3. Rentenrechnung

Definition:

Rente	=	laufende Zahlungen, die in regelmäßigen Zeitabschnitten (periodisch) wiederkehren
Rentenperiode	=	Zeitabstand zwischen zwei Rentenzahlungen

Finanzmathematisch sind zwei Gesichtspunkte von Interesse:

(A) Die Rentenbeträge werden auf ein Konto mit Zinseszins eingezahlt.
(B) Die Rentenzahlungen erfolgen aus einem Kapital, das auf Zinseszins angelegt ist.

Bemerkung zum Vergleich von (A) und (B):

Rechnet man in beiden Fällen (A) und (B) mit dem gleichen Aufzinsfaktor q, und der gleichen Rente, so müssen sich zu jedem Zeitpunkt n die Kontostände von (A) und (B) zum Kapital Kq^n aufsummieren, wobei K das Anfangskapital in (B) ist.

3.1. Konstante nachschüssige Renten bei durchgehend zinseszinslicher Verzinsung

Der Rentenbetrag R wird am Ende der Rentenperiode bezahlt.

Bezeichnung:

R	...	konstanter Rentenbetrag
R_0	...	Barwert der nachschüssigen Rente
n	...	Laufzeit der Rente (in Jahren)
R_n	...	nachschüssiger Rentenendwert, d.h. Wert von n nachschüssigen Renteneinzahlungen nach der n-ten Rentenperiode
i	...	Zinssatz
q		$q = 1 + i$
K	...	Kapital, aus dem die Rentenzahlung erfolgt
K_n	...	Kapital, das nach n Jahren noch vorhanden ist

Satz:

Werden die (jährlich) konstanten Rentenbeträge R nachschüssig auf ein Konto mit (jährlichem) Zinssatz i eingezahlt, so ergibt sich folgender Rentenendwert nach n Rentenperioden:

$$R_n = R\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{3.1}$$

Erfolgt die Rentenzahlung dagegen aus einem Kapital K, so hat das Kapital nach n Rentenperioden noch einen Wert von

$$\begin{aligned} K_n &= Kq^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= Kq^n - R_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

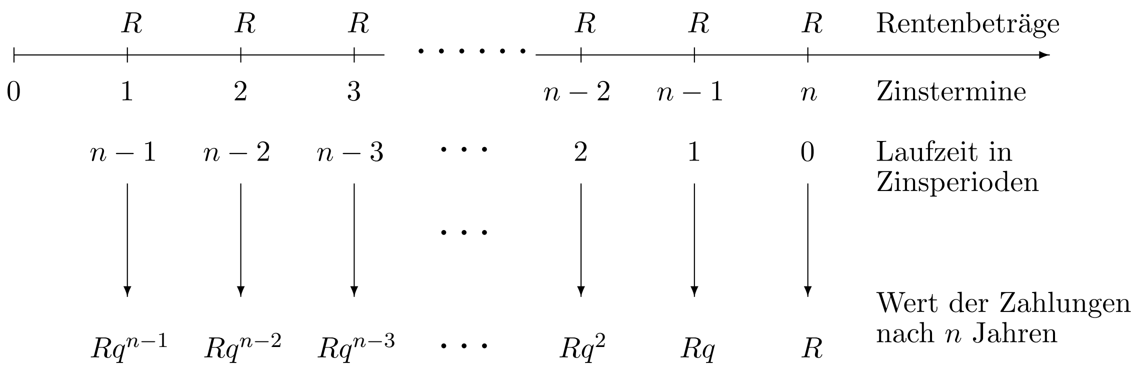
Bemerkung:

Addiert man die Gleichungen (3.1.) und (3.2), so erhält man

$$K_n + R_n = Kq^n$$

Zum Beweis:

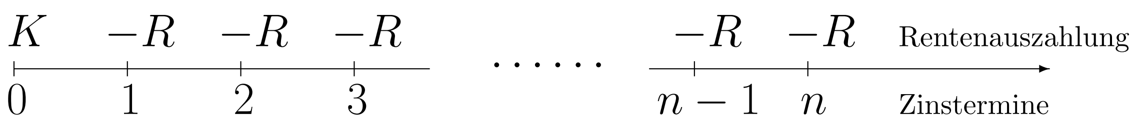
(A)



