Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden — Sommersemester 2019
Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Dr. B. Jung

Übungsaufgaben zu Kapitel 7 und 8

Aufgabe 1:
Skizzieren Sie für die folgenden Funktionen die Niveaulinien (Höhenlinien) in den jeweils angegebenen Höhen z_1 und z_2. Stellen Sie dafür zunächst die allgemeine Gleichung der Niveaulinien in Abhängigkeit von dem Parameter c auf und lösen Sie diese nach der Variablen y auf.

a) $z = f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^{x-3y}\,;\ \text{Höhen}:\ z_1 = 1,\ z_2 = \mathrm{e}$

b) $z = f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^{x^2-3y}\,;\ \text{Höhen}:\ z_1 = 1,\ z_2 = \mathrm{e}$

c) $z = f(x,y) \;=\; \ln(2x+5y) \quad (\text{mit}\ 2x+5y > 0)\,;\ \text{Höhen}:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$

Aufgabe 2:
Für die Brennweite einer einfachen, bikonvexen Linse gilt: $f = \dfrac{ab}{a+b}$ (a: Gegenstandsweite, b: Bildweite).
Bei einer Messung wurden folgende Werte ermittelt: $a = 42.4\,\text{cm}$ und $b = 26.6\,\text{cm}$, die Messungenauigkeiten für a und für b betragen jeweils $\pm 0.1\,\text{cm}$.
Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler für die Brennweite.

Aufgabe 3:
Die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt einer zylindrischen Spule mit 1000 Windungen und der Länge l, dem Radius r und der Stromstärke I beträgt:

$$H = H(I,l,r) = \frac{1000 \cdot I}{l}\left(1 - 2 \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2\right).$$

Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung von H, wenn die Werte
$l = 20\,\text{cm}\,,\ r = 2\,\text{cm}\,,\ I = 1\,\text{A}$ gemessen wurden und die Messungenauigkeiten $\pm 0.01\,\text{cm}$ (jeweils für l und für r) sowie $\pm 0.03\,\text{A}$ (für I) betragen.

Aufgabe 4:
Um den Innendurchmesser d eines dünnen Rohres der Länge l zu bestimmen, wird das Rohr vollständig mit Quecksilber der Dichte ϱ gefüllt und durch Wiegen die Masse des benötigten Quecksilbers ermittelt. Daraus kann dann der gesuchte Durchmesser berechnet werden.
Es wurden folgende Messwerte ermittelt: $l = 10.2\,\text{cm},\ m = 6.3\,\text{g}$ und $\varrho = 13.6\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.
Die zugehörigen Messungenauigkeiten sind: $\pm 0.1\,\text{cm}$ für l, $\pm 0.1\,\text{g}$ für m und $\pm 0.1\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ für ϱ.
Schätzen Sie den absoluten Fehler bei der Berechnung von d.

Aufgabe 5:
Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot (-3x^2 + 4y^2)\,.$

a) Begründen Sie, dass im Punkt $(-2, 0)$ eine stationäre Stelle vorliegt.

b) Untersuchen Sie, ob es sich um eine lokale Extremalstelle oder um eine Sattelstelle handelt.

Aufgabe 6:
Berechnen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$

b) $f(x,y) = x^2(2-y) - y^3 + 3y^2 + 9y$

c) $f(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x(y+3) + y^2 + 4y$

Zusatz: $f(x,y) = (x^3 - 3x)\cos y$

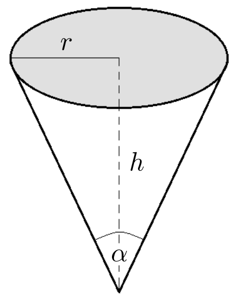
Aufgabe 7:
In einer Firma sollen Konservendosen mit dem Volumen $V = 1\,\ell$ hergestellt werden. Wie müssen der Radius r und die Höhe h (jeweils in cm) der zylinderförmigen Konservendose gewählt werden, damit möglichst wenig Metall benötigt wird?

Lösen Sie diese Aufgabe **a)** mittels Eliminationsmethode
b) mittels Lagrange-Methode.

Aufgabe 8:
Die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}\;\;(x,\, y,\, z > 0)$ besitzt unter der Nebenbedingung $x + y + z = 12$ genau ein lokales Minimum. Wo liegt dieses und welchen Wert hat dort die Funktion?

Aufgabe 9:
Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $2x^2 + 3y^2 = 1$. Verwenden Sie dazu die Lagrange-Methode.

