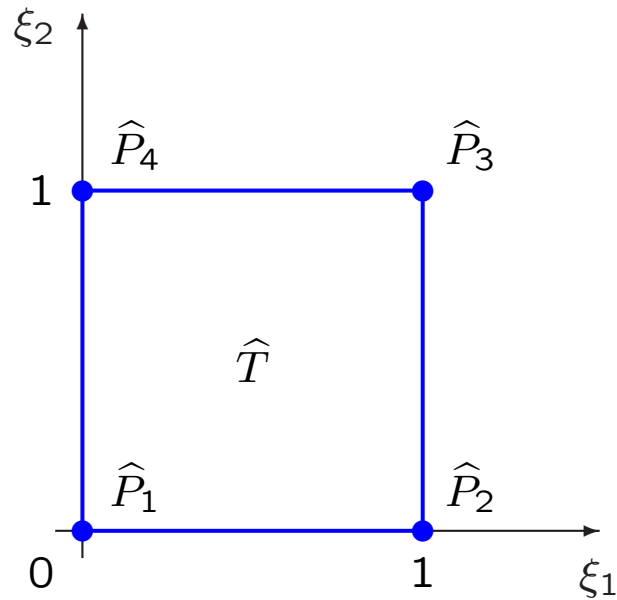


beliebige Dreiecksseite  $E^{(e)}$  auf  $\Gamma$

# Abbildung Referenzdreieck $\leftrightarrow$ Dreiecksfläche auf dem Rand

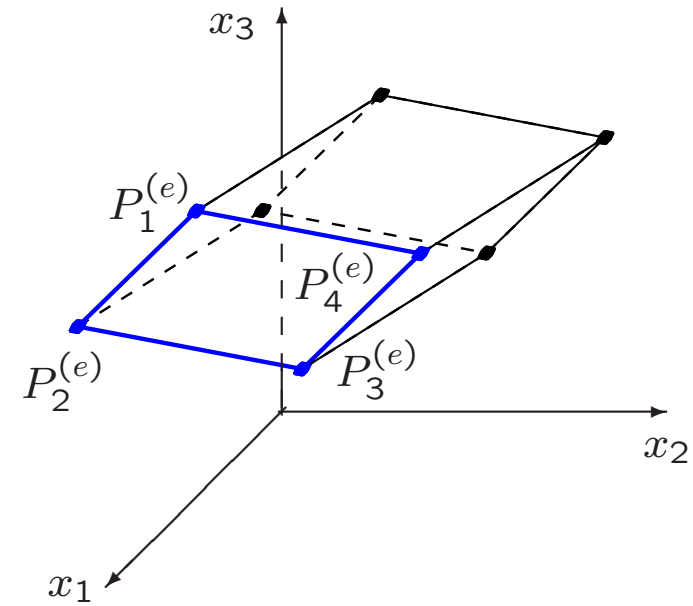


# Abbildung Referenzviereck $\leftrightarrow$ Vierecksfläche auf dem Rand



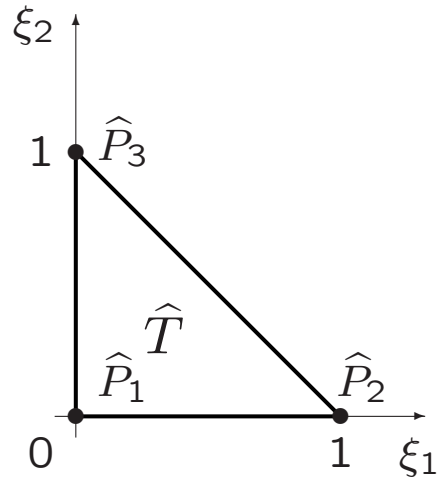