Folglich gilt für den nachschüssigen Rentenendwert:

$$
\begin{aligned}
R_n &= Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + Rq^{n-3} + \cdots + Rq^2 + Rq + R \\
&= R \sum_{k=0}^{n-1} q^k = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

(B)



Wir berechnen nun das Kapital, das nach k Jahren, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, noch vorhanden ist:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= Kq - R \\
K_2 &= K_1 q - R = (Kq - R)q - R = Kq^2 - Rq - R \\
K_3 &= K_2 q - R = (Kq^2 - Rq - R)q - R = Kq^3 - Rq^2 - Rq - R \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Folglich gilt für den Kapitalwert nach n Jahren:

$$
\begin{aligned}
K_n &= Kq^n - Rq^{n-1} - Rq^{n-2} - \ldots - Rq - R \\
&= Kq^n - R\sum_{k=0}^{n-1} q^k \quad = \quad Kq^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

Im Fall (B) ergibt sich die Fragestellung:

Wird das Kapital verbraucht? Wenn ja, wann?

1. Fall:

Das Kapital wird nicht verbraucht $\Longrightarrow$ **ewige Rente**
(**Bezeichnung**: R_e)

Das ist der Fall für $R \leq Ki$, d.h.
ausgezahlte Rente $\leq$ Zinsen für das (Anfangs-)Kapital
$\Longrightarrow K \leq K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \cdots$

Eine maximale ewige Rente $R_{e_{max}}$ erhält man für:
$K_n = K \quad$ für alle $n \in \mathbf{N}$.
$\Longrightarrow$

$$R_{e_{max}} = Ki \tag{3.3}$$

Es werden gerade nur die Zinsen ausgezahlt.

2. Fall:

Das Kapital wird im Laufe der Zeit verbraucht, d.h. der Rentenbetrag muss über dem Zinsertrag liegen.

$\Longrightarrow R > Ki \qquad (R \leq K(1+i))$

Frage: Wann ist das Kapital verbraucht?
$\Longrightarrow$ Gesucht n so, dass $K_n = 0$
$\Longleftrightarrow$

$$0 = Kq^n - R\frac{q^n - 1}{q - 1} = Kq^n - R_n$$

$\Longleftrightarrow$

$$Kq^n = R\frac{q^n - 1}{q - 1} = R_n \tag{3.4}$$

$\longrightarrow$ umstellen der Gleichung nach n (später)

Zur Barwertberechnung im Falle (A):

Aus der Definition des Barwertes folgt:

$$R_0 q^n = R_n \tag{3.5}$$

Daraus ergibt sich mit Gleichung (3.1) der Barwert in Abhängigkeit vom Rentenbetrag R, n und q:

$$R_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \tag{3.6}$$

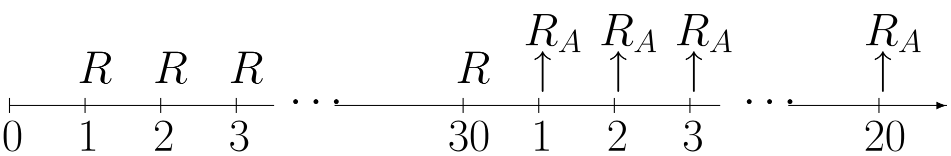
Gleichung (3.6) entspricht der Gleichung (3.4) (vgl. Bemerkung am Anfang). Man braucht also nicht zwischen K und R_0 zu unterscheiden.

Beispiel:

Wieviel muss man 30 Jahre lang jährlich nachschüssig einzahlen, damit man anschließend 20 Jahre lang eine jährlich nachschüssige Rente in Höhe von 24.000 € erhält?
(Sowohl in der Ansparphase als auch in der Auszahlphase sei $i = 6\%$.)