Aufgabe 10:
Hinweis: Diese Aufgabe hat einen erhöhten Schwierigkeitsgrad!
Aus einem Blech mit konstanter Dicke soll ein Trichter hergestellt werden, der die Gestalt eines geraden Kreiskegels hat und ein Volumen von $10\,\mathrm{dm}^3$ besitzt. Wie groß ist der Öffnungswinkel α dieses Kreiskegels zu wählen, damit der Materialverbrauch (d.h. die Mantelfläche des Kegels) möglichst klein wird?
Anleitung: Stellen Sie die Mantelfläche und das Volumen des Kreiskegels jeweils als Funktion von r und α (siehe Abbildung) dar. Verwenden Sie zur Berechnung der minimalen Mantelfläche die Lagrange-Methode.



Hinweis zu den Aufgaben 11 bis 21:
Bei der Berechnung der auftretenden Integrale sind ggf. geeignete Koordinatentransformationen durchzuführen. Ebenso können geeignete Umformungen des Integranden hilfreich bei der Integration sein.
Beim Lösungsweg ist die Angabe von Stammfunktionen sowie von Zwischenergebnissen, die durch Einsetzen der Integrationsgrenzen entstehen, erforderlich.

Aufgabe 11:
Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt des Flächenstücks, welches von den beiden Parabeln $y = 2x - x^2$ und $y = 3x^2 - 6x$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 12:
Berechnen Sie für die gegebenen Bereiche B und Funktionen $f(x, y)$ jeweils das Integral $\iint\limits_B f(x, y)\, dB$.

a) $B = \{(x,\, y) \,|\, \sqrt{y} \le x \le 6 - y,\; 0 \le y \le 4\},\;\; f(x, y) = x \cdot y$

b) B wird begrenzt durch die Kurven $x = \frac{y^2}{4}$ und $y = 2x - 12,\;\; f(x, y) = x + y^2$

c) B wird begrenzt durch die Kurve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ sowie die Geraden $x = 0$ und $y = 0,\;\; f(x, y) = x \cdot y$

Aufgabe 13:
Der ebene Bereich B sei ein Kreisring, welcher begrenzt wird von zwei Kreisen mit den Radien R_1 und R_2 $(0 < R_1 < R_2)$, deren Mittelpunkte im Koordinatenursprung liegen.

Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_B (x^2 + y^2)\, dB$.

weitere Aufgaben: siehe Seite 3

Aufgabe 14:
Der Bereich $B = \{\,(x,y)\,|\,0 \le x \le \pi\,,\ 0 \le y \le \sin x\,\}$ ist mit Masse der Dichte $\varrho(x,y) = 1 + x + 4y$ belegt. Gesucht ist die Gesamtmasse dieses Bereiches.

Aufgabe 15:
Berechnen Sie das Volumen des dreidimensionalen Bereiches B, welcher begrenzt wird durch:
$z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ x = -a,\ x = a,\ y = -a$ sowie $y = a$.

Aufgabe 16:
Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dB$ für $f(x,y,z) = 5x^2 y$, wenn der Bereich B durch die Ebenen $4x + 2y + z = 8,\ x = 0,\ y = 0$ und $z = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe 17:
Berechnen Sie die Gesamtladung Q des Körpers, der durch die Flächen $z = \sqrt{3}(x^2 + y^2)$ und $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ begrenzt wird, wenn für die Raumladungsdichte gilt: $\varrho(x,y,z) = \varrho_0 \cdot z$ (ϱ_0: konstant).

Aufgabe 18:
Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge der folgenden, in Parameterdarstellung gegebenen Raumkurven:
a) $x(t) = \mathrm{e}^t\,,\ y(t) = \mathrm{e}^{-t}\,,\ z(t) = \sqrt{2}\,t\,, \qquad t \in [0,1]$
b) $x(t) = \cosh t\,,\ y(t) = \sinh t\,,\ z(t) = t\,, \quad t \in [0,3]$.

Aufgabe 19:
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche durch die Parameterdarstellung

$$x(u,v) = u\cos v\,,\ \ y(u,v) = u\sin v\,,\ \ z(u,v) = u^2 \quad \text{mit} \quad 0 \le u \le 1\,,\ \ 0 \le v \le 2\pi$$

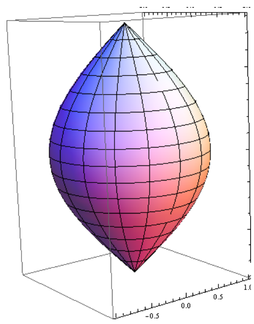
beschrieben wird.

Aufgabe 20:
Die Fläche mit der Parameterdarstellung

$$x(u,v) = u\cos v\,,\ \ y(u,v) = u\sin v\,,\ \ z(u,v) = v \quad \text{mit} \quad 0 \le u \le 2\,,\ \ 0 \le v < \frac{\pi}{2}$$

sei mit der Massendichte $\varrho(x,y,z) = \varrho_0 \cdot x$ (ϱ_0: konstant) belegt. Berechnen Sie die Masse dieser Fläche.