Referenzviereck  $\hat{T}$

$$x = x_{E^{(e)}}(\xi)$$
$$\xi = \xi_{E^{(e)}}(x)$$



beliebige Vierecksfläche  $E^{(e)}$  auf  $\Gamma$

## Definition stückweise linearer Ansatzfunktionen



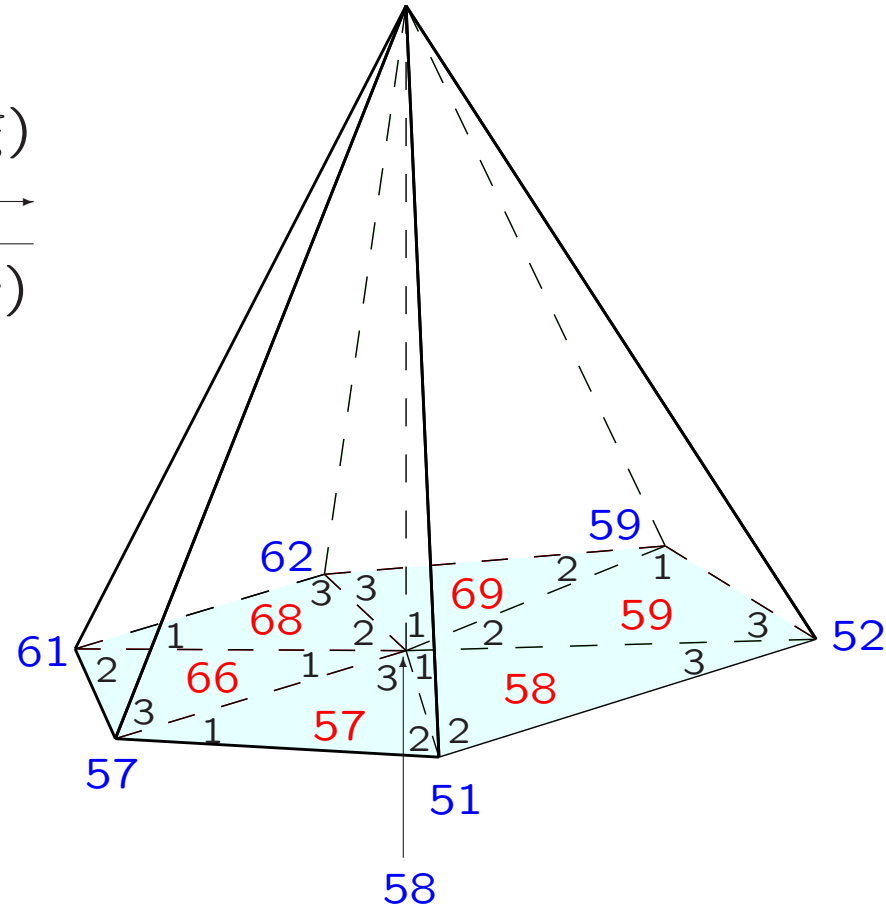
$$x = x_{T(r)}(\xi)$$

$$\xi = \xi_{T(r)}(x)$$

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