Lösung:

gegeben: $n_1 = 30,\ n_2 = 20,\ R_A = 24.000,\ i = 6\%$ gesucht: R



1. Den Kapitalwert bestimmen, aus dem die Rentenzahlungen über die 20 Jahre bezahlt werden können.

$\longrightarrow$ Abzinsung mittels Formel (3.6):

K_0 … Kapital, das zu Beginn der 20 Auszahljahre vorliegen muss:

$$K_0 = R_A \cdot \frac{q^{20} - 1}{q^{20}(q-1)} = 24.000 \frac{1,06^{20} - 1}{1,06^{20} \cdot 0,06} = 275.278,11.$$

2. Dieser Wert K_0 muss Endwert der Einzahlungen sein.

$\longrightarrow$ (3.1):

$$R = K_0 \cdot \frac{q-1}{q^{30} - 1} = K_0 \cdot \frac{0,06}{1,06^{30} - 1} = 3.481,97.$$

Die Auflösung nach n

(A)

Frage: Wie lange muss man jährlich nachschüssig einen Betrag R einzahlen, um nach n Jahren über einen vorgegebenen Kapitalwert R_n verfügen zu können (i sei bekannt)?

(3.7)

(B)

Frage: Wann erfolgt die letzte nachschüssige Rentenzahlung der Höhe R aus einem Kapital R_0, das mit dem Zinssatz i verzinst wird?
Prüfen, ob $R > R_0\, i$! (sonst Aufgabe sinnlos)

(3.8)

Die Auflösung nach q

Die Frage nach dem in der Rentenformel verwendeten Zinssatz ist die Frage nach dem **internen Zinssatz des Rentenstromes**.

(A)

$$\begin{aligned} R_n &\overset{(3.1)}{=} R\,\frac{q^n-1}{q-1} \\ \Longrightarrow R_n(q-1) &= R(q^n-1) \\ \Longrightarrow Rq^n - R_nq + R_n - R &= 0 \end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned} R_0 &\overset{(3.6)}{=} R\,\frac{q^n-1}{q^n(q-1)} \\ \Longrightarrow R_0\,q^n(q-1) &= Rq^n - R \\ \Longrightarrow R_0q^{n+1} - (R_0+R)q^n + R &= 0 \end{aligned}$$

i.a. nicht nach q auflösbar, Berechnung iterativ

$\longrightarrow$ Newton–Verfahren

Bei m unterjährlichen Zahlungen:

konformer Zinssatz:

$$\begin{aligned} q_m &= \sqrt[m]{q} \quad , \qquad q_m^m = q \\ i_m &= \sqrt[m]{q} - 1 \end{aligned}$$

Rentenendwert nach n Jahren:

$$\begin{aligned} R_n &= R\,\frac{q_m^{m \cdot n} - 1}{q_m - 1} = R\,\frac{q^n - 1}{i_m} \\ &= R\,\frac{q^n - 1}{\sqrt[m]{q} - 1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Rentenendwert nach einem Jahr:

$$\begin{aligned} R_1 &= R\,\frac{q_m^m - 1}{q_m - 1} = R\,\frac{q - 1}{q_m - 1} \\ &= R\,\frac{i}{i_m} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$= \text{jährlich nachschüssige Ersatzrente}$$

3.2. Konstante vorschüssige Renten bei durchgehend zinseszinslicher Verzinsung

Rentenbetrag R wird am Anfang der Rentenperiode gezahlt

Bemerkung:

R_n^* …vorschüssiger Rentenendwert

Vergleich von nachschüssigen und vorschüssigen Renten:

(A)

	R	R	R	$\cdots\cdots$	R	R	nachschüssig
0	1	2	3		$n-1$	n	Zinstermine
R	R	R	R	$\cdots$	R	0	vorschüssig

Daraus erkennt man, dass die Anzahl der Rentenzahlungen in beiden Modellen gleich groß ist. Bei der vorschüssigen Renteneinzahlung erfolgen die Renteneinzahlungen nur genau eine Zinsperiode früher, das heißt: jede Einzahlung wird genau eine Periode länger verzinst als bei der nachschüssigen Renteneinzahlung. Also gilt folgender