Aufgabe 21:



Die Oberfläche eines Footballs (siehe Abbildung) werde durch die Parameterdarstellung

$$x(u,v) = \cos u\cos v\,,\ \ y(u,v) = \cos u\sin v\,,\ \ z(u,v) = u$$
$$\text{mit} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le u \le \tfrac{\pi}{2}\,,\ \ 0 \le v \le 2\pi$$

beschrieben. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Footballs.

Hinweis: Es gilt: $\displaystyle\int \cos x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin^2 x} \cdot \sin x + \ln\left|2\sin x + 2\sqrt{1+\sin^2 x}\,\right|\right).$

weitere Aufgaben: siehe Seite 4

Aufgabe 22:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
$\vec{r}$ und $|\vec{r}|$ mit Hilfe von x, y und z ausdrücken, die erforderlichen Ableitungen bilden und einsetzen sowie schließlich die entstehenden Ausdrücke wieder mit Hilfe von $\vec{r}$ und $|\vec{r}|$ schreiben.

a) $\operatorname{rot}\,(|\vec{r}|\vec{r}\,)$

b) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\,(\ln|\vec{r}|)$

c) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}$ mit $\vec{V} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Aufgabe 23:
Gegeben ist das Vektorfeld: $\vec{V} = \dfrac{yz}{x}\,\vec{e}_x + \dfrac{xz}{y}\,\vec{e}_y + \dfrac{xy}{z}\,\vec{e}_z$ $(x, y, z > 0)$. Für dieses Vektorfeld sind zu berechnen:

a) $\operatorname{div}\vec{V}$ **b)** $\operatorname{rot}\vec{V}$ **c)** $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}$ **d)** $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}$

Aufgabe 24:
Gegeben ist das Vektorfeld: $\vec{V} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-x}\ln y \\ 2yz^3 - \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-x} \\ 3y^2z^2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{V}$.
b) Überprüfen Sie, ob das Vektorfeld wirbelfrei ist.

Aufgabe 25:
Begründen Sie, dass $U = -\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ das Potential des Vektorfeldes

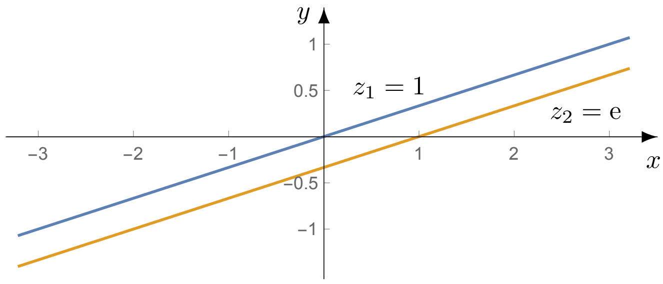
$\vec{V} = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Ergebnisse: siehe Seiten 5 und 6

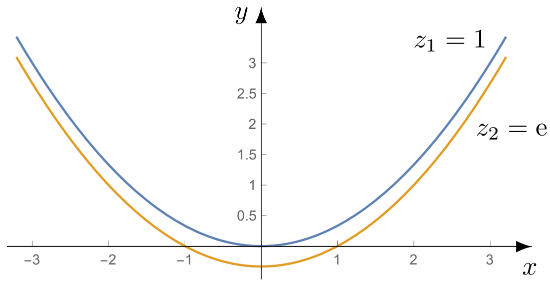
Ergebnisse

Aufgabe 1:

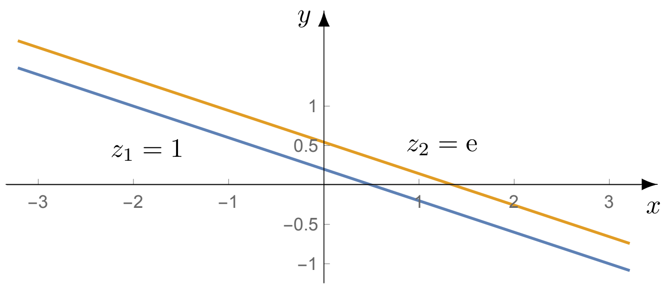
a) allgemeine Gleichung der Niveaulinien:
   $e^{x-3y} = c \ \ (c > 0)$
   nach y aufgelöste Gleichung:
   $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\ln c$
   für $z_1 = c = 1$: $y = \frac{1}{3}x$
   für $z_2 = c = \mathrm{e}$: $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\ln \mathrm{e} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$



b) allgemeine Gleichung der Niveaulinien:
   $e^{x^2-3y} = c \ \ (c > 0)$
   nach y aufgelöste Gleichung:
   $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ln c$
   für $z_1 = c = 1$: $y = \frac{1}{3}x^2$
   für $z_2 = c = \mathrm{e}$: $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ln \mathrm{e} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}$



c) allgemeine Gleichung der Niveaulinien:
   $\ln(2x + 5y) = c$
   nach y aufgelöste Gleichung:
   $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^c$
   für $z_1 = c = 0$: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$
   für $z_2 = c = 1$: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\mathrm{e}$