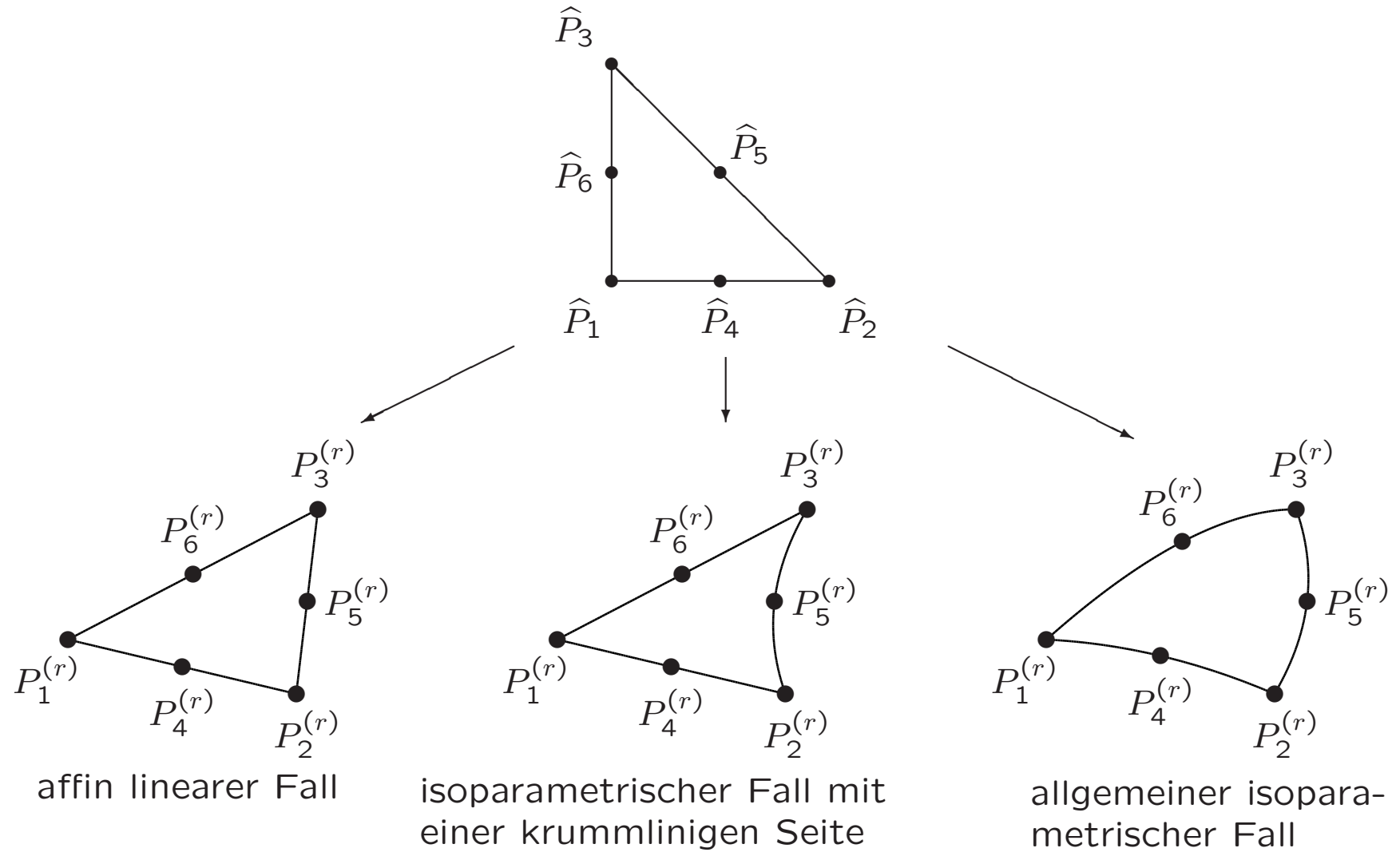
$$\varphi_2(\xi) = \xi_1$$

$$\varphi_3(\xi) = \xi_2$$

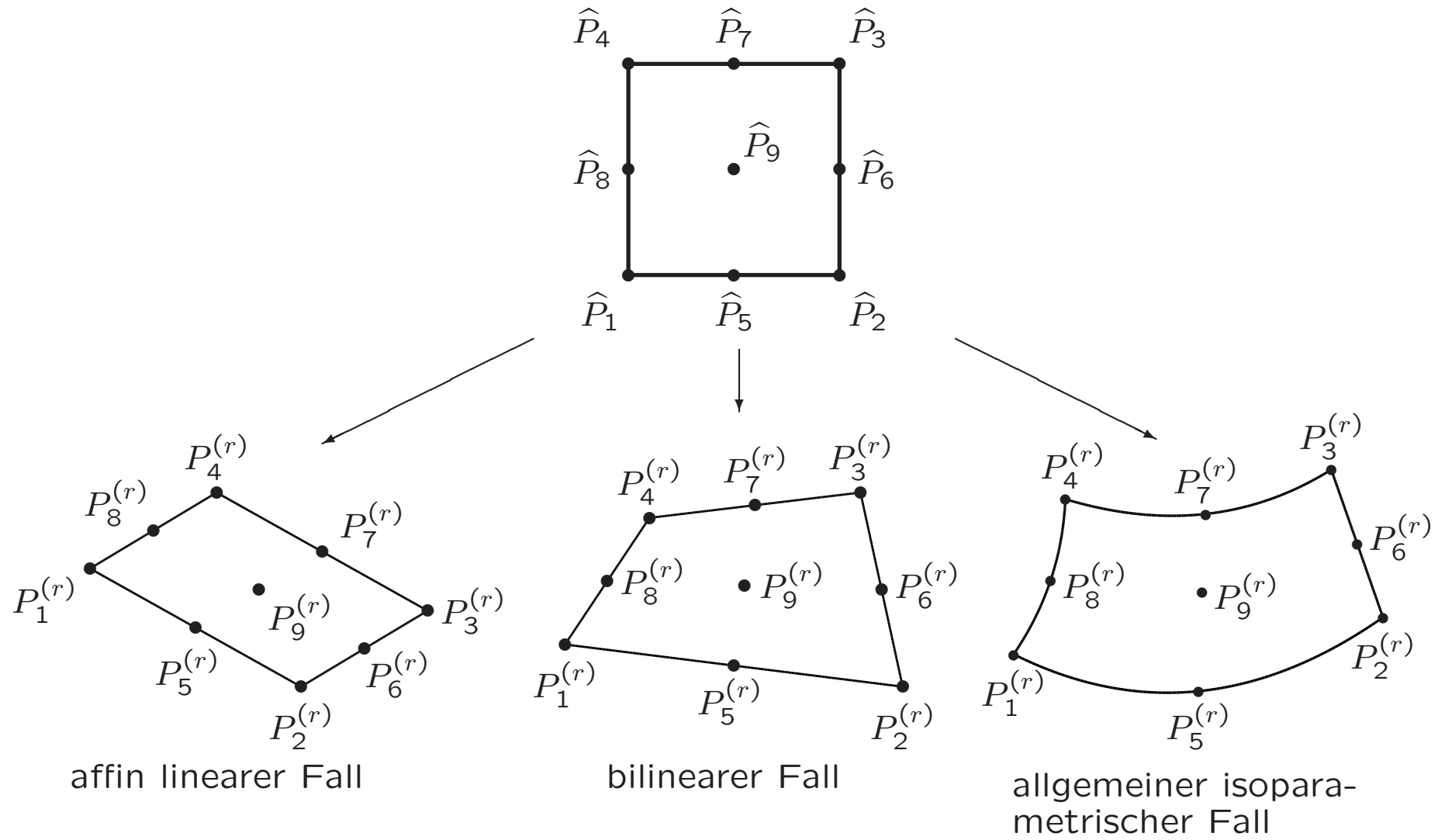


$$p_{58}(x)|_{T(59)} = p_2^{(59)}(x) = \varphi_2(\xi_{T(59)}(x))$$

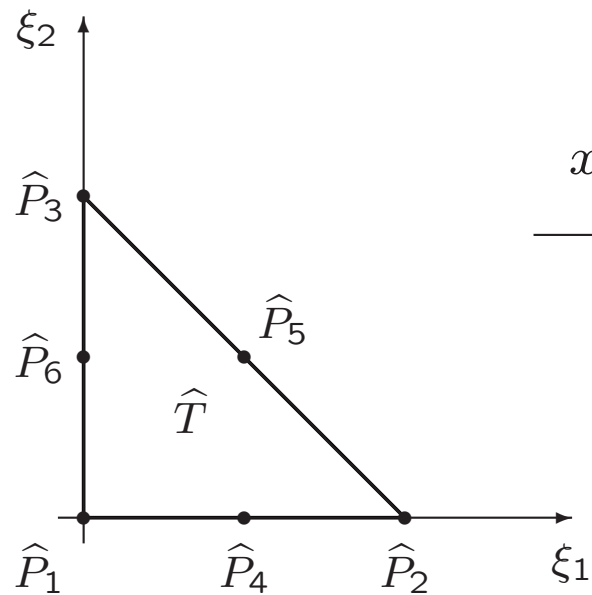
# Isoparametrische Dreieckselemente



# Isoparametrische Viereckselemente

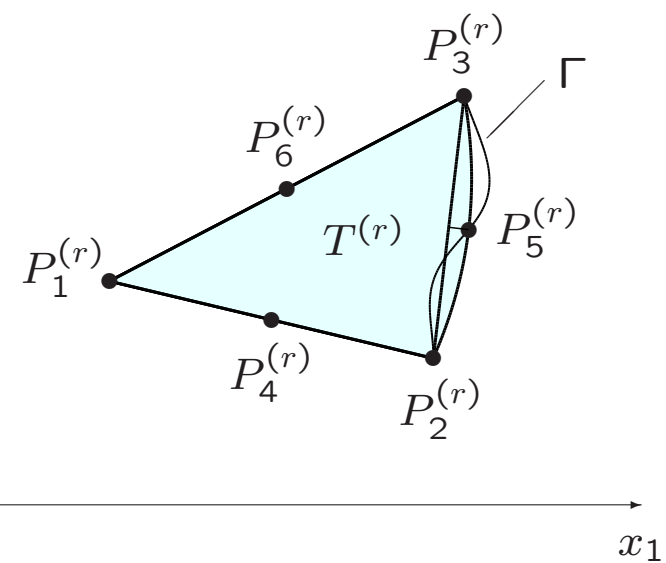


## Randapproximation mittels isoparametrischer Dreiecke



Referenzdreieck  $\hat{T}$

$$x = x_{T^{(r)}}(\xi)$$

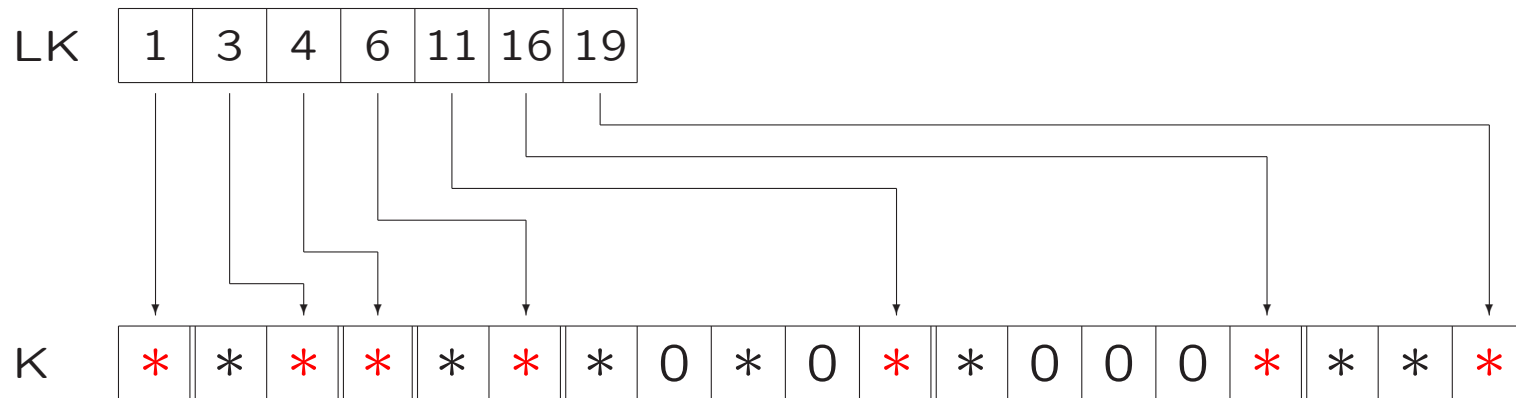


Dreieck mit einer krummlinigen Seite

# Speichertechnik für dünnbesetzte Matrizen

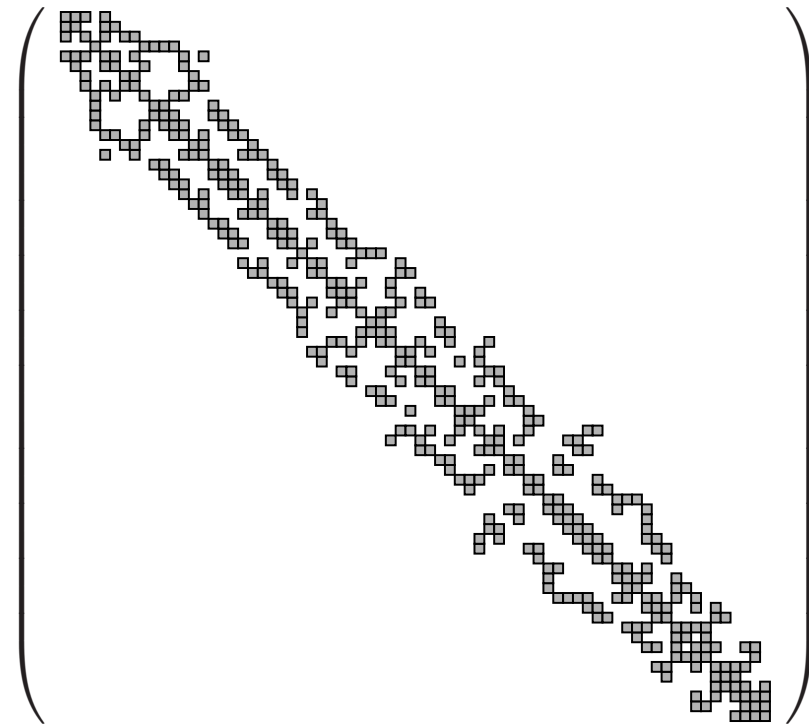
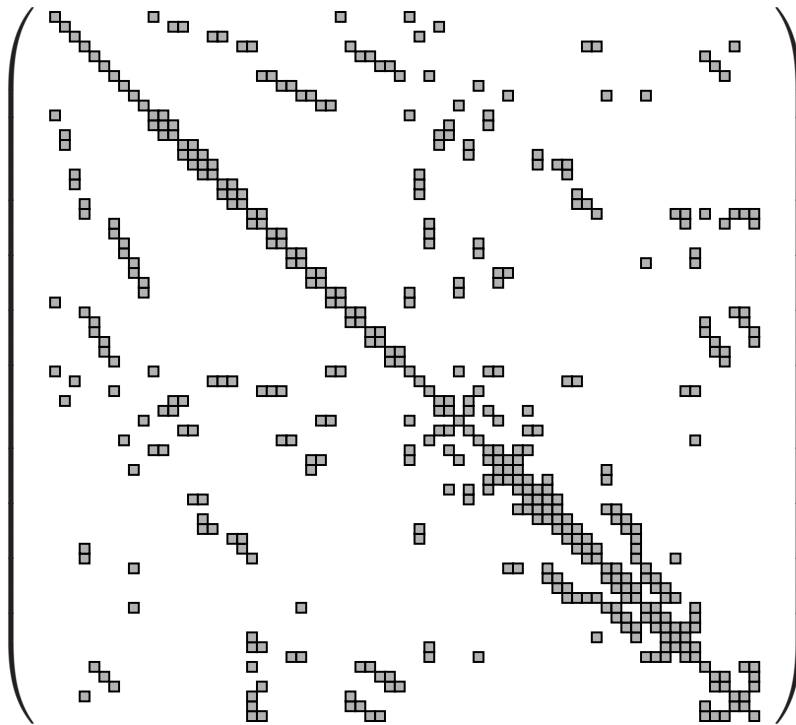
## Variable Bandbreite spaltenweise - Skyline-Speichertechnik

$$K = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$





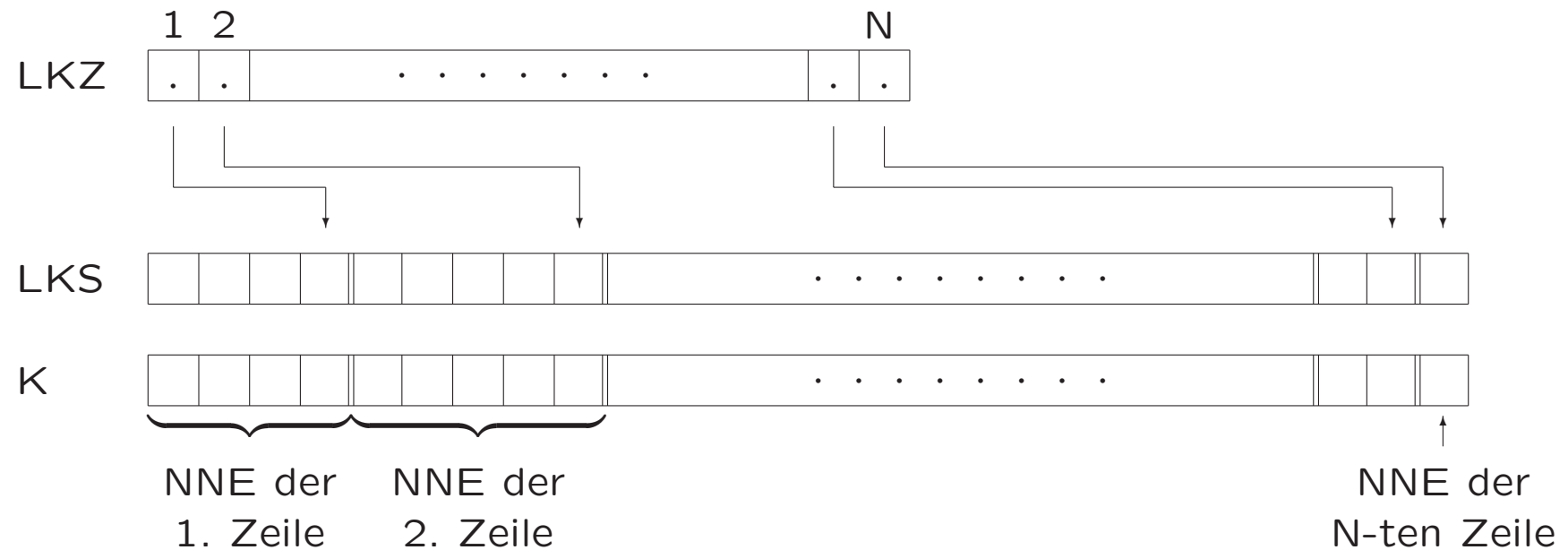
## Besetzungsstruktur einer Steifigkeitsmatrix vor und nach Knotenumnummerierung



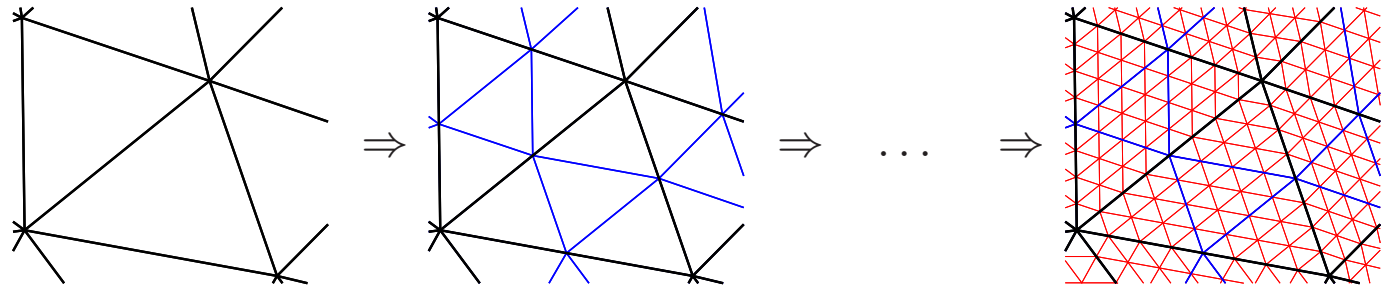
## Speichertechnik für dünnbesetzte Matrizen

### Kompaktliste zeilenweise (compressed row storage scheme)

- K Vektor mit den Nicht-Null-Elementen (NNE) im oberen Dreieck einer symmetrischen Matrix  $K$  zeilenweise angeordnet
- LKZ Zeiger auf die Position des jeweiligen letzten Nicht-Null-Elementes einer Zeile der Matrix  $K$  im Vektor K
- LKS Vektor der Spaltenindizes



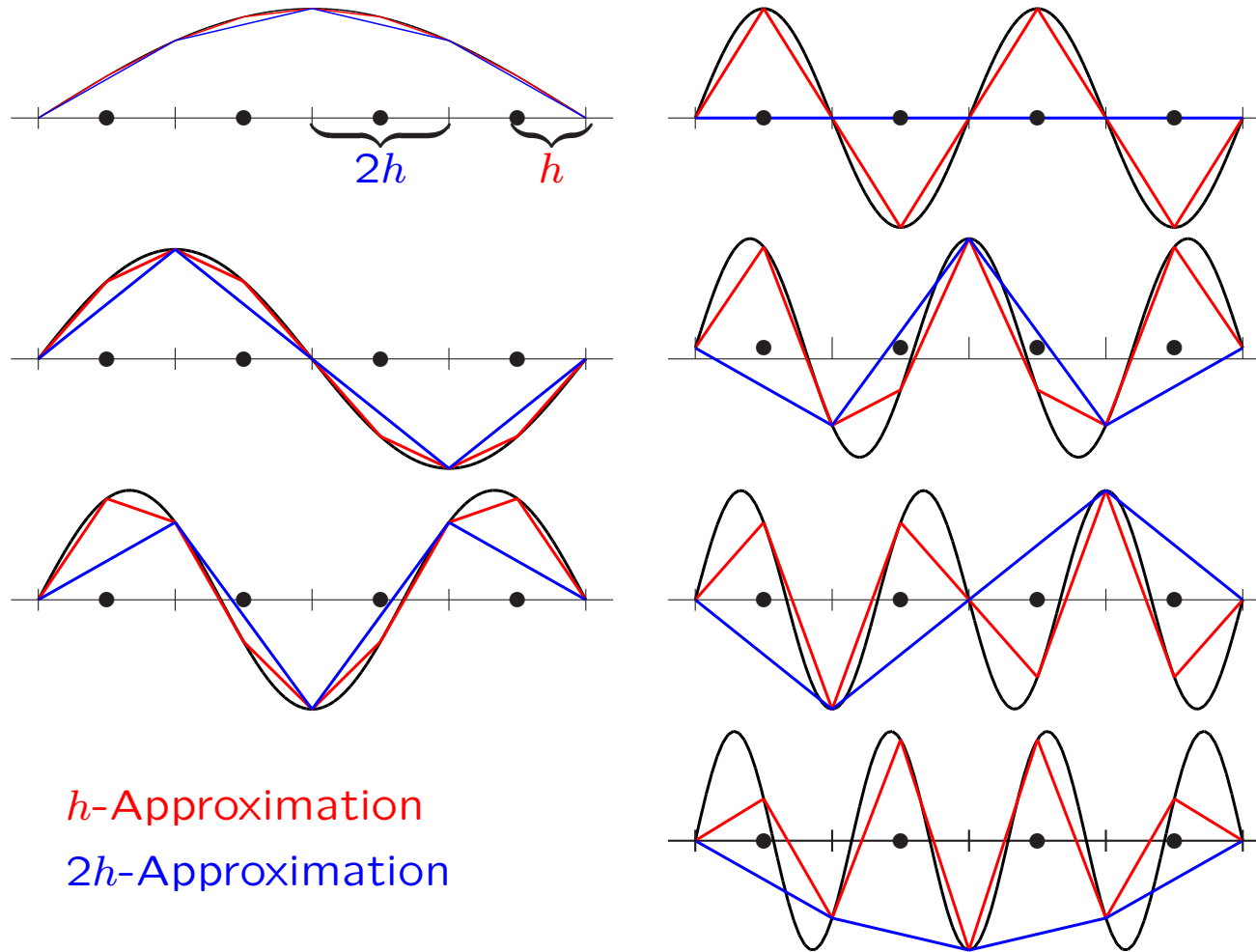
## Vernetzungsfolge für Mehrgitterverfahren