Satz:

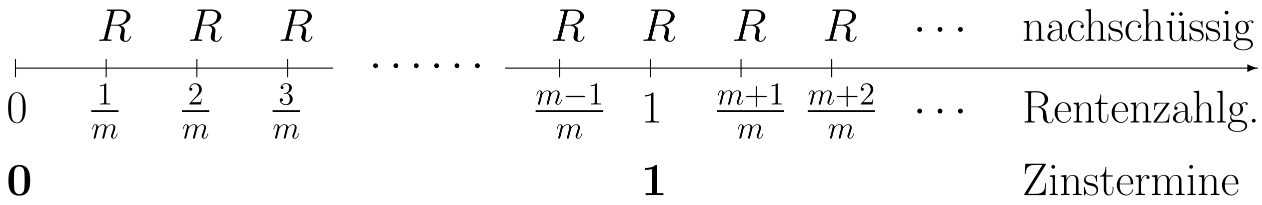
Für den **vorschüssigen Rentenendwert** R_n^* nach n Jahren einer jährlich vorschüssigen konstanten Rente R , die auf ein Konto mit Zinssatz i eingezahlt wird, gilt:

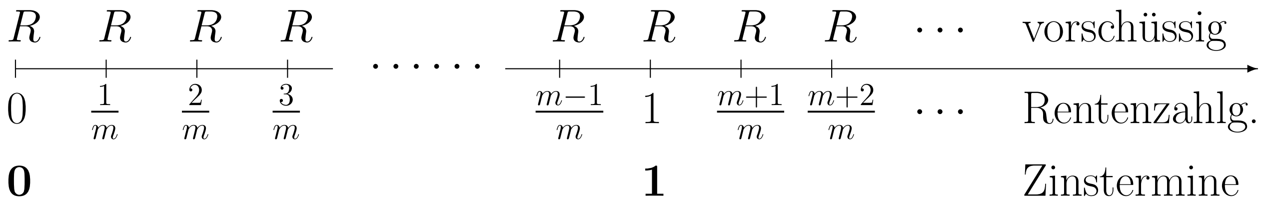
$$R_n^* = qR_n = R\,q\,\frac{q^n-1}{q-1} \tag{3.11}$$

Für den Barwert dieser Rente R_0^* erhalten wir (mit $R_0^* q^n = R_n^*$)

$$R_0^* = \frac{R_n^*}{q^n} = R\,\frac{q^n-1}{q-1}\,\frac{1}{q^{n-1}} \tag{3.12}$$

3.3. Unterjährliche konstante Renten bei gemischter jährlicher Verzinsung





Zu den m unterjährlichen Zahlungen (nachschüssig oder vorschüssig) wird eine gleichwertige (konforme) **jährlich nachschüssige Ersatzzahlung** berechnet.

Bezeichnung: R_k und R_k^*

Mit dieser Ersatzzahlung hat man dann diese Probleme auf das Problem der (jährlich) nachschüssigen Rentenzahlung zu den Zinsterminen (jährlich) zurückgeführt.

$$R_k = R\left(m + \frac{i(m-1)}{2}\right) \qquad (3.13)$$

$$R_k^* = R\left(m + \frac{i(m+1)}{2}\right) \qquad (3.14)$$

Beispiel:

Jährliche Zahlungen von 12.000 € haben nach 10 Jahren einen Rentenendwert bei einem Zinssatz von 6% und

1. vorschüssiger Zahlung von

$$\begin{aligned} R_{10}^{*} &\overset{(3.11)}{=} R\,q\,\frac{q^{10}-1}{q-1} \\ &= 12.000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{10}-1}{0,06} = 167.659,71 \end{aligned}$$

2. nachschüssiger Zahlung von

$$R_{10} = \frac{R_{10}^{*}}{q} = 158.169,54$$

Die Differenz dieser beiden Endwerte $R_{10}^{*} - R_{10} = 9.490,17$ sind die Zinsen für die erste vorschüssige Rate von 12.000 € , also $z = 12.000(1,06^{10}-1) = 9.490,17$