Aufgabe 2:
absoluter Fehler: $|\Delta f| \leq 0.053\,\text{cm}$, relativer Fehler: $\frac{|\Delta f|}{f} \leq 0.003$

Aufgabe 3: $|\Delta H| \leq 1.5035\,\frac{\text{A}}{\text{cm}}$, $\frac{|\Delta H|}{H} \leq 0.0307$

Aufgabe 4:
$|\Delta d| \leq 0.004\,\text{cm}$

Aufgabe 5:
a) Part. Ableitgn. nach x und y überprüfen
b) lokale Extremalstelle (Nachweis mittels Determinante der Hesse-Matrix)

Aufgabe 6:
a) lokales Minimum für $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ mit $f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{119}{27} \approx 4.407$
b) lokales Minimum für $(x, y) = (0, -1)$ mit $f(0, -1) = -5$
   lokales Maximum für $(x, y) = (0, 3)$ mit $f(0, 3) = 27$
c) lokales Minimum für $(x, y) = (0, -1)$ mit $f(0, -1) = -5$

Zusatz:
lokales Minimum jeweils für $(x, y) = (1, 2k\pi)$ mit $f(1, 2k\pi) = -2$ sowie für $(x, y) = (-1, (2k+1)\pi)$ mit $f(-1, (2k+1)\pi) = -2 \quad (k \in \mathbb{Z})$
lokales Maximum jeweils für $(x, y) = (1, (2k+1)\pi)$ mit $f(1, (2k+1)\pi) = 2$ sowie für $(x, y) = (-1, 2k\pi)$ mit $f(-1, 2k\pi) = 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

Aufgabe 7: $r = 5.42\,\mathrm{cm}, h = 2r = 10.84\,\mathrm{cm}$ (für beide Rechenwege)

Aufgabe 8: lokales Minimum im Punkt $P(2,\ 4,\ 6)$ mit $f(2,\ 4,\ 6) = 3$

Aufgabe 9:
lokale Maxima für $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0)$ mit $f(x, y) = \frac{1}{2}$
lokale Minima für $(x, y) = (0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ mit $f(x, y) = \frac{1}{3}$

Aufgabe 10:
$\alpha = 70.53°$ (es gilt dann: $r = 1.89\,\mathrm{dm}$)

Aufgabe 11: $A = \dfrac{16}{3}$ [FE] , $x_S = 1$ [LE], $y_S = -\dfrac{4}{5}$ [LE]

Aufgabe 12:
a) $\frac{112}{3} = 37.\overline{3}$ a) $\frac{1250}{3} = 416.\overline{6}$ c) $\frac{1}{280} \approx 0.004$

Aufgabe 13: $\dfrac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$

Aufgabe 14: $m = 2(\pi + 1)$ [ME]

Aufgabe 15: $V = \frac{8a^4}{3}$ [VE]

Aufgabe 16: Wert des Integrals: $\frac{128}{9}$

Aufgabe 17: $\frac{5}{4}\pi\varrho_0$ [Ladungseinheiten]

Aufgabe 18:
a) 2.35 [LE] b) $\sqrt{2}\sinh(3)$ [LE] $= 14.167$ [LE]

Aufgabe 19: $F_A = 5.33$ [FE]

Aufgabe 20: $m = 3.393\varrho_0$ [ME]

Aufgabe 21: $A = 14.424$ [FE]

Aufgabe 22:
a) $\vec{0}$ b) $\frac{1}{|\vec{r}|^2}$ c) $-2\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

Aufgabe 23:

a) $\operatorname{div}\vec{V} = -\left(\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}\right)$ b) $\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{x}{z} - \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} - \frac{y}{z} \\ \frac{z}{y} - \frac{z}{x} \end{pmatrix}$

c) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0$ d) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} \\ -\frac{x}{z^2} - \frac{z}{x^2} \\ -\frac{y}{x^2} - \frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 24:
a) $\operatorname{div}\vec{V} = \mathrm{e}^{-x}\ln y + 2z^3 + \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-x} + 6y^2 z$ b) nein

Aufgabe 25: nachrechnen: $\vec{V} = \operatorname{grad} U$