Vernetzung	$\mathcal{T}_{h_1}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{T}_{h_2}$	$\Rightarrow$	...	$\Rightarrow$	$\mathcal{T}_{h_\ell}$
Schrittweite	$h_1$	$>$	$h_2$	$>$	...	$>$	$h_\ell$
Knotenanzahl	$\bar{N}_1$	$<$	$\bar{N}_2$	$<$	...	$<$	$\bar{N}_\ell$

# Niedrig- und hochfrequente Eigenfunktionen

Approximation der Funktionen  $\sqrt{2} \sin(k\pi x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$



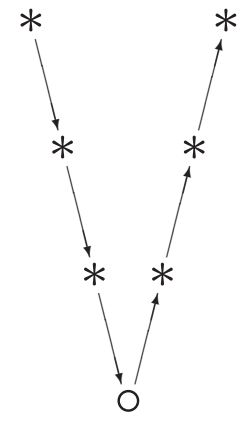
# Zyklenarten in Mehrgitterverfahren

Seien mit

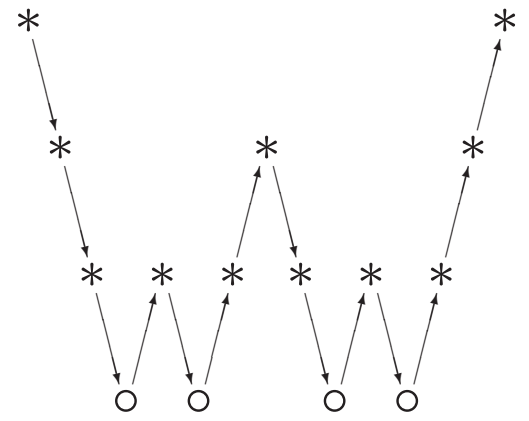
- \* die Durchführung der Glättung,
- o die Lösung des Gleichungssystems auf dem gröbsten Gitter,
- ↘ die Restriktion und
- ↗ die Interpolation

bezeichnet.

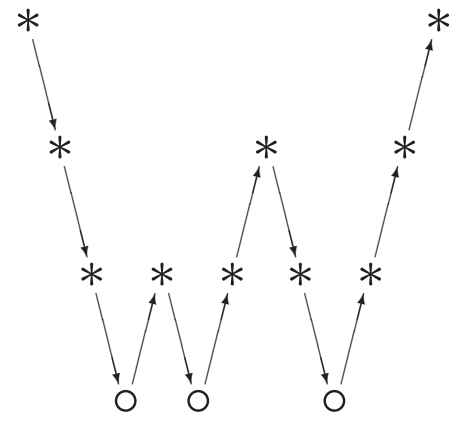
$q = 4$   
 $q = 3$   
 $q = 2$   
 $q = 1$



V-Zyklus

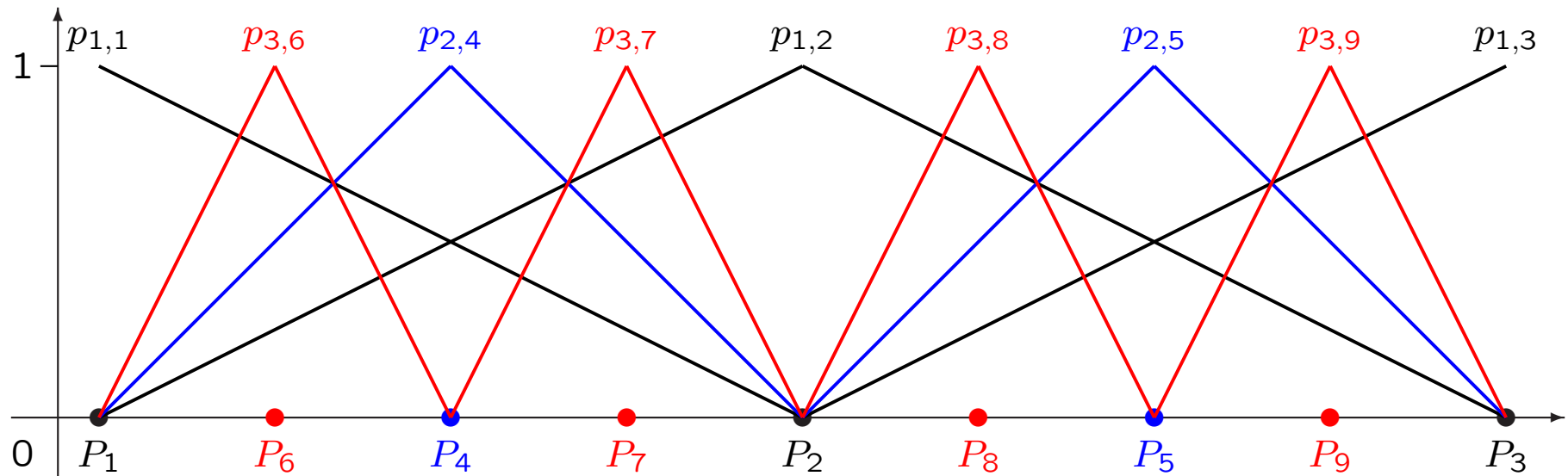


W-Zyklus



F-Zyklus

## h-hierarchische Basis mittels stückweise linearer Ansatzfunktionen



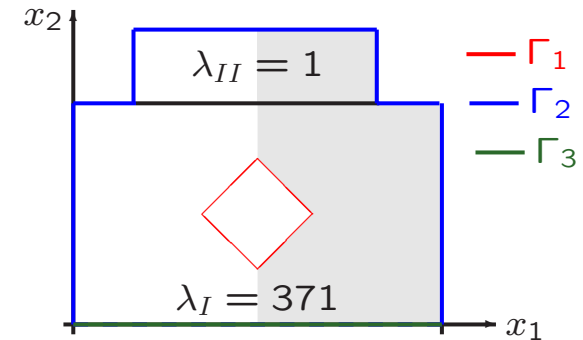
## Vergleich verschiedener Auflösungsverfahren anhand eines Wärmeleitproblems

Diskretisierung: Dreieckselemente,  
stückweise lineare Ansatzfunktionen

⇒ FE-Gleichungssystem  $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$

Startvektor für die Iterationsverfahren:  
 $\underline{u}_h^{(0)} = (500, 500, \dots, 500)^T$

Abbruch der Iteration bei  $\|\underline{r}_h^{(k)}\| \leq 10^{-5} \|\underline{r}_h^{(0)}\|$ ,  $\underline{r}_h^{(k)} = K_h \underline{u}_h^{(k)} - \underline{f}_h$



#Unbekannte	933		3593		14097		55841		222273	
Lösungsverf.	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]	#Iter.	Zeit [s]
Direktes Verf. Faktorisierung		0.00		0.02		0.12		1.64		48.62
Lösung		0.00		0.00		0.01		0.08		0.59
Jacobi	1323857	24.89	5285232	462.78	20994731	11681.05				
Gauß-Seidel	628039	14.25	2402169	220.56	9148812	5837.63				
SOR	2231	0.06	4487	0.46	9014	5.82	18217	46.89	36723	380.47
CG	1206	0.03	3697	0.43	9605	9.99	21711	108.37	46011	905.20
DIAG-PCG	153	0.00	326	0.04	672	0.83	1377	8.96	2790	72.96
SSOR-PCG	44	0.00	72	0.03	122	0.25	203	2.06	336	13.71
IC-PCG	38	0.00	72	0.02	145	0.26	295	2.62	584	21.15
MIC-PCG	19	0.00	27	0.00	44	0.08	69	0.64	113	4.21
HB-PCG	27	0.00	36	0.00	46	0.06	56	0.57	66	3.01
MG-F22	4	0.00	4	0.00	4	0.02	4	0.14	4	0.66
MG-PCG,V11	7	0.00	7	0.00	7	0.03	7	0.18	7	0.84
MDS-PCG	19	0.00	22	0.00	23	0.03	25	0.24	26	1.09

M. Jung, U. Langer: Methode der finiten Elemente für Ingenieure: Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation. 2., überarb. u. erw. Auflage, © Verlag Springer Vieweg, 